OBJETIVOS GENERALES

*. Estudio de los diferentes circuitos expuestos

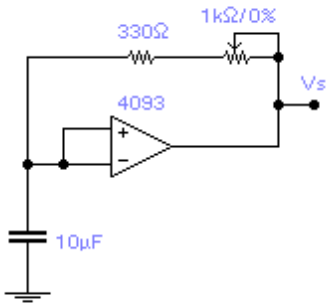
*. Comprensión de funcionamiento de cada circuito

*. Realizar una memoria de cada circuito

*. Estudio de Averigrama para cada circuito.

*. Repasar los circuito digitales.

GENERADOR DE RELOJ



Funcionamiento: Es un circuito generador de reloj , basado , en un disparador Smihtt , y componentes fundamentales. Cuando alimentamos el circuito , el condensado que inicialmente se encuentra descargado ,

empieza a recibir carga , a través de la resistencia y potenciómetro , en ese instante , el disparador , entiende que hay 1 por lo que en la salida , la señal es , 1 , (Tensión de entrada) , a medida que va cargándose el condensador , hay un momento donde el disparador , interpreta un 0 , por lo que en la salida aparece un 0 , iniciándose la descarga del condensador , siendo este proceso continuado.

Ver las gráficas.

1.2 Vpp

Vc 0.5 Vcc

Vs

4.4 V

GENERADOR DE RELOJ , CON CRISTAL DE CUARZO

Funcionamiento : El circuito generados de reloj , con cristal de cuarzo , esta basado , en la pequeña energía que nos presta un cristal de cuarzo a Frecuencias muy altas , por lo tanto , en la salida , obtenemos una señal de reloj , no muy perfecta pero suficiente para ciertas aplicaciones , con el gran inconveniente , de las frecuencias a las que actúa dicha señal de reloj , son muy elevadas , aproximadamente 1MHz . Ambos condensadores que tenemos en extremos del cristal , son los ecargados de evitas derivaciones , pero OJO , hay

que tener cuidado con el valor que aplicamos ya que valores inadecuados , pueden provocar un fallo en el funcionamiento del circuito,

1.6Vpp

2,6 Vcc

Fr= 10 MHz

GENERADOR DE RAMPAS

Funcionamiento : Empezamos por aplicar un 1 lógico a la entrada , el cual , inicia la carga del condensador a través de la resistencia de 150K y esa carga exponencial muy alta , se ve reflejada en la salida 2 , donde vemos una rampa , dicha rampa es producida por la carga del condensador con el TAO de la resistencia muy alto . En la salida 1 observamos que mientras la carga de dicho condensador no supere el nivel 1 empleado en las entradas de la puerta Smicht , dicha salida representara un 1 a su salida , hasta el momento en que el condensador se cargue , cuando esto suceda , la puerta al ser inversora nos da una señal de nivel 0 a la salida de retardo , haciendo descargar al condensador rápidamente , este proceso se realiza continuamente.

Vi 5.1 V

4.2 V

VS2

5 V

VS1

DETECTOR DE FLANCOS ASCENDENTE

Funcionamiento : Primeramente , debemos introducir en la entrada una señal de reloj de una frecuencia normal . Mientras la señal de reloj se encuentra a 1 , en la puerta OR sumamos 0 + Nivel de carga del condensador , que viene determinado por TAO de la resistencia 150 , esa suma es de 1 mientras el Condensador se esta cargando , cuando el nivel de entrada es 0 , la suma sigue siendo 1 hasta que llega el momento del flanco ascendente , donde la carga del condensador es casi nula (NIVEL 0) y la entrada por la inversora también es nula , por lo tanto , en la salida nos refleja un impulso negativo que nos indica que ha llegado un flanco ascendente en la entrada .

Vi i

V1

V2

4 V

VS 5,2 V

DETECTOR DE FLANCOS DESCENDENTES

Funcionamiento : El funcionamiento es similar al circuito anterior .

Empezamos por Se introduce a la entrada una señal de reloj a frecuencia normal Cuando en la entrada tenemos 1 , una de las entrada de la OR es1 , mientras que la otra viene determinada por la inversión , y la carga del condensador , sea así , que con 1 , el condensador quede prácticamente a nivel 0 , por lo que la suma en la OR , es de 1 obteniendo en la salida 1 lógico , pero al llegar el flanco de bajada , empieza la carga del condensador en la cual hay un momento en que las dos entradas de la OR , tienen un 0 , por lo que en la salida se representa un pequeño impulso negativo que nos indica , la llegada de un flanco descendente en la entrada .

Vi

V1

V2 5,1 V

5.8 V

Vs

CONCLUSIONES

Las conclusiones obtenidas de estas prácticas, son de lo mas lógico , aprendiendo muchos circuito elementales como estos , podemos ir enlazando varios circuito para luego poder tener un circuito bastante mas complejo , por eso , estudiando varios circuito elementales , dentro de la lógica , podemos ser capaces de razonar el funcionamiento de todos ellos . (Como decía nos se quien ; Divide y Vencerás) Todos estos circuitos tan elementales , que nosotros no damos importancia , son parte fundamental de otros circuitos que dan mas miendo , como placas base , y demás tipo de placas de los ordenadores , . Yo pienso que como a nosotros se nos da la placa hecha , no basamos nuestro aprender en el funcionamiento de la placa en si , son que como,la electrónica de hoy en día , se basa en cambiar una placa por otra cuando esta falla , no nos preocupamos tanto por circuitos como estos , y es que están bien para adquirir conocimientos elementales . Espero que al final de este curso podamos ser capaces de razonar todos estos funcionamientos.

AVERIGRAMA

AVERIA	**SINTOMA**	**SOLUCIÓN**
En el generador de reloj el condensador esta desconexionado.	Siempre tendríamos a la salida un nivel alto de tensión.	Conectar correctamente el condensador.
En el generador de reloj el condensador esta perforado y es como si fuera un hilo.	Tensión de salida siempre es la máxima	Quitar el condensador y poner otro nuevo.
En el generador de rampas el condensador esta abierto.	Con lo que a la salida siempre tenemos nivel máximo de tensión.	Poner un condensador nuevo.
En el generador de rampas el 4093 tiene una de las patillas al aire.	En la salida siempre esta a nivel alto y nunca esta a nivel bajo.	Unir las dos patillas del integrado.
En el detector de flancos ascendentes	El impulso de aviso es muy grande,y no se divisa bien la llegada del flanco	El TAO del condensador y resistencia es muy elevado
En el detector de flancos descendentes	El impulso de aviso es muy grande,y no se divisa bien la llegada del flanco	El TAO del condensador y resistencia es muy elevado
En el generador de reloj por cuarzo , los condensadores son muy elevados	La señal de salida será nula , ya que deja pasar las altas frecuencias	Comprobar el valor de los condensadores y conexionar los adecuados

En cualquiera de los circuitos la señal de salida no es fiable	La señal de salida no es nada fiable y varia constantemente	Hemos de comprobar siempre los conexionados , asegurando su buena conexión y unión.
En cualquier circuito nos hemos equivocado de componentes.	Una variación en un componente puede provocar que la señal de salida sea falsa	Hemos de estar seguros de los componentes montados , (Mas vale medir y asegurar)

Circuitos eléctricos y electrónicos

Fundamentos y técnicas para su análisis

PEARSON

El saber de mis hijos
hará mi grandeza

Jorge Raúl Villaseñor Gómez

Circuitos eléctricos y electrónicos. Fundamentos y técnicas para su análisis

Circuitos eléctricos y electrónicos. Fundamentos y técnicas para su análisis

Jorge Raúl Villaseñor Gómez

Revisión técnica:
Dr. Dainet Berman Mendoza

Prólogo de:
Dra. Carmen Leonor Villarreal Lizárraga

Prentice Hall

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

VILLASEÑOR GÓMEZ, JORGE RAÚL

Circuitos eléctricos y electrónicos. Fundamentos y técnicas para su análisis

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2011

ISBN: 978-607-442-356-3
Área: Ingeniería

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 496

Todos los derechos reservados

Editores: Carlos Mario Ramírez Torres
carlosmario.ramirez@pearsoned.com
Marianna Lyubarets (Universidad de Sonora)
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

PRIMERA EDICIÓN, 2011

D.R. © 2011 por Universidad de Sonora
Blvd. Rosales y Encinas, Col. Centro
83000, Hermosillo, Sonora, México
www.uson.mx

D.R. © 2011 por Instituto Tecnológico de Hermosillo
Av. Tecnológico S/N, Col. Sahuaro
83170, Hermosillo, Sonora, México
www.ith.mx

D.R. © 2011 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5° Piso
Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

Prentice Hall es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito de los coeditores.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización de los coeditores o de sus representantes.

Este libro se publicó con el apoyo del Fondo para la Consolidación de las Universidades Públicas P/FPCU-2009-2 otorgado a la Universidad de Sonora.

ISBN 978-607-442-356-3
ISBN 978-607-7782-45-2 (UNISON)

Impreso en México. *Printed in Mexico*.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – 14131211

Prentice Hall
es una marca de

PEARSON

www.pearsoneducacion.net

ISBN 978-607-442-356-3

CONTENIDO

Dedicatoria. ix
Prólogo. xi
Prefacio. xiii

PRIMERA PARTE. Fundamentos de los circuitos eléctricos 1

CAPÍTULO 1. VARIABLES FUNDAMENTALES DE LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Introducción 5
1.1 Estudio de las cargas eléctricas desde Coulomb hasta Bohr 6
1.2 Conceptos básicos 11
1.3 Elementos de un circuito eléctrico 30
1.4 Circuitos eléctricos 35

CAPÍTULO 2. CIRCUITOS RESISTIVOS Y LEY DE OHM

Introducción 51
2.1 Resistencia y resistividad 51
2.2 Resistencia y temperatura 54
2.3 Tipos más comunes de resistores 57
2.4 Medición de resistencia 63
2.5 Ley de Ohm 64
2.6 Conductancia y conductividad 67
2.7 Potencia y energía eléctrica en los resistores 68
2.8 Arreglos de resistores en serie 69
2.9 Arreglos de resistores en paralelo 71
2.10 Cálculo, simulación y medición de diversos arreglos resistivos 72

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE CIRCUITOS RESISTIVOS

Introducción 83
3.1 Arreglos resistivos alimentados por fuentes de voltaje de cd 83
3.2 Ley de voltajes de Kirchhoff 87
3.3 Ley de corrientes de Kirchhoff 101
3.4 Divisor de voltaje 109
3.5 Divisor de corriente 115
3.6 Equivalencia entre fuentes de alimentación 119
3.7 Teoremas de Thévenin y de Norton 127

CAPÍTULO 4. INDUCTANCIA Y CAPACITANCIA

Introducción 141
4.1 Inductancia 141
4.2 Circuito *RL* simple 146
4.3 Capacitancia 153
4.4 Circuito *RC* simple 165
4.5 Función escalón unitario 168
4.6 Circuito *RL* excitado por una función escalón unitario 171
4.7 Circuito *RC* excitado por una función escalón unitario 177
4.8 Energía almacenada en un capacitor 180
4.9 Aplicaciones de los inductores y los capacitores 181

CAPÍTULO 5. SEÑALES ELÉCTRICAS EN LOS CIRCUITOS

Introducción 193
5.1 Señales periódicas 193
5.2 Valor instantáneo, medio y eficaz en las señales eléctricas 197
5.3 Generadores de señales 202
5.4 Medición de las señales eléctricas 203
5.5 Función de excitación senoidal 211
5.6 Respuesta de un circuito *RLC* a una excitación senoidal 215
5.7 Relaciones fasoriales para *R*, *C* y *L* 225
5.8 Diagramas fasoriales 227
5.9 Impedancia y admitancia 230

SEGUNDA PARTE. Electrónica analógica básica 239

CAPÍTULO 6. DIODOS SEMICONDUCTORES

Introducción 245
6.1 Materiales y la corriente eléctrica 245
6.2 Materiales semiconductores 250
6.3 Diodo semiconductor 254
6.4 Polarización del diodo 256
6.5 Características del diodo semiconductor 259
6.6 Modelos para el diodo 265
6.7 Análisis de circuitos con diodos 266
6.8 Diodo Zener 273
6.9 Otros tipos de diodos 277

CAPÍTULO 7. APLICACIÓN DE LOS DIODOS SEMICONDUCTORES

Introducción 285
7.1 Circuitos básicos con diodos semiconductores 285
7.2 Compuertas lógicas AND y OR con diodos 294
7.3 Rectificador de media onda 297
7.4 Rectificador de onda completa 301
7.5 Fuente de alimentación básica 306

CAPÍTULO 8. TRANSISTORES BIPOLARES DE UNIÓN

Introducción 321
8.1 Construcción de un transistor bipolar de unión 321
8.2 Operación de un transistor bipolar de unión 322
8.3 Configuración base común 325
8.4 El transistor como amplificador 328
8.5 Configuración emisor común 330
8.6 Polarización de un BJT 333
8.7 Circuitos de polarización 336

CAPÍTULO 9. AMPLIFICADORES OPERACIONALES

Introducción 373
9.1 Principios básicos de los amplificadores operacionales 374
9.2 Configuraciones básicas del amplificador operacional 381
9.3 Configuraciones basadas en los circuitos inversor y no inversor 384
9.4 Amplificador de más de una etapa 387

TERCERA PARTE. ELectrónica digital básica 391

CAPÍTULO 10. SISTEMAS NUMÉRICOS

Introducción 395
10.1 Sistemas numéricos 396
10.2 Código BCD 413
10.3 Operaciones básicas en aritmética binaria 414
10.4 Formas de notación binaria 417

CAPÍTULO 11. ÁLGEBRA BOOLEANA Y COMPUERTAS LÓGICAS

Introducción 427
11.1 Símbolos y funciones lógicas 427
11.2 Operaciones con compuertas lógicas 431
11.3 Álgebra booleana y los circuitos lógicos 433
11.4 Simplificación de expresiones booleanas 439
11.5 Mapas de Karnaugh 443
11.6 Circuitos lógicos con compuertas NAND 451
11.7 Circuitos lógicos con compuertas NOR 452

CAPÍTULO 12. CIRCUITOS LÓGICOS COMBINACIONALES Y SECUENCIALES

Introducción 461
12.1 Circuitos lógicos combinacionales 461
12.2 Circuitos lógicos secuenciales 467
12.3 Flip-Flop de compuertas NAND 468
12.4 Flip-Flop de compuertas NOR 470
12.5 Pulsos digitales y los Flip-Flop 472
12.6 Flip-Flop controlado por reloj 473
12.7 Flip-Flop T 474
12.8 Flip-Flop-JK 475
12.9 Flip-Flop D 476

DEDICATORIA

A Lety

Compañera amorosa e incansable, quien siempre me apoya y motiva para luchar en la vida. Por compartir todos los momentos, por estar conmigo en las pruebas de desaliento y desesperanza que en la vida hemos superado juntos.

A Jorge Raúl, Georgina Andrea y Martha Gabriela

Mis tres grandes orgullos e inmenso motivo de superación: mis hijos. A ellos dedico mi trabajo diario con amor.

A Juan Carlos

Quien ahora es parte del *Clan VIRO* y construye un nuevo proyecto junto a Ita.

A la memoria de mis padres

Andreita y Manuel, su vida y obra han sido el ejemplo que me permitió trazar el camino por el que he cursado en la vida. Con amor y agradecimiento por todo lo que entregaron para formar una familia de la que siempre me he sentido orgulloso.

A la memoria de mis queridos hermanos

Héctor Manuel, Luis Humberto y Arturo Javier. Su sabiduría era clara, sus enseñanzas continúan plasmadas en mi ser y en mi vida.

PRÓLOGO

Circuitos eléctricos y electrónicos
Fundamentos y técnicas para su análisis.
Autor: Profr. Jorge Raúl Villaseñor Gómez

Al hacer una breve revisión de nuestro entorno, resulta difícil encontrar en la vida cotidiana alguna persona que no haya escuchado algo relacionado con la electrónica, que no conozca algunas de las aplicaciones de la electrónica que facilitan el desarrollo de las actividades humanas, o que no haya utilizado algún aparato que no incluya elementos que operan bajo los principios de esta interesante rama de la ingeniería y de la física aplicada.

El campo de estudio que nos ocupa incluye el diseño y aplicación de dispositivos (llamados por lo general circuitos electrónicos) que a partir del flujo de electrones generan, transmiten, reciben y almacenan información, entre otros. Esta información va desde la voz humana o la música en un receptor de radio, en una imagen de televisión, o en números u otros datos que se procesan en una computadora o en un sistema de control automático.

Las funciones de los circuitos electrónicos para el procesamiento de esta información son diversas. Incluyen la amplificación de señales débiles, hasta un nivel que permita su utilización, hasta la generación de ondas de radio, la extracción de información, el control y las operaciones lógicas como los procesos electrónicos que tienen lugar en las computadoras.

Podemos ubicar el inicio de esta era electrónica y de su rápida evolución a partir de la aparición de los tubos de vacío a comienzos del siglo xx. Estos dispositivos posibilitaron la manipulación de señales, que no podía realizarse en los antiguos circuitos telegráficos y telefónicos, ni con los primeros transmisores que utilizaban chispas de alta tensión para generar ondas de radio. Las señales de radio y de sonidos débiles pudieron amplificarse y, además, las señales de sonido podían superponerse a las ondas de radio.

El desarrollo de una amplia variedad de tubos diseñados para funciones especializadas, posibilitó el rápido avance de la tecnología de comunicación radial antes de la Segunda Guerra Mundial y el desarrollo de las primeras computadoras, durante la guerra y poco después de ella. Hoy día, el transistor, y los semiconductores inventados en 1948 han reemplazado casi completamente al tubo de vacío en la mayoría de sus aplicaciones, no obstante este último se sigue usando en ciertas circunstancias.

Al incorporar un conjunto de materiales semiconductores, el transistor permite las mismas funciones que el tubo de vacío, pero con un costo y peso más bajos, además de una considerable reducción en el consumo de energía y un aumento considerable en la contabilidad de operación. Los progresos

subsiguientes en la tecnología de semiconductores, atribuibles en parte a la intensidad de las investigaciones asociadas con la iniciativa de exploración del espacio, llevó al desarrollo, en la década de los setenta, del circuito integrado y, por tanto, de la electrónica lógica. Estos dispositivos pueden contener centenares de miles de transistores en un pequeño trozo de material, lo que permite la construcción de circuitos electrónicos complejos para los microordenadores o las microcomputadoras, los equipos de sonido y video, y los satélites de comunicaciones.

Los estudios han mostrado que la industria electrónica genera y estimula en la actualidad más de 50% de la producción mundial y del movimiento de las bolsas de valores del mundo y contribuye con más de 35% del incremento anual de la demanda de empleos. Y la rapidez con que estas tendencias se incrementan, es vertiginosa.

En cuanto a la electrónica, como campo de estudio y de formación de ingenieros, representa, ante todo, una serie de conocimientos necesarios en la mayor parte de las ingenierías modernas. Las áreas de sistemas computacionales, robótica, mecatrónica, entre otras, exigen conocer los principios de operación de los circuitos electrónicos. También ingenierías más tradicionales como la eléctrica y la mecánica requieren su comprensión porque la mayor parte de los dispositivos de control asociados a la generación, transmisión y distribución de la energía eléctrica y de las maquinarias de todo tipo operan gracias a la electrónica.

Es por ello que al revisar planes de estudio y programas de ingeniería, bajo diferentes nombres, aparecen las materias dedicadas a la introducción en los conocimientos básicos para comprender la operación y las aplicaciones de los dispositivos electrónicos. Es aquí donde reside la importancia de este libro escrito por el profesor Jorge Raúl Villaseñor Gómez.

El libro, en su totalidad, refleja su vasta experiencia en la enseñanza de la electrónica básica en diferentes carreras de ingeniería, así como su capacidad para observar la dinámica que requieren los estudiantes para aprender, también le ha permitido organizar y detallar los temas básicos para comprender y desarrollar competencias asociadas a la electrónica desde las otras ingenierías, permitiendo complementar y mejorar la formación de los nuevos ingenieros en diversas disciplinas.

Esta obra, la cual desarrolla minuciosamente las temáticas que incluye, contiene además una serie de ejercicios resueltos (y para resolver) que son herramientas de construcción del aprendizaje. De ahí que sea altamente recomendable para materias básicas de electrónica. Además de que, en un esfuerzo por ampliar la cultura de los estudiantes, incluye figuras con datos biográficos y las aportaciones de los científicos que generaron el conocimiento necesario que sirvió de base al desarrollo de los dispositivos electrónicos. Es un excelente apoyo para quienes, como el autor, nos encontramos inmersos en la formación de ingenieros.

Dra. Carmen Leonor Villarreal Lizárraga

Profesora de las carreras de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Sistemas Computacionales y de la Maestría en Sistemas Industriales. Adscrita a la División de Estudios de Posgrado e Investigación del Instituto Tecnológico de Hermosillo.

PREFACIO

"Circuitos Eléctricos y Electrónicos. Fundamentos y técnicas para su análisis" es un libro cuyo contenido está adecuado para cubrir los requerimientos básicos de los estudiantes de ingeniería que asisten al primer curso relacionado con esta área. En algunos casos el libro puede utilizarse como texto, y en otros servirá como apoyo para la realización de diversos ejercicios, depende de cada programa en particular.

Así en este material se incluyen los conceptos, las leyes y las teorías fundamentales de la electricidad y la electrónica, mismos que se analizan y aplican con un enfoque didáctico que facilita al estudiante su comprensión y aplicación por parte del estudiante. La obra propone técnicas y métodos sencillos para el aprendizaje y desarrollo de circuitos, lo que resulta también un apoyo para el trabajo en las actividades del laboratorio de la asignatura.

El diseño de su estructura lleva una secuencia en la exposición de los temas, que inicia con el estudio de las teorías que sustentan a los conceptos básicos como carga eléctrica y potencial eléctrico, para seguir con el estudio de las variables que intervienen en los fenómenos eléctricos que se presentan en los circuitos y luego da paso a su interpretación y aplicación en los sistemas electrónicos, tanto analógicos como digitales.

Los contenidos están organizados con tres enfoques:

1. **Conceptual.** Para coadyuvar en el desarrollo de la capacidad del estudiante para la obtención de información y el procesamiento intelectual.
2. **Procedimental.** Para propiciar en el estudiante el desarrollo de capacidades diversas y estrategias para la solución de problemas.
3. **Actitudinal.** Cuyo propósito es estimular en el estudiante el desarrollo de su capacidad para saber valorar, apreciar y actuar positivamente como integrante de una sociedad.

A partir de esta estructura temática, conforme se revisan los contenidos, se busca estimular en los estudiantes el desarrollo de competencias en tres dimensiones:

- **Dimensión instrumental.** En la que se propicia el desarrollo de competencias relacionadas con la comprensión, organización

y manejo de ideas, métodos, destrezas para la comunicación y para el análisis de información.

- **Dimensión interpersonal.** En esta dimensión se estimula el desarrollo de competencias que tienden a facilitar los procesos de comunicación con otras personas, de interacción social, de cooperación y de colaboración.
- **Dimensión sistémica.** En la cual, se desarrollan competencias que implican una combinación de conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales que permiten al estudiante ver la relación funcional entre las partes de un todo, integrando competencias de las dos primeras dimensiones.

El libro expone ejemplos para los temas, y al final de cada capítulo se proponen ejercicios para la comprobación del aprendizaje, con la sugerencia de verificar los resultados haciendo uso de la autoevaluación personal y la evaluación por grupos de trabajo.

La obra se divide en tres partes:

PRIMERA PARTE. Fundamentos de los circuitos eléctricos.

Comprende el inicio y los contenidos básicos que serán el soporte teórico de temas posteriores, y tiene como propósito dar a conocer al estudiante las variables fundamentales que determinan el funcionamiento de los circuitos eléctricos, la relación funcional entre ellas, así como su correcta interpretación y aplicación en el estudio de sistemas eléctricos y electrónicos. Se analizan las leyes fundamentales que rigen el funcionamiento de los circuitos eléctricos y su aplicación para el análisis y diseño de circuitos básicos.

Esta parte contiene cinco capítulos: 1. Variables fundamentales de los circuitos eléctricos; 2. Circuitos resistivos y ley de Ohm; 3. Análisis de circuitos resistivos; 4. Inductancia y capacitancia; y 5. Señales eléctricas en los circuitos.

SEGUNDA PARTE. Electrónica analógica básica.

Explica los principios y las teorías de la electrónica que los estudiantes de ingeniería deben conocer para su aplicación en cursos y actividades posteriores, tanto en el contexto escolar como en el profesional.

Consta de cuatro capítulos que incluyen el estudio de los fundamentos de los materiales y dispositivos semiconductores con aplicación en circuitos básicos: 6. Diodos semiconductores; 7. Aplicación de los diodos semiconductores; 8. Transistores bipolares de unión; y 9. Amplificadores operacionales.

TERCERA PARTE. Electrónica digital básica.

Tiene como propósito analizar los sistemas numéricos básicos utilizados para el procesamiento de datos en los sistemas computacionales y dar a conocer los fundamentos y principios del álgebra booleana y

su aplicación en los circuitos lógicos combinacionales y secuenciales, también básicos.

Incluye tres capítulos: 10. Sistemas numéricos; 11. Álgebra booleana y compuertas lógicas; y 12. Circuitos lógicos combinacionales y secuenciales.

Para analizar se presentan algunas referencias bibliográficas y fuentes de información (libros, publicaciones, páginas de Internet, y otros apoyos tecnológicos de información) que permiten abundar en los temas contemplados en el programa de estudio.

La revisión del libro respecto a su estructura temática, su desarrollo, y la retroalimentación que de ésta se pueda obtener, por parte de profesores y estudiantes, será una gran aportación para el enriquecimiento del mismo, resultando en beneficio de las futuras generaciones de estudiantes de las diversas áreas de la ingeniería.

Agradecimiento

Mi agradecimiento sincero a los estudiantes de las diferentes generaciones con los que he tenido la fortuna de convivir al paso de los años, de quienes he aprendido formas diversas que me han permitido salvar la brecha generacional para mejorar la comunicación entre estudiantes y profesor.

Asimismo, a mis compañeros docentes en las diferentes instituciones educativas en las que he tenido el privilegio de prestar mis servicios, por sus comentarios y, en algunos casos también consejos.

Mi especial agradecimiento a la Dra. Carmen Leonor Villarreal Lizárraga, docente investigadora de la División de Estudios de Postgrado e Investigación del Instituto Tecnológico de Hermosillo, quien tuvo a bien escribir el prólogo de este libro. De la misma manera al M.C. Jesús Manuel Tarín Fontes, docente y jefe del laboratorio de electrónica del mismo, por la revisión que hizo a ciertos temas del libro, y por su disposición para dar apoyo en el trabajo experimental a los estudiantes. Y desde luego, mi agradecimiento a la L.R.C. Beatriz García Escalante, por su apoyo y perseverancia para la edición de este texto.

Jorge Raúl Villaseñor Gómez.
joravigo@ith.mx
Junio de 2010.

Primera Parte

Fundamentos de los circuitos eléctricos

Capítulo 1 Variables fundamentales de los circuitos eléctricos

Capítulo 2 Circuitos resistivos y ley de Ohm

Capítulo 3 Análisis de circuitos resistivos

Capítulo 4 Inductancia y capacitancia

Capítulo 5 Señales eléctricas en los circuitos

Capítulo 1

Variables fundamentales de los circuitos eléctricos

	Estructura	
Temas		
	Conceptuales	
1.1 Estudio de las cargas eléctricas, desde Coulomb hasta Bohr	• Conceptos relacionados con el descubrimiento de las cargas eléctricas, su naturaleza y aprovechamiento.	
1.2 Conceptos básicos 1.2.1 Carga eléctrica. 1.2.2 Electroscopio. 1.2.3 Campo eléctrico. 1.2.4 Potencial y diferencia de potencial eléctrico. 1.2.5 Fuentes de alimentación. 1.2.6 Intensidad de corriente eléctrica. 1.2.7 Potencia eléctrica y energía.	• Información relacionada con los temas enlistados, mismos que están definidos en el ámbito de la Electrostática y principios de la electrodinámica.	
1.3 Elementos de un circuito eléctrico 1.3.1 Elementos activos. 1.3.2 Elementos pasivos.	• Conceptos relacionados con la generación, cuantificación y transferencia de energía eléctrica en circuitos simples.	
1.4 Circuitos eléctricos 1.4.1 Redes eléctricas. 1.4.2 Representación. 1.4.3 Simbología. 1.4.4 Simulación. 1.4.5 Importancia de los modelos.	• Conceptos relacionados con la representación, modelado y simulación en los circuitos eléctricos.	
Actividades para la evaluación de competencias		

temática

	CONTENIDOS	
	Procedimentales	**Actitudinales**
	• Descripción de procedimientos básicos para la electrización en los cuerpos y determinación de sus características cuantitativas y cualitativas.	• Elementos para apreciar la importancia de destacados científicos que han dedicado gran parte de su vida al desarrollo de la ciencia en la vertiente de la física.
	• Expresiones técnicas básicas como parte del lenguaje científico utilizado en el área de la electricidad y electrónica. • Procedimiento metodológico para el planteamiento y desarrollo de problemas relacionados con los temas que se indican.	• Argumentos científicos para propiciar el desarrollo de la capacidad para apreciar la diversidad de opiniones en el contexto científico. • Oportunidades para el desarrollo de un espíritu de autonomía y flexibilidad frente a la realidad, mediante el conocimiento de fenómenos físicos esenciales que están presentes en la vida cotidiana.
	• Técnicas para la representación de elementos físicos reales mediante el uso de modelos matemáticos. • Descripción de procesos para el análisis dimensional en la medición de magnitudes en los elementos de un circuito.	• Elementos que propician el desarrollo de una cultura de evaluación y autoevaluación en el trabajo. • Actividades que fomentan el interés por desarrollar actividades en equipos de trabajo.
	• Estrategias para la representación y simulación de elementos y redes eléctricas. • Estrategias y técnicas para la construcción de circuitos eléctricos sencillos.	• Actividades que permiten valorar el esfuerzo y el trabajo individual mediante cálculos de exactitud y precisión en el planteamiento, desarrollo y resolución de problemas relacionados con la temática correspondiente.

Orientación general

Desarrollar en el estudiante la capacidad para identificar las variables fundamentales que determinan el funcionamiento de los circuitos eléctricos, la relación funcional entre ellas y su correcta interpretación para la aplicación en el estudio y solución de problemas relacionados con dichas variables.

Competencias

Dimensión Instrumental [1]	Dimensión Sistémica [2]	Dimensión Interpersonal [3]
Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para comprender:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:
1.1 El concepto de *carga eléctrica* a partir de los estudios realizados por diferentes científicos.	2.1 Explicar desde el punto de vista de la teoría atómica los experimentos relacionados con el conocimiento de la carga eléctrica.	3.1 Valorar los trabajos realizados por generaciones de científicos y su aportación al desarrollo de la ciencia y la tecnología.
1.2 La ley de Coulomb y su importancia para el estudio del comportamiento de las cargas eléctricas.	2.2 Aplicar las técnicas básicas de laboratorio para la detección de cargas eléctricas, su registro y evaluación.	3.2 Interactuar con otros estudiantes y con profesores para el logro de objetivos comunes.
1.3 Los conceptos básicos derivados de los fenómenos que producen las cargas eléctricas, así como las técnicas fundamentales para su cuantificación en forma experimental.	2.3 Aplicar la ley de Coulomb en la solución de problemas con cargas eléctricas.	3.3 Valorar la cultura de la exactitud y oportunidad.
1.4 El concepto de *elemento de un circuito* y su relación con un circuito físico.	2.4 Estructurar con sus propias palabras el concepto de *fuente de alimentación* y su importancia en los circuitos eléctricos.	3.4 Valorar la importancia de un uso correcto del lenguaje simbólico en el estudio de los circuitos eléctricos, en particular, y en la ingeniería, en general.
1.5 La simbología técnica que se utiliza en la representación de los circuitos eléctricos.	2.5 Aplicar las técnicas básicas de laboratorio, para la detección de cargas eléctricas, su registro y evaluación.	3.5 Valorar la importancia del proceso de simulación en la solución de problemas.
1.6 El concepto *simulación* para el estudio de los circuitos, en particular, y para la ingeniería, en general.	2.6 Aplicar los conceptos fundamentales de los circuitos eléctricos para su análisis.	
	2.7 Explicar con sus propias palabras la importancia de las técnicas de representación y los modelos, en el estudio de los circuitos.	

Introducción

COMPETENCIA:
Propiciar el desarrollo de la capacidad para valorar los trabajos realizados por diversas generaciones de científicos, así como reconocer su aportación al desarrollo de la ciencia y la tecnología. [3]

Hay un sencillo experimento que todos hemos realizado alguna vez, consiste en frotar el cabello con un peine, o quizás un bolígrafo, y a continuación pasarlo cerca de pequeños trocitos de papel a los cuales atrae, mismos que se adhieren con facilidad. De manera semejante, hace más de 2 600 años, el filósofo griego Tales de Mileto (600 a.C.) descubrió que al frotar una varilla de ámbar con un paño, ésta atraía pequeños objetos como cabellos, plumas de aves o pedacitos de papel. A partir de esta sencilla experiencia surgió el concepto de *electricidad,* término cuyas raíces se encuentran en el vocablo griego *elektron*, que significa *ámbar*.

Cuando en este experimento se utiliza una varilla de ámbar, se dice que ésta se ha *electrizado* o se ha *cargado de electricidad.* Pero cuando se intenta con otros objetos nos damos cuenta que existen materiales que no poseen la propiedad de cargarse de *electricidad*, y si lo hacen, se comportan de distintas formas.

El siguiente experimento nos permite explicar esas diferencias:

Con una bolita de corcho sintético (o médula de saúco) sujeta por un hilo se construye un péndulo, cuyo extremo libre se sujeta a un punto fijo. Si a la bolita se le acerca una varilla de ámbar previamente frotada con una tela o fibra, la bolita de saúco será atraída hacia la varilla hasta que entran en contacto. Pero enseguida de que la bolita ha tocado el ámbar, es repelida por éste. A este instrumento simple se le llama *péndulo eléctrico*, y la explicación de lo sucedido es la siguiente:

Al inicio la bolita estaba *descargada* y la varilla *cargada* (adquirió carga eléctrica por frotamiento); la varilla atrae la bolita (por tener carga eléctrica); cuando se tocan una parte de la electricidad del ámbar pasa a la bolita, "cargándola" eléctricamente. Como resultado los dos cuerpos tienen carga eléctrica y es por ello que se repelen. La bolita del péndulo ha quedado *cargada*.

Si a continuación le aproximas a la bolita otra varilla, pero de vidrio, también *cargada por frotamiento*, observarás que la bolita del péndulo será atraída hacia la varilla de vidrio.

De esta experiencia se deduce lo siguiente:

1. Existen dos tipos de electricidad: la que adquiere el vidrio y la que adquiere el ámbar.
2. Cuerpos con carga eléctrica del mismo tipo se repelen, y los cuerpos con carga eléctrica de distinto tipo se atraen.

Para distinguir a estos dos tipos de electricidad o carga eléctrica, se les dio el nombre de *positiva* (+) a uno y *negativa* (−) al otro.

¿Cuál es la explicación o el fundamento del comportamiento de la esferita de corcho y las varillas en este experimento? Se trata de un fenómeno eléctrico, ya que su fundamento radica en las cargas eléctricas adquiridas por los cuerpos, y dichos fenómenos encuentran su explicación en la *teoría atómica*, de la cual explicamos, a continuación, los aspectos básicos, muy importantes en el estudio de los circuitos eléctricos.

1.1 Estudio de las cargas eléctricas desde Coulomb hasta Bohr

COMPETENCIA:
Comprender el concepto de *carga eléctrica* a través de los estudios realizados por diferentes científicos. [1]

Iniciemos el estudio de las cargas eléctricas con un breve recorrido por los experimentos que fundamentan la teoría atómica, a partir de la cual los científicos explican variedad de fenómenos eléctricos y electrónicos, y cuyo conocimiento y aplicación han permitido encontrar solución a un sinnúmero de problemas en la ciencia y la tecnología, en particular en la ingeniería electrónica.

Como ya se mencionó, desde hace varios siglos antes de nuestra era, se ha sabido que en la naturaleza existen dos tipos de cargas eléctricas, a una se le llama *positiva* y a la otra *negativa*. Pero no fue sino hasta el año 1777 de nuestra era cuando Charles de Coulomb[1] pudo medir, con una balanza de torsión que él mismo diseñó y construyó, la fuerza de atracción magnética y eléctrica entre cargas. Con este invento Coulomb estableció el principio que ahora se conoce como *ley de Coulomb*, que rige la interacción entre las cargas eléctricas. Esta ley establece que si se consideran dos cargas eléctricas, a las que llamemos Q_1 y Q_2, existe una fuerza entre ellas que será de repulsión, cuando las cargas son del mismo signo, y será de atracción cuando Q_1 y Q_2 son de signos contrarios; y que su magnitud es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. La expresión matemática de esta ley es la ecuación 1.1.

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{d^2} \qquad \text{(ecuación 1.1)}$$

Donde:

F: fuerza ejercida entre cargas. Es la fuerza de atracción que se obtiene cuando las cargas tienen signos opuestos, o de repulsión cuando las cargas tienen el mismo signo. La unidad de medida es el *newton*.
Q_1: magnitud de la primera de las cargas en estudio. La unidad de medida de la carga es el *coulomb*.
Q_2: magnitud de la segunda de las cargas en estudio, su unidad de medida es el *coulomb*.

COMPETENCIAS:
- Comprender la ley de Coulomb y su importancia para el estudio del comportamiento de las cargas eléctricas. [1]
- Desarrollar la capacidad para explicar los experimentos relacionados con el conocimiento de la carga eléctrica, desde el punto de vista de la teoría atómica. [2]

k: *constante de proporcionalidad* $= 9\times10^{9}\ \dfrac{\text{newton}\cdot\text{metro}^2}{\text{coulomb}^2} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

d: distancia que existe entre las cargas. La unidad de medida es el *metro* en el sistema MKS (en el sistema internacional de unidades)

ε_0: *permitividad en el vacío* $= 8.854\times10^{-12}\ \dfrac{\text{coulomb}^2}{\text{newton}\cdot\text{metro}^2}$

[1] Coulomb, Charles de (1736-1806), físico francés, pionero en la teoría eléctrica. Nació en Angulema, Francia; trabajó como ingeniero militar al servicio de su país en las Indias Occidentales (actuales Antillas), pero se retiró a Blois (Francia) durante la Revolución Francesa para continuar con sus investigaciones en magnetismo, rozamiento y electricidad. En reconocimiento a su trabajo científico, a la unidad de carga eléctrica se le denominó "coulomb" (tabla 1.1).

Para cuantificar a las cargas eléctricas es necesario definir las unidades en que se miden sus magnitudes. Con este propósito los científicos han propuesto dos tipos de unidades: la unidad natural y la unidad práctica.

La unidad natural de carga eléctrica es el *electrón* (*e*), que es la menor cantidad de carga eléctrica que existe. Sin embargo, como esta unidad es extremadamente pequeña para su detección y aplicaciones prácticas, y para evitar el tener que hablar de cargas del orden de billones o trillones de unidades de carga, se ha definido en el Sistema Internacional de Unidades como unidad práctica al *coulomb* (*coul*[2]).

Un *coulomb* es la cantidad de carga eléctrica que a la distancia de 1 metro se ejerce sobre otra cantidad de carga igual, la fuerza es 9×10^9 newtons[3].

De esta definición resulta que:

$$1 \text{ coulomb (coul)} = 6.23 \times 10^{18} \text{ electrones } (e)$$

Puesto que Charles Coulomb desconocía la existencia de partículas subatómicas, sus estudios se enfocaron siempre a "cargas puntuales". Fue hasta 1897 cuando el físico inglés Joseph John Thompson descubrió la existencia de los electrones en el átomo; entonces propuso un modelo atómico que consistía en una esfera, de unos 2×10^{-8} cm de diámetro, con carga positiva, dentro de la cual gravitaban los electrones, con carga negativa, como sucede con las pasas en un pastel. De ahí el nombre que a ese modelo se le da en algunas ocasiones: el budín de Thompson, figura 1.1.

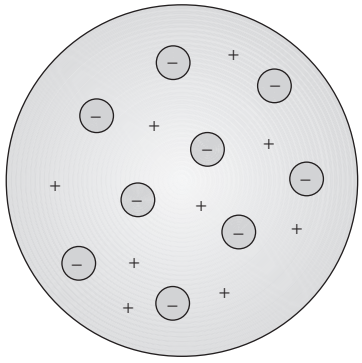


Figura 1.1 Representación del modelo atómico de Thompson. Él lo imaginaba como una esfera con carga positiva, en cuyo interior se depositaban los electrones, con carga negativa, como lo hacen las pasas en el interior de un budín o pastel.

Los experimentos de Rutherford

Alrededor del año 1900, los científicos pensaban que los átomos eran pequeñísimas esferas permeables. En 1909 Rutherford[4]al supervisar el trabajo que realizaban dos de sus discípulos, Geiger[5] y Marsden[6], examinó la validez de esta teoría en su ahora famoso experimento de la lámina de oro.

El experimento es realmente simple: una fuente radiactiva disparaba un chorro de partículas alfa hacia una lámina de oro muy delgada (las partículas alfa tienen una masa muy pequeña en comparación con la masa de los átomos de oro). Alrededor de la hoja de oro había una pantalla cubierta con sulfuro de zinc, de modo que las partículas alfa, al chocar contra la pantalla, dejaban manchas microscópicas en el sulfuro de zinc como lo muestra la figura 1.2.

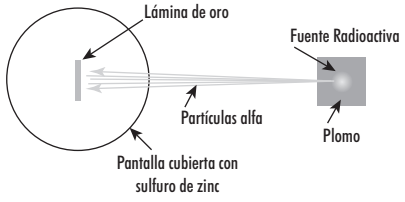


Figura 1.2 Esquema del experimento de Rutherford para comprobar la forma esférica de los átomos y su naturaleza neutra y permeable.

[2] Algunos textos utilizan la abreviatura "C" para el coulomb.

[3] Recordar que 1 kg fuerza es igual a 9.8 Newtons.

[4] Rutherford of Nelson, Lord Ernest (1871-1937), físico británico, premio Nobel por su trabajo en física nuclear y por su teoría de la estructura del átomo.

[5] Geiger, Hans (1882-1945), pionero alemán en física nuclear e inventor del contador Geiger para la detección de la radiactividad. Desde 1906 hasta 1912 trabajó con Ernest Rutherford en Manchester. En 1908 inventó la primera versión de su detector para el recuento de partículas alfa.

[6] Gregor Marsden (1890-1956) junto con Geiger centró sus investigaciones en las características de la radiactividad, diseñando su famosa experiencia de bombardear láminas delgadas de distintas sustancias utilizando como proyectiles las partículas alfa.

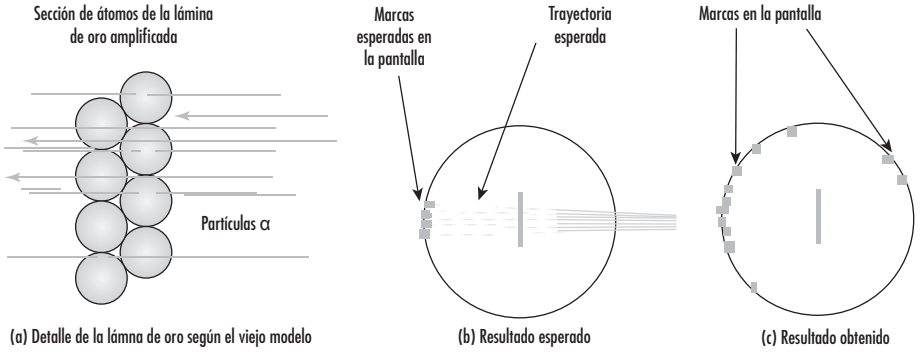


Figura 1.3 Resultado del experimento de Rutherford.

a) Detalle de la lámina de oro según el viejo modelo atómico.
b) Lo que se esperaba del experimento.
c) Las marcas dejadas en la pantalla indicaron que las partículas alfa habían chocado con algún cuerpo en el interior de los átomos de la lámina de oro.

El objetivo de este experimento era justificar la teoría según la cual los átomos son bolas neutras permeables. Se esperaba que las partículas alfa, cargadas y de alta energía, no tuvieran problemas para atravesar unos pocos átomos.

Así que las partículas alfa deberían continuar su trayectoria en línea recta, a través de la lámina de oro, y dejar una pequeña región de la pantalla posterior, cubierta de puntos, figura 1.2.

De hecho, la pantalla mostró que la mayoría de los impactos se produjeron cerca del centro; sin embargo, para sorpresa de los observadores, aparecieron unos pocos puntos dispersados cerca del frente de la pantalla, como muestra la figura 1.3.

¿Cuál fue el significado de este sorprendente resultado?

El razonamiento de Rutherford[7] fue que la mayoría de las partículas alfa habían pasado fácilmente a través de las partes exteriores de los átomos, en tanto que unas pocas partículas habían rebotado contra *un objeto en el interior del átomo*, denso, pequeño y con carga eléctrica positiva (del mismo signo que la carga de las partículas alfa), figura 1.4.

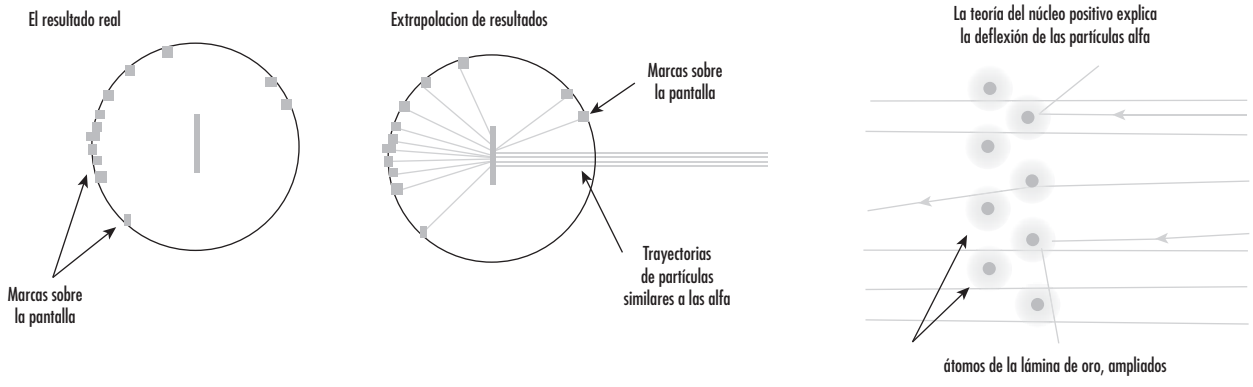


Figura 1.4. Explicación del resultado obtenido en el experimento de Rutherford. ***a***) El resultado real fue diferente al esperado: las partículas alfa se habían desviado de su trayectoria original. ***b***) El experimento se replicó con otras partículas, similares a las alfa. ***c***) Se confirma la hipótesis de que en el interior de los átomos existen partículas subatómicas con masa y también con carga eléctrica.

[7] Rutherford of Nelson, Lord Ernest (1871-1937). Fue uno de los primeros y más importantes investigadores en física nuclear. Rutherford identificó los tres componentes principales de la radiación y los denominó rayos alfa, beta y gamma. También demostró que las partículas alfa son núcleos de helio. Su estudio de la radiación le llevó a formular una teoría de la estructura atómica que fue la primera en describir el átomo como un núcleo denso alrededor del cual giran los electrones.

A pesar de haber tenido que descartar su hipótesis inicial acerca de que los átomos eran *bolas permeables*, este experimento le permitió plantear la nueva hipótesis de que los átomos tienen *núcleo*. Este nuevo modelo explicó los resultados de sus experimentos y fue la base para el desarrollo de la moderna teoría atómica.

Las mismas técnicas experimentales que usó Rutherford, figura 1.5, para llevar a cabo sus clásicos experimentos, mediante los que exploró la estructura atómica, aún son usadas hoy en día, empleando un haz de partículas atómicas con masa y con carga eléctrica (las partículas alfa), un blanco (los átomos de las láminas de oro) y un detector (la pantalla de sulfuro de zinc).



Figura 1.5 Rutherford de Nelson, lord Ernest (1871-1937).

Nadie puede *ver* realmente a los átomos o las partículas subatómicas, porque son demasiado pequeños. Sin embargo, los físicos, como lo hizo Rutherford, pueden bombardear objetos pequeños como átomos, con haces de partículas, y registrar lo que les sucede a estos haces por medio de un detector. A partir de estos conocimientos los físicos determinan la naturaleza de las partículas y de sus interacciones.

El átomo de Bohr

Se sabe que la materia está formada por moléculas y éstas, a su vez, por átomos, el átomo es, por tanto, la parte más pequeña de la materia. Pero, surge la pregunta, ¿de qué está constituido el átomo?

A partir de los estudios de Rutherford siguieron otros, también con importantes aportaciones, entre los que se cuentan los de Niels Bohr[8], quien mediante estudios matemáticos y experimentales concluyó un modelo atómico, a partir del cual se obtiene la siguiente explicación:

Existen tres tipos de partículas subatómicas a las que se les ha dado los nombres de *electrón*, *protón* y *neutrón*.

El **electrón** es una partícula con una masa muy inferior a la masa total de cualquier átomo; en estado de "reposo" posee una magnitud de 9.109×10^{-31}kg; y tiene una carga eléctrica negativa como se muestra en la tabla 1.1. La carga del electrón es la unidad básica de electricidad.

El **protón,** partícula nuclear con carga positiva igual en magnitud a la carga negativa del electrón; junto con el neutrón está presente en todos los núcleos atómicos. Al protón y al neutrón se les denomina también nucleones. El átomo más simple en la naturaleza es el de hidrógeno, cuyo núcleo está formado por un único protón. La masa de un protón es de 1.6726×10^{-27}kg, aproximadamente 1.836 veces la del electrón. Por tanto, la masa de un átomo está concentrada casi exclusivamente en su núcleo.

[8] Bohr, Niels ofrece a la ciencia la teoría de la estructura atómica, Premio Nobel de Física en 1922. La investigación se desarrolló con base en el modelo nuclear del átomo de Rutherford, en el cual el átomo se ve como un núcleo compacto rodeado por un enjambre de electrones más ligeros. El modelo de átomo de Bohr utilizó la teoría cuántica y la constante de Planck. Este modelo establece que un átomo emite radiación electromagnética sólo cuando un electrón del átomo salta de un nivel cuántico a otro. Este modelo contribuyó enormemente al desarrollo de la física atómica teórica.

El **neutrón**, partícula fundamental en la composición de la materia, pero sin carga eléctrica. La masa de un neutrón es de 1.675×10^{-27} kg, aproximadamente 0.125% mayor que la del protón. La existencia del neutrón se afirmó en el año 1920 mediante cálculos y observaciones de los hechos por el físico británico Ernest Rutherford y por científicos australianos y estadounidenses, pero la verificación experimental de su existencia resultó difícil debido a que la carga eléctrica del neutrón es nula y la mayoría de los detectores de partículas sólo registran partículas con carga eléctrica.



Figura 1.6 Niels Bohr (1885-1962). Físico danés, galardonado con el premio Nobel hizo aportaciones fundamentales en el campo de la física nuclear y en el de la estructura atómica.

Para explicar la estructura del átomo, Bohr (figura 1.6) desarrolló en 1913 una hipótesis conocida como *teoría atómica de Bohr*, en la cual supuso que los electrones están dispuestos en capas bien definidas, también llamadas niveles cuánticos, ubicadas a una distancia considerable del núcleo. La disposición de los electrones se denomina *configuración electrónica,* figura 1.7.

La *corteza* está formada por capas, en las cuales giran los electrones en órbitas circulares alrededor del núcleo. En cualquier átomo la cantidad de electrones determina al número atómico. Los electrones se ubican en capas que se superponen en forma regular, con un máximo de siete capas. En cada una de ellas hay uno o varios electrones. El número total de electrones de la corteza es igual al número de protones del núcleo, de manera que la carga eléctrica total de un átomo es nula.

Cantidad de cargas negativas = cantidad de cargas positivas

Número de electrones =número de protones

La primera capa se completa cuando contiene dos electrones, en la segunda caben un máximo de ocho, y las capas sucesivas pueden contener cantidades cada vez mayores. Ningún átomo existente en la naturaleza tiene la séptima capa llena. Los "últimos" electrones, los más externos o los últimos en añadirse a la estructura del átomo, son los que determinan el comportamiento químico del átomo, así como la mayoría de las propiedades del material del que forman parte, entre las cuales se destaca la conducción eléctrica y de calor.

Los detalles y especificaciones de los experimentos y estudios descritos hasta ahora, pueden ser consultados en textos enfocados particularmente a estudios acerca de la teoría atómica.

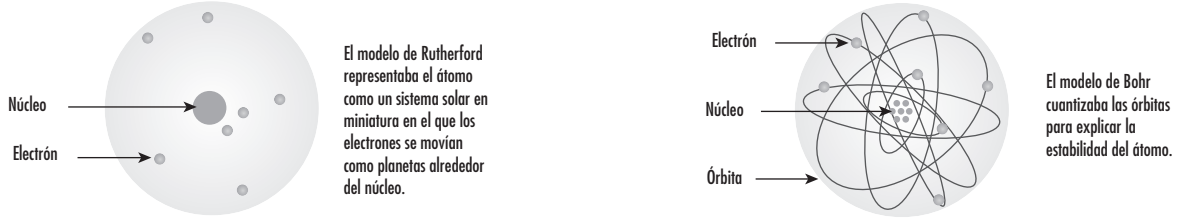


Figura 1.7 Modelos atómicos planteados por Rutherford y Bohr. Ambos presentan un núcleo al centro y alrededor de éste los electrones.

1.2 Conceptos básicos

COMPETENCIA:
Aplicar las *técnicas básicas* de laboratorio para la detección de cargas eléctricas, su registro y su evaluación. [2]

A partir de las investigaciones realizadas por diversos físicos, como las que se describen en la sección anterior, se han podido establecer conceptos que son indispensables para el estudio de los circuitos eléctricos y electrónicos; conceptos que son básicos, tanto para desarrollos teóricos como para la realización de pruebas, mediciones y comprobaciones en laboratorio. Aunque estos conceptos son tratados con mayor profundidad en textos de electricidad y magnetismo, recordaremos a continuación los utilizados con más frecuencia.

1.2.1 Carga eléctrica

Uno de los conceptos básicos en el estudio de la electricidad y la electrónica es el de *carga eléctrica* y la manera de medirla o cuantificarla. Se dice que un cuerpo tiene carga eléctrica cuando posee cierta cantidad de electrones, ya sea en déficit o en exceso, y el valor de la carga neta del cuerpo se define por este número; esta cantidad en déficit o en exceso se representa por la letra Q (también se usa la *q* minúscula) y se mide en coulombs. Existen diversas maneras de *cargar* a un cuerpo: por frotamiento, contacto o inducción, entre otras. En cualquiera de ellas, lo que se hace es "quitar" o "proporcionar" electrones al cuerpo en observación.

En el caso de "quitar" electrones, el cuerpo tendrá un déficit de cargas negativas; por tanto, quedará cargado positivamente ($+Q$), ya que ahora tendrá menos electrones que protones, como es el caso de una barra de vidrio que se frota con una tela de seda.

En caso contrario, cuando se le "proporcionan" electrones, el cuerpo tendrá un exceso de cargas negativas, entonces se convierte en un cuerpo cargado negativamente ($-Q$); tendrá más electrones que protones en total, como es el caso de una barra de ebonita que se frota con una piel de gato, figura 1.8.

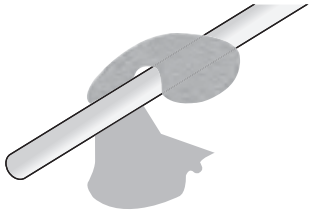


Figura 1.8 Electrización de una barra de ebonita por frotamiento con un trozo de piel de gato.

En cualquier caso, la cantidad de carga eléctrica se medirá en coulombs. En ambas situaciones el átomo con exceso de carga (positiva o negativa) se comportará como si fuera una carga susceptible de moverse, siendo atraído o repelido, según el caso, por otras cargas. Debido a esa capacidad para moverse que ahora tiene, a ese átomo cargado se le da el nombre de *ion* (que significa *viajero*, en griego).

El átomo que ha cedido electrones será un ion positivo o *catión;* el átomo que ha ganado electrones será un ion negativo o *anión*. Los átomos de una sustancia cualquiera contienen un número igual de protones y de electrones. Por tanto, la materia no presenta, ordinariamente, efectos eléctricos, o la presencia de una carga eléctrica; entonces se dice que es *eléctricamente neutra,* o que está *descargada*.

Sin embargo, se puede hablar de un *cuerpo cargado*, o bien de una *carga*, cuando por algún procedimiento se altera el equilibrio entre electrones y protones. Estos procedimientos son diversos en forma y en complejidad. Entre los más conocidos y prácticos están la electrización por frotamiento, por contacto e inducción.

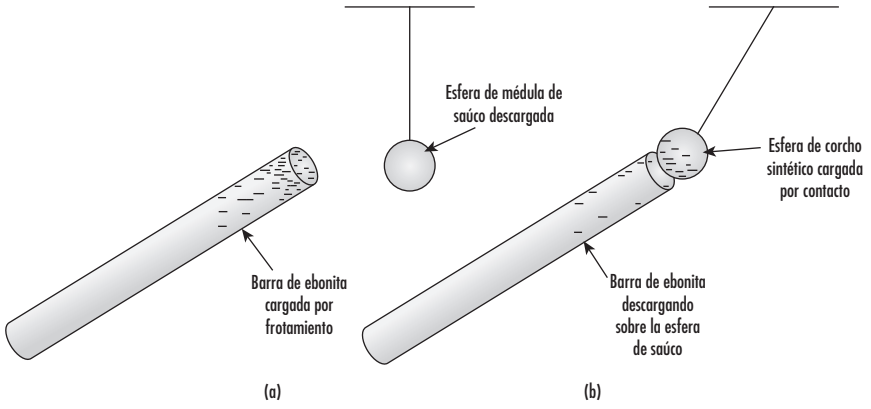


Figura 1.9 Experimento que demuestra la electrización de los cuerpos por contacto.

a) Una barra de ebonita electrizada por frotamiento con una piel de gato frente a una esfera de corcho sintético sin electrizar.
b) La barra de ebonita cargada atrae a la esfera y le transmite cargas eléctricas negativas, la carga por contacto con electricidad del mismo signo (negativo).

Electrización por frotamiento. Consiste en frotar con vigor la superficie de un cuerpo contra otro y, de esa manera, uno de los cuerpos roba los electrones superficiales al otro y el primero queda con carga negativa (exceso de electrones) y el segundo con carga positiva (déficit de electrones).

Electrización por contacto. Un cuerpo previamente cargado se pone en contacto con otro *descargado* y los electrones del primero pasan al segundo, así queda con carga eléctrica del mismo signo que le transfirió el primero, figura 1.9.

Electrización por inducción. Es un procedimiento de electrización semejante al de contacto, la diferencia radica en que el cuerpo cargado no entra en contacto con el cuerpo descargado, sino que basta con que se acerque a cierta distancia del segundo y las cargas eléctricas fluirán del cuerpo cargado al descargado a través del espacio que las separa, ambos cuerpos quedan cargados con el mismo signo que tienen las cargas del primer cuerpo.

La magnitud de una carga eléctrica puntal, o la contenida en un cuerpo con carga se mide en coulombs. Pero como es una unidad de carga poco manejable en algunas aplicaciones, por ser demasiado grande, también se utilizan sus divisores o submúltiplos, cuyas equivalencias se muestran en la tabla 1.1.

Tabla 1.1 Unidades de medida para la carga eléctrica y su equivalencia entre ellas.

Nombre	Abreviatura	Equivalencia
1 coulomb	C	$6.23 \times 10^{18}\ \varepsilon$
1 milicoulomb	mC	10^{-3} C
1 microcoulomb	μC	10^{-6} C
1 nanocoulomb	ηC	10^{-9} C
1 picocoulomb o micro-microcoulomb	pC o $\mu\mu$C	10^{-12} C

1.2.2 Electroscopio

COMPETENCIA:
Aplicar la ley de Coulomb en la solución de problemas con cargas eléctricas. [2]

Un instrumento que sirve para determinar si un cuerpo tiene carga es el *electroscopio de hojas*, que consiste en dos hojas o láminas delgadas de oro o de aluminio, fijas a una varilla metálica que termina en una esfera, también metálica en el extremo opuesto, la cual pasa a través de un soporte de ebonita, ámbar o azufre. Todo lo anterior se encierra en una caja con ventanas, a través de las cuales se observan las hojas metálicas, figura 1.10.

Cuando la esfera del electroscopio se toca con algún cuerpo cargado, adquiere carga del cuerpo, misma que se transfiere a las hojas metálicas. Al estar ambas hojas cargadas con el mismo signo se presentará una repulsión entre ellas. A mayor cantidad de carga eléctrica, mayor será la repulsión (separación) entre las hojas del electroscopio.

La separación entre hojas es una medida de la cantidad de carga eléctrica que han recibido. La fuerza con que se repelen obedece a la ley de Coulomb que quedó establecida mediante la ecuación 1.1.

El electroscopio es un instrumento de uso común, junto con el electrómetro de cuerda; además ha servido como base para desarrollar equipos más sofisticados especialmente diseñados para detectar la cantidad de carga eléctrica en un cuerpo.

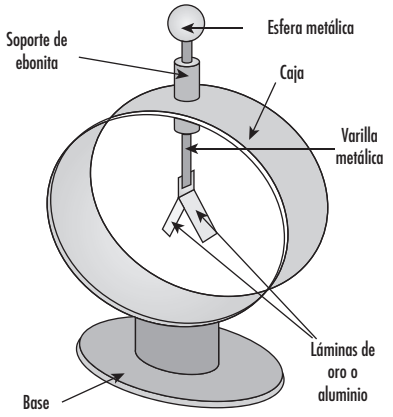


Figura 1.10. Electroscopio de hojas de oro o de aluminio.

EJEMPLO 1.1

¿Con qué fuerza se repelerán las hojas de un electroscopio si cada una de ellas ha recibido una carga de 4.22×10^{-8} C y sus extremos se separan 3.2 cm?

Solución

Datos:

$Q_1 = 4.22 \times 10^{-8}$ C
$Q_2 = 4.22 \times 10^{-8}$ C
$d = .032$ m

Desarrollo:

Al sustituir los datos conocidos en la ecuación 1.1 (ley de Coulomb):

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{d^2} = 9 \times 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}\left[\frac{(4.22 \times 10^{-8}\ \text{C})(4.22 \times 10^{-8}\ \text{C})}{(0.032\ \text{m}^2)}\right]$$

Resultado:

$F = 0.01565$ N
(Fuerza de repulsión por tratarse de cargas del mismo signo).

NOTA:
Observa que el resultado del desarrollo matemático arrojó una cantidad positiva (+). Esto indica que la fuerza es de repulsión, ya que son cargas del mismo signo, y concuerda con el principio matemático: (+)(+) =(+), y (−)(−) = (+). Cuando el resultado matemático es negativo (−) indica que se trata de una fuerza de atracción, puesto que será producto de cargas de signos contrarios: (+) (−) =(−) y (−) (+) = (−) .

1.2.3 Campo eléctrico

COMPETENCIA:
Comprender los *conceptos básicos derivados de los fenómenos que producen las cargas eléctricas*, así como las técnicas fundamentales para su cuantificación en forma experimental. [1]

El espacio que rodea a una carga eléctrica y dentro del cual ésta ejerce su efecto de atracción o de repulsión hacia otras cargas eléctricas se denomina *campo eléctrico*. La fuerza ejercida por una carga eléctrica se deja sentir a través de su campo eléctrico, y dicha fuerza se manifiesta a lo largo de una línea de acción. De ahí que en el campo eléctrico que rodea a una carga existan infinidad de líneas, llamadas *líneas de campo*, las cuales establecen la dirección y el sentido de la fuerza existente.

El sentido de las líneas de campo en una carga positiva se representa desde el centro de la carga hacia fuera, mientras que en las cargas negativas es al contrario, desde el exterior hacia el centro de la carga, como muestra la figura 1.11.

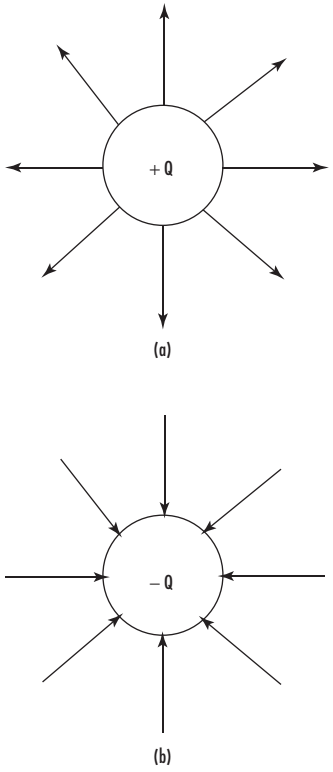


Figura 1.11 Representación gráfica de las líneas de campo alrededor de una carga eléctrica.

a) En la carga positiva las líneas van desde la carga hacia el exterior.
b) En la carga negativa las líneas de campo van desde el exterior hacia adentro de la carga.

1.2.4 Potencial y diferencia de potencial eléctrico

Otros conceptos, básicos para el estudio de los circuitos eléctricos y electrónicos, son *potencial eléctrico* y *diferencia de potencial eléctrico*. Para explicarlos nos valdremos de una analogía gravitacional conocida por el lector, dado que se trata de un ejemplo estudiado en la escuela secundaria, o bien, un caso conocido por la experiencia de la vida misma; es el caso de un cuerpo en reposo de masa *m*, colocado a cierta altura del nivel del suelo.

Para continuar hay que recordar el concepto de *campo gravitatorio*, que es el espacio que rodea a cualquier cuerpo celeste, por ejemplo la Tierra, dentro de la cual la masa de la Tierra ejerce una fuerza de atracción sobre la masa de cualquier otro cuerpo. Cualquier objeto que se localice dentro de este espacio, experimentará la atracción gravitacional del planeta. La atracción será mayor cuanto más cerca esté el cuerpo en estudio del centro del planeta. Una masa situada a cierta altura tiende a caer hacia el suelo (atraída por la masa de la Tierra) y al caer realiza un trabajo mecánico. Cabe indicar que la masa realizará más trabajo conforme aumente su altura.

En consecuencia, cuanto mayor sea la distancia a la que se encuentre esa masa respecto del nivel del suelo, mayor *potencial gravitatorio* tendrá ésta.

De lo anterior se concluye que *el trabajo* que puede realizar esa masa está en proporción directa a la magnitud de la altura, figura 1.12. Es decir, la energía que "guarda" la masa respecto del nivel del suelo, llamada *energía potencial*, está en función directa de la altura, y está dada por la ecuación 1.2.

$$Energía\ potencial = masa \times gravedad \times altura$$

$$E_p = m\,g\,h \qquad \text{(ecuación 1.2)}$$

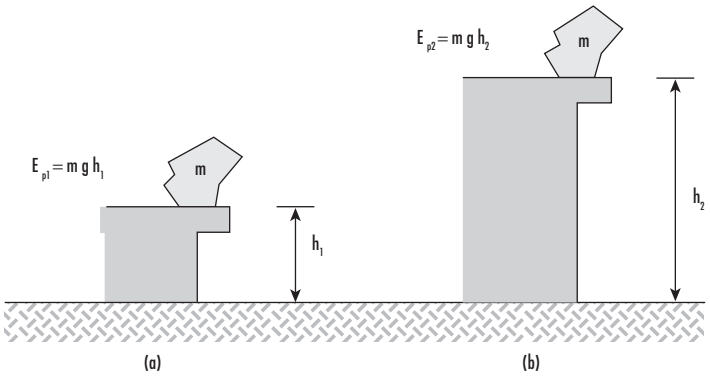


Figura 1.12 Un cuerpo de masa m, colocado a una altura h_2 del suelo como en b), tendrá mayor energía potencial que si a éste se le coloca a una altura h_1, como en a), puesto que $h_2 > h_1$.

Donde la masa (m) está dada en kilogramos, la constante gravitacional (g) en metros/segundo^2 y la altura (h) está dada en metros. Por tanto, la energía potencial queda expresada en joules.

$$\frac{(\text{kg}\cdot\text{m})\cdot\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}\cdot\text{m} = \text{joule} \qquad \text{(ecuación 1.3)}$$

De la figura 1.12 se puede observar lo siguiente:

Al sustituir valores en la ecuación 1.2, puesto que la masa *m* del cuerpo es la misma, la *constante* gravitacional *g* también es la misma, y lo único que varía es la altura $h (h_2 > h_1)$, esto significa que la energía potencial está en función directa de la altura que guarda el cuerpo respecto del nivel de referencia, el suelo. El mismo cuerpo tendrá mayor energía potencial en el caso del inciso *b*) cuando se le coloque a la altura h_2, que cuando está a una altura h_1 en el inciso *a*). ¿Cómo sería su energía potencial si el cuerpo estuviera en reposo al nivel del suelo?

Ahora regresemos al contexto de las cargas y campos eléctricos. En el campo eléctrico esa "altura" eléctrica (capacidad para desarrollar un trabajo), se denomina *potencial eléctrico*, y las cargas tienden a "caer" desde los potenciales más altos a los más bajos, realizando un trabajo.

Como se desprende de la comparación gravitatoria, el concepto de potencial es *relativo* (por ejemplo, cuando hablamos de la altura de un edificio, nos referimos a la altura respecto al nivel de la calle; sin embargo, cuando hablamos de la altura de una montaña, nos referimos a la altura sobre el nivel del mar), de modo que hay que fijar la referencia en algún punto.

Lo mismo se requiere en electrostática, hay que fijar un origen de potenciales, mismo que será arbitrario. Algunas veces se toma como origen el potencial de la Tierra, y entonces se dice que la Tierra está en potencial cero, otras veces se toma como punto de referencia al infinito.

En el caso de las cargas eléctricas es tan importante el *potencial* al que está la carga, como *la diferencia de potencial*, es decir, la diferencia de *alturas* o diferencia entre los potenciales de dos puntos entre los cuales se va a mover la carga.

A continuación se define la diferencia de potencial (*d.d.p.*) entre dos puntos, como el trabajo que realiza la unidad de carga (el coulomb) al "caer" desde el potencial más alto al más bajo.

El potencial eléctrico se representa con la letra V (algunos textos utilizan la letra *E*). El potencial del punto A se representa por V_A; el potencial en un punto *B* se representará por V_B, mientras que la diferencia de potencial entre los puntos *A* y *B* se representa por $V_A - V_B$, o simplemente V_{AB}, que es la diferencia de potencial entre el punto *A* y el punto *B* (en ese sentido y no al revés). Dicho de otra forma: es el potencial del punto *A* respecto del potencial del punto *B*. En sentido inverso el potencial del punto *B* respecto del punto *A* será expresado como $V_{BA} = V_B - V_A$.

$$\text{Ya que } V_{BA} = -V_{AB}$$

Se tiene que si $V_{AB} = 5$ unidades, entonces $V_{BA} = -5$ unidades.

La unidad para medir el potencial eléctrico (y la diferencia de potencial eléctrico) es el *volt*. *La diferencia de potencial entre A y B es de 1 volt si se efectúa un trabajo de un joule por coulomb contra las fuerzas eléctricas, cuando se mueve una carga desde el punto B al punto A.*

$$1\,\text{volt} = \frac{1\,\text{joule}}{1\,\text{coulomb}} \qquad \text{(ecuación 1.4)}$$

Por ejemplo, la diferencia de potencial entre los bornes o terminales de una batería de automóvil es de 12 volts, se designa al borne de potencial más elevado con el signo (+) y al de menor potencial con el signo (−). La carga del borne (+) es *positiva*, mientras que la otra (−) es *negativa*. Por tanto, existe un *campo eléctrico* (el espacio que rodea a los bornes), y cuando se dice que entre bornes existe una diferencia de potencial de 12 volts, significa que si tuviéramos que mover un cuerpo cargado positivamente desde el borne negativo al positivo, el trabajo realizado contra las fuerzas eléctricas del campo entre bornes sería de 12 joules por cada coulomb de carga transportada, figura 1.13.

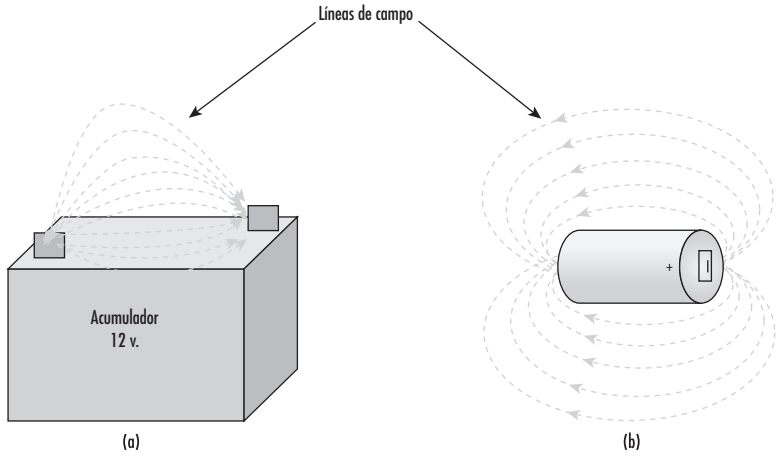


Figura 1.13 Campo magnético en dos fuentes de voltaje. ***a***) Acumulador para automóvil (12 volts). ***b***) Pila seca de 1.5 volts.

COMPETENCIA:
Desarrollar la capacidad para estructurar con sus propias palabras el concepto de *fuente de alimentación* y su importancia en los circuitos eléctricos. [2]

En el caso de una pila seca de 1.5 volts, el trabajo realizado contra las fuerzas eléctricas del campo sería de 1.5 joules por coulomb.

Aunque en la ingeniería eléctrica se usan diferencias de potencial eléctrico expresadas en múltiplos de volt, (como el kilovolt = 10^3 volts), en el área de la electrónica los potenciales a utilizar casi siempre son del orden de submúltiplos del volt. Los más usados para la medición de voltajes se presentan en la tabla 1.2.

Tabla 1.2 Submúltiplos más empleados en el área de la electrónica para medir la diferencia de potencial eléctrico o voltaje.

	volts	milivolts	microvolts
1 volt (V) =	1	10^3	10^6
1 milivolt (mV) =	10^{-3}	1	10^3
1 microvolt (mV) =	10^{-6}	10^{-3}	1

A la diferencia de potencial también se le llama *voltaje* o *tensión eléctrica*, y el instrumento que se utiliza para medir el voltaje es el *voltímetro* o *voltmetro*, que de acuerdo con la forma de presentar los resultados, puede ser de tipo analógico o digital, figura 1.14.

1.2.5 Fuentes de alimentación

Los circuitos eléctricos y electrónicos deben "alimentarse" con energía eléctrica (la energía debida a las cargas eléctricas) para realizar la función para la que fueron diseñados y construidos. Esta energía usualmente se *genera* y la proporcionan dispositivos denominados *fuentes de voltaje*, a los que también se les da el nombre de *fuentes de alimentación*, por ser los que alimentan de energía eléctrica a un sistema o circuito. De ahí que se les identifica como *elementos activos* en el análisis de circuitos.

a) 

b) 

Figura 1.14 Medidores de voltaje. a) Voltímetro analógico con varias escalas. b) voltímetro digital con varias escalas.

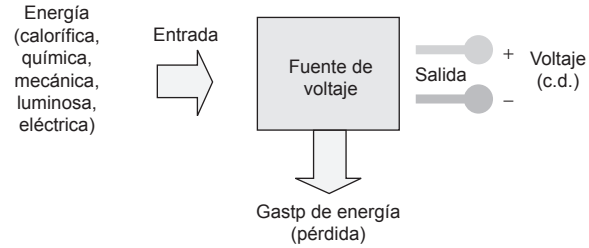


Figura 1.15 Diagrama de una fuente de alimentación o fuente de voltaje, en cuyo interior se realiza una transformación de energía, para finalmente entregar a la salida una diferencia de potencial eléctrico o voltaje, que se cuantifica en volts.

Las *fuentes de voltaje* trabajan bajo el principio de que "la energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma", que obedece a la ley de la conservación de la energía en el Universo. Esto significa que si una fuente de voltaje *genera* y proporciona energía eléctrica (cargas eléctricas) a algún sistema o circuito, mediante una diferencia de potencial, es porque dicha fuente, a su vez recibe, en su entrada, energía en alguna de sus manifestaciones (calorífica, química, mecánica, luminosa o eléctrica), y entrega en su salida energía eléctrica en forma de diferencia de potencial eléctrico o voltaje, cuantificada en volts, figura 1.15.

Sólo en términos teóricos puede hablarse de un sistema *perfecto* (cero pérdidas); pero en la práctica no existe dicho sistema; es decir, no hay una fuente con una eficiencia de 100%. Toda fuente de alimentación tiene un gasto, energía que se desprende en alguna de sus manifestaciones (calor, sonido o magnetismo, por ejemplo), al tiempo que entrega la energía eléctrica. El porcentaje de energía *perdida* varía según sea la calidad de la fuente, o bien de las características del sistema alimentado.

Para su análisis teórico, en los circuitos eléctricos y electrónicos se utilizan representaciones simbólicas de lo que sería una fuente de voltaje real. Sin importar sus características y especificaciones, las fuentes de voltaje se representan como se ilustra en la figura 1.16.

El voltaje que entrega una fuente de alimentación se mide con un voltímetro. Para realizar la medición el voltímetro se conecta en paralelo con las terminales de la fuente: la terminal positiva del instrumento va con el positivo de la fuente, y terminal negativa del instrumento se conecta al extremo negativo de la fuente, como se ilustra en la figura 1.17.

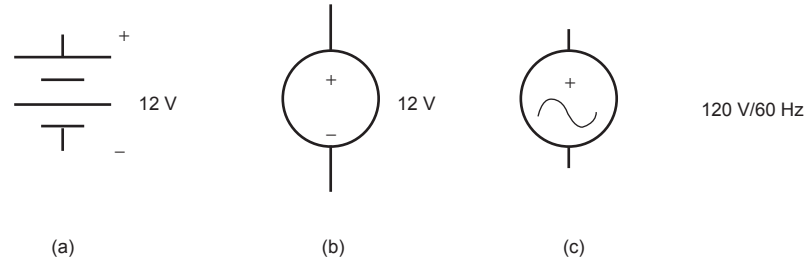


Figura 1.16 Símbolos de la fuente de voltaje.

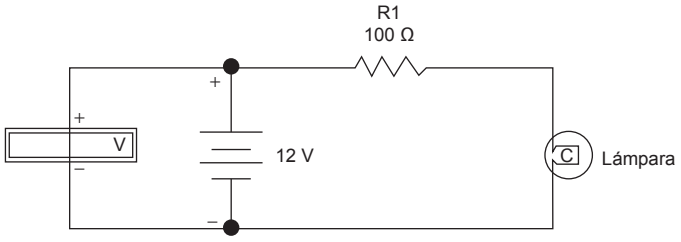


Figura 1.17 Diagrama simbólico de un circuito formado por una fuente de voltaje de *cd* que alimenta a un resistor R1 de 100 Ω y una lámpara de 12 volts de *cd*. Para medir el voltaje que entrega la fuente se utiliza un voltímetro de *cd*, el cual se conecta en paralelo con el dispositivo a medir.

El *osciloscopio* es un instrumento que permite analizar el comportamiento de los dispositivos electrónicos, es de gran utilidad en el laboratorio de electrónica, para el análisis de señales eléctricas. Tiene la particularidad de contar con una pantalla en la cual se trazan las señales que se verifican y sus características.

De la misma manera que se conecta un voltímetro, para medir un voltaje por medio del osciloscopio, éste se conecta en paralelo con el dispositivo que se estudia, como se indica en la figura 1.18.

En esta figura aparecen dos circuitos eléctricos que consisten, cada uno, en un resistor y una lámpara, alimentados por una fuente de voltaje. En el caso del inciso *a* se trata de un circuito alimentado por una *fuente de voltaje de cd*, mientras que en el inciso *b* se tiene una *fuente de voltaje de ca.* Éstos son los dos tipos de fuentes de alimentación que puede haber. El análisis de las características de estas fuentes se hace en secciones posteriores.

1.2.6 Intensidad de la corriente eléctrica

Otro concepto básico para el análisis de los circuitos, es el de *intensidad de corriente eléctrica*, que indica la presencia de cargas eléctricas que se desplazan en una trayectoria o circuito.

Ya se ha dicho que las cargas eléctricas pueden moverse a través de trayectorias en cuyos extremos existen puntos con alguna diferencia de potencial. A este movimiento de cargas se le denomina *corriente eléctrica*. Naturalmente, las cargas deberán desplazarse en un medio conductor.

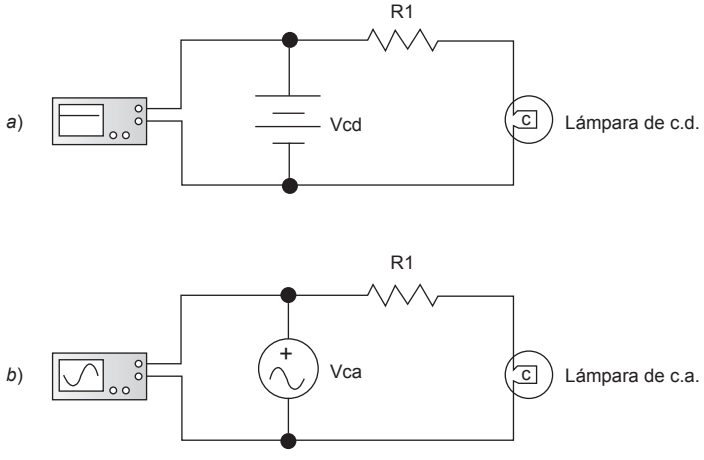


Figura 1.18 Diagramas que representan la manera de conectar un osciloscopio para analizar el voltaje que entrega una fuente de alimentación a un circuito. ***a***) En un circuito alimentado por una fuente de cd. ***b***) En un circuito alimentado por una fuente de ca.

La *corriente eléctrica* o flujo de cargas eléctricas, en términos generales, obedece a los mismos principios físicos que una corriente de agua. Veamos estos principios a través de una analogía en la cual se presenta el fenómeno de la corriente de agua, para luego regresar al tema que ahora nos ocupa, la corriente eléctrica.

Analicemos ahora el caso de los vasos comunicantes:

Considera dos depósitos similares a los tinacos usados en casa para almacenar el agua. Los dos son de las mismas características, en cuanto a dimensiones, material de fabricación, color y temperatura.

Los identificamos como depósito *A* y depósito *B*. Ambos colocados al mismo nivel, y se encuentran comunicados por su parte inferior, mediante un tubo en el cual se ha insertado una válvula de control (comúnmente llamada llave), que inicialmente se encuentra cerrada (figura 1.19). El depósito *A* contiene agua hasta un nivel cuya altura se identifica como h_A, respecto al nivel de referencia, mientras que el depósito *B* contiene agua hasta un nivel de altura h_B.

Observa la figura 1.19 y analiza con detenimiento la siguiente pregunta para que encuentres la respuesta correcta.

Pregunta (problema): si la válvula de control está cerrada ¿qué sucederá en este sistema inmediatamente después de abrirla?

Como se verá, este sistema físico es bien conocido, científica o empíricamente. La respuesta a la pregunta formulada puede ser alguna de las siguientes:

- "El nivel del depósito *A* va a descender..."
- "Subirá el nivel del agua en el depósito *B*..."
- "Se van a nivelar los niveles de ambos depósitos..."
- "Un nivel disminuye y el otro aumenta, hasta quedar iguales..." y otras más acerca de *los niveles* en los depósitos.

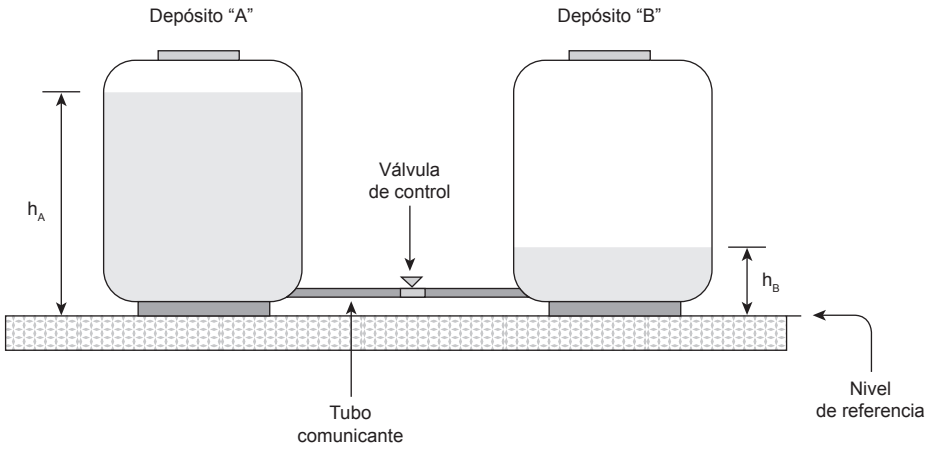


Figura 1.19 El caso de dos depósitos para agua, *A* y *B*, que tienen las mismas características, pero contienen diferentes volúmenes de líquido, ya que el primero alcanza una altura h_A y el segundo una altura h_B, donde $h_A > h_B$.

Aunque podrían considerarse como correctas todas las respuestas anteriores, observa que ninguna de ellas responde a ¡lo que sucederá en este sistema *inmediatamente después* de *abrir la válvula*!, ya que los cambios de nivel de un depósito y otro son consecuencia de otro fenómeno que se presenta antes que cambien los niveles de agua en los depósitos. ¿Ya te diste cuenta de ello?

¡En efecto!, lo que sucede *inmediatamente después de abrir* la válvula que "conecta" a ambos depósitos es que hay un *flujo de agua* del depósito *A* hacia el depósito *B*; hay una corriente de agua que va del punto donde la altura del nivel es mayor hacia el depósito que tiene la altura menor. En consecuencia, debido a este flujo, habrá un cambio en los niveles de ambos depósitos.

Hasta qué momento seguirá fluyendo el agua desde *A* hacia *B*?

¡Hasta que la altura del nivel de agua en ambos depósitos sea la misma!

Regresemos a la situación inicial, al abrir la válvula de control o llave.... ¿Podría fluir el agua en el sentido de *B* hacia *A*?

¡Desde luego que no!

Para que pudiera fluir el agua en el sentido de *B* hacia *A* sería necesario que el nivel en *B* estuviera más alto que en *A*. ¿Estás de acuerdo?

Una explicación científica la podemos encontrar mediante un estudio elemental de la energía potencial. Como los depósitos son de las mismas características, se podrá observar que el líquido contenido en *A* tiene una masa m_A mayor que la masa del líquido que contiene el depósito *B* (m_B). Por tanto, con las características señaladas,

$$m_A > m_B, \quad \text{y} \quad h_A > h_B$$

y al aplicar la ecuación 1.2 tendremos que las energías potenciales en el contenido de *A* y de *B* serán, respectivamente:

$$Ep_A = m_A\, g\, h_A$$
$$Ep_B = m_B\, g\, h_B$$

Entonces $\rightarrow Ep_A > Ep_B$ y hay una diferencia de potenciales, que está dada por:

$$d.d.p. = Ep_A - Ep_B \qquad \text{(ecuación 1.5)}$$

Esta diferencia de potenciales o diferencia de potencial es lo que ocasiona que exista un flujo de agua. Cuando esa diferencia de potencial entre depósitos es igual a cero; es decir, *cuando no hay diferencia de potenciales*, deja de haber flujo, aun cuando se mantenga abierta la válvula de control.

Se ha considerado de importancia tratar este caso como ejemplo, porque de este "experimento imaginario" con agua (pero, ya vivido alguna vez por el lector), se pueden obtener conclusiones muy importantes, como las siguientes:

- Si hay una diferencia de potencial entre los depósitos y estos están comunicados o "conectados" entre sí, habrá un flujo de agua.
- El sentido del flujo de agua, en condiciones naturales, será de donde hay mayor cantidad de energía potencial hacia donde hay menor energía potencial, nunca sucedería lo contrario.
- Si los niveles en los dos depósitos son iguales; es decir, si las energías potenciales son iguales (no hay diferencia de potenciales), no habrá flujo de agua en ningún sentido, la *corriente* de agua será cero.
- Si colocamos un medidor de flujo de agua (como los que existen en las tomas de agua domésticas), podremos medir la cantidad de agua que fluye de un depósito a otro en un tiempo determinado. Es decir, conoceremos la *intensidad de la corriente* de agua.
- A mayor diferencia de potenciales la *intensidad de la corriente* de agua será mayor, y viceversa. Lo cual significa que la intensidad de la corriente de agua es una variable que depende, en una relación directa, de la variable *diferencia de potencial*.
- Aunque la diferencia de potenciales entre los depósitos sea considerable, si éstos no se comunican o se "conectan", no podrá haber flujo de agua entre ellos.
- Si disminuimos el diámetro del tubo que conecta ambos depósitos, con lo cual se dificulta el flujo, la *intensidad de la corriente* de agua será menor, y el flujo de líquido de un depósito a otro durará más tiempo hasta que el líquido en ambos depósitos quede al mismo nivel. Por el contrario, al aumentar el diámetro del tubo, lo que facilita el flujo, la *intensidad de la corriente* será mayor y fluirá más rápido.

Habrá que tener presentes y muy claros los conceptos, las ideas y las conclusiones que en este ejemplo se han manejado, ya que servirán de base para continuar el estudio de la *corriente eléctrica*.

Ahora regresemos al caso de la corriente eléctrica.

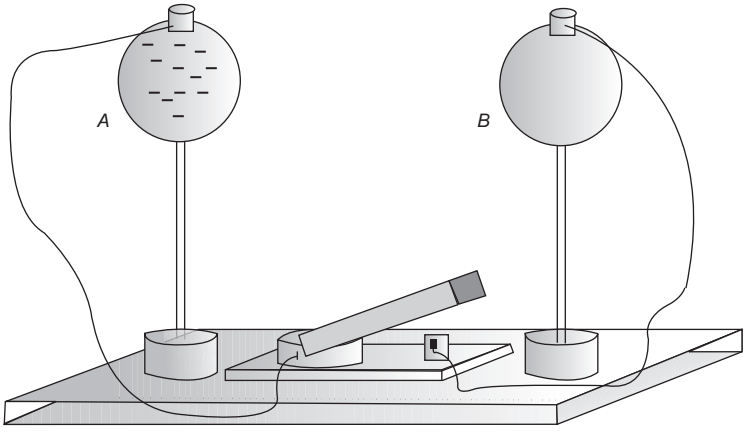


Figura 1.20 Dos cuerpos con cargas eléctricas Q_A y Q_B, respectivamente, donde $Q_A > Q_B$. En el instante en que el interruptor cierre habrá un flujo de cargas de *A* hacia *B*.

Ya se dijo que las cargas eléctricas se desplazan de un punto a otro, y que a este movimiento de cargas se le denomina *corriente eléctrica.* Al igual que en la situación gravitacional del ejemplo de los depósitos de agua, la causa que origina la *corriente eléctrica* es una *diferencia de potencial eléctrico*. Las cargas "caen" del potencial eléctrico más alto al más bajo.

Veamos el caso de dos cuerpos con carga eléctrica:

En una situación semejante al caso de los depósitos de agua, supongamos que se tienen dos cuerpos cargados eléctricamente, el *A* y el *B*, como en la figura 1.20, ambos tienen una cierta cantidad de carga eléctrica, que se representa por los signos (–). Esas cantidades de carga eléctrica tienen las magnitudes Q_A y Q_B, respectivamente. En lugar de un *tubo* como el que se usa para conectar los depósitos de agua, se utiliza un *cable conductor* para establecer la conducción entre los cuerpos. En lugar de la *válvula* o llave de control, se tiene ahora un *interruptor*, que permite el contacto entre cuerpos a través del cable conductor. Inicialmente el interruptor está abierto (no hay conexión).

Cuando el interruptor cambie a la posición *cerrado* establece la conexión entre cuerpos, y como $Q_A > Q_B$, entonces habrá un flujo de cargas desde el cuerpo con mayor cantidad de carga (mayor potencial eléctrico) al de menor cantidad de carga (menor potencial eléctrico); es decir, habrá una corriente eléctrica desde el cuerpo *A* hacia el cuerpo *B*.

Así como en el caso de los depósitos de agua, la intensidad del flujo de agua depende de la diferencia de potencial entre los depósitos y el diámetro del tubo que los conecta; en el caso de la corriente eléctrica, ésta tendrá una intensidad que dependerá directamente de la diferencia del potencial eléctrico que exista entre los cuerpos cargados; pero también existirá una oposición (aunque mínima) al paso de las cargas por parte de los cables conductores y de las partes mecánicas del interruptor que hacen contacto entre sí.

De acuerdo con lo visto en la introducción de este capítulo, las únicas partículas que pueden desplazarse a lo largo de los conductores, debido a su pequeño tamaño, son los electrones que, como se sabe, son cargas de signo negativo. Aunque realmente se trata de un *flujo electrónico* (flujo de electrones), esta circulación recibe el nombre de ***corriente eléctrica,*** que fluye desde el punto donde hay *mayor potencial negativo* (punto donde hay mayor cúmulo de electrones, que tienen carga negativa) a donde hay *menor potencial negativo* (punto donde el cúmulo de electrones se menor). O como también podría decirse: desde el punto que tiene menos potencial positivo hacia el que tiene mayor potencial positivo.

En resumen, al cerrarse el interruptor y poner en contacto los dos cuerpos como existe una diferencia de potencial eléctrico entre ellos

$$d.d.p = V_{AB} = V_A - V_B \qquad \text{(ecuación 1.6)}$$

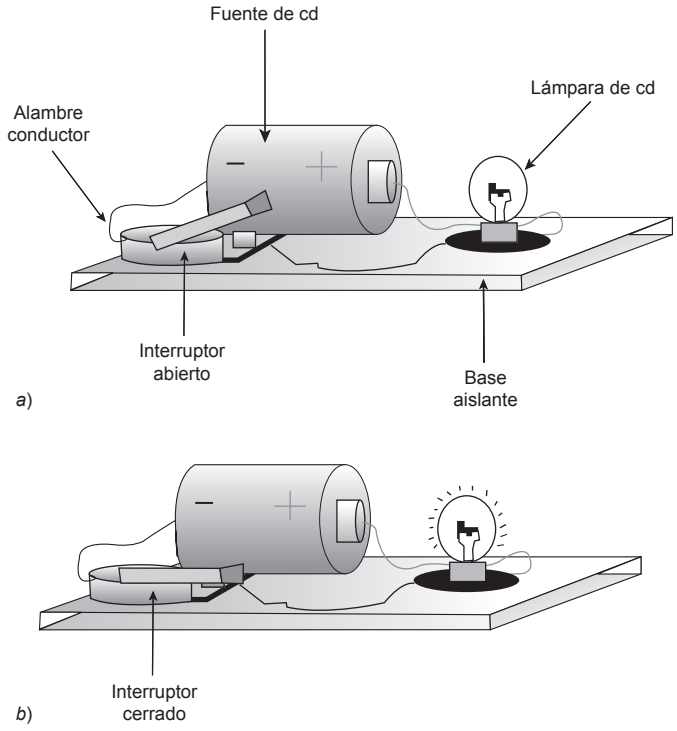


Figura 1.21 Representación del efecto que produce una fuente de alimentación de cd sobre una lámpara eléctrica.

a) El interruptor está abierto y las cargas no pueden fluir a través del circuito.
b) El interruptor cerrado establece el contacto entre los polos de la fuente de alimentación, haciendo que las cargas eléctricas fluyan a través del alambre conductor y la lámpara; esto hace que la lámpara encienda.

Entonces habrá un flujo de electrones de negativo hacia positivo, es decir:

$$(-) \rightarrow (+).$$

Si en lugar de tratarse de los cuerpos *A* y *B* del ejemplo anterior, esa diferencia de potencial eléctrico es proporcionada por una fuente de alimentación, como una pila, un acumulador u otra, para alimentar a una lámpara, por ejemplo (o a algún otro dispositivo que se alimente con energía eléctrica) podríamos darnos cuenta de la presencia de una *corriente eléctrica* debida a una *diferencia de potencial*. El efecto sería que al circular las cargas eléctricas a través del filamento de la lámpara, ésta encendería como se ilustra en la figura 1.21.

Este fenómeno se representa con el modelo simbólico, figura 1.22, del sistema *fuente-conductores-interruptor-lámpara*, denominado *circuito eléctrico.* En la figura 1.21*a*, se aprecia que, mientras el interruptor está en posición *abierto*, la intensidad de la corriente eléctrica es cero, no enciende la lámpara; pero al pasar el interruptor a la posición *cerrado* (figura 1.21*b*), éste pone en contacto a los dos polos de la fuente (negativo y positivo) a través de los conductores y la lámpara, lo que provoca el flujo de las cargas eléctricas (electrones) y resulta una *intensidad de corriente,* que se identifica con la letra ***I***. Esto hará que se encienda la lámpara.

Entonces se dice que el dispositivo o fuente posee una *fuerza electromotriz* (*fem*) que es capaz de suministrar la energía suficiente a una carga eléctrica para hacerla circular a través de la fuente misma, desde la terminal negativa hasta la positiva.

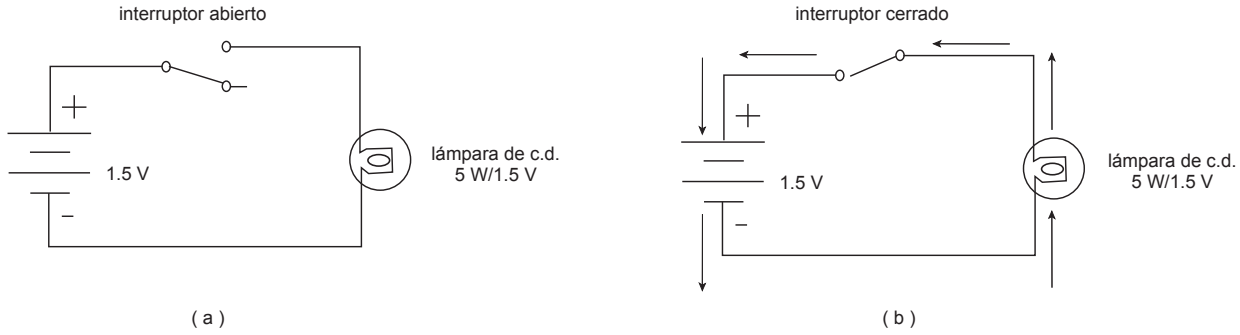


Figura 1.22 Diagrama simbólico del circuito formado por una pila de 1.5 V y una lámpara eléctrica, con un interruptor.

a) El interruptor está abierto y las cargas no fluyen, la intensidad de la corriente eléctrica es cero.
b) El interruptor cerrado permite que la diferencia de potencial provoque una intensidad de corriente eléctrica *I*, la lámpara enciende.

El trabajo necesario para desplazar una carga Q a través de la diferencia de potencial V, lo define la ecuación 1.7

$$T = QV \qquad \text{(ecuación 1.7)}$$

En la figura 1.22*b*, las flechas representan el sentido real en el que circula la corriente. Es el sentido que siguen las cargas eléctricas al circular bajo una diferencia de potencial eléctrico a través de un alambre conductor[9], es del polo negativo al positivo. Sin embargo, en el año 1752, cuando Benjamín Franklin descubrió la presencia de un fluido eléctrico a través de un conductor, determinó que las cargas que se "movían" eran las positivas, por tanto, fluían de positivo a negativo. La teoría de Franklin estuvo vigente por más de 100 años, hasta que los estudios acerca de la teoría atómica, de J. J. Thompson y luego los de Rutherford, demostraron que a través de un material conductor sólido, las cargas que realmente se desplazan son las negativas; es decir, los electrones libres.

En la actualidad se manejan los dos criterios, uno es el del sentido *real* de las cargas (las negativas) y el otro el *convencional,* que supone que se desplazan las cargas positivas. La gran mayoría de los textos, tratados, diagramas y publicaciones relacionados con la materia utilizan el sentido convencional de la corriente; en este texto se utiliza también el *sentido convencional*; se considera que las cargas eléctricas fluyen de (+) a (−) como ilustra la figura 1.23.

En el *análisis de circuitos* puede aplicarse uno u otro, ya que, tratándose de convencionalismos, ambos dan el mismo resultado. Sin embargo, esto sólo es válido para efecto de los análisis teóricos; desde luego que en el laboratorio los equipos e instrumentos detectan el sentido real de la corriente, identificándose siempre la terminal positiva con el color rojo y la negativa con el negro.

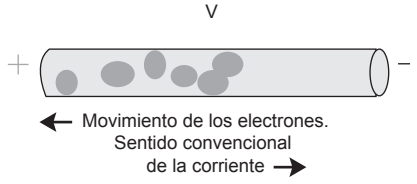


Figura 1.23 Representación de una sección de un conductor, a través del cual se desplazan las cargas eléctricas al aplicar en sus extremos una diferencia de potencial V. El movimiento de las cargas es de negativo a positivo, mientras que el sentido convencional de la corriente es de positivo a negativo.

[9] Un conductor es un cuerpo en cuyo interior hay cargas libres que se mueven debido a la fuerza ejercida sobre ellas por un campo eléctrico. Las cargas libres en un conductor metálico son los electrones. Las cargas libres en un electrolito o gas en condiciones adecuadas como un anuncio luminoso de Neón o una lámpara fluorescente son iones, positivos o negativos y electrones.

Es evidente que casi en ninguna circunstancia circulará el mismo número de electrones. Su número depende de la diferencia de potencial y de la capacidad del medio para conducir (conductividad). Una forma de medir el mayor o menor flujo de cargas es conocer la *intensidad de corriente* (o también, simplemente, *corriente*), que se define como la cantidad de carga que circula por una conductor en la unidad de tiempo (un segundo).

Según esto:

$$I = \frac{Q}{t} \qquad \text{(ecuación 1.8)}$$

Donde:

$I =$ intensidad de corriente, expresada en *amperes*.

$Q =$ carga eléctrica, expresada en *coulombs*.

$t =$ tiempo, expresado en *segundos*.

Por definición:

> Un ampere es la intensidad de corriente que circula a través de un punto, cuando por ese punto pasa una carga de 1 coulomb en cada segundo.

$$I = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ segundo}} \qquad \text{(ecuación 1.9)}$$

En los circuitos utilizados en las instalaciones eléctricas residenciales es común encontrar intensidades de corriente mayores que 1 ampere; sin embargo, en los circuitos electrónicos, aunque también se pueden encontrar corrientes que se miden en el orden de unos cuantos amperes, lo más común es que en éstos circulen corrientes menores a 1 ampere, que se miden en submúltiplos de la unidad, como el miliampere (*mA*), que es la milésima parte del ampere. Algunos de los submúltiplos más usados en electrónica se muestran en la tabla 1.3.

Tabla 1.3 Relación existente entre el ampere y algunos de sus submúltiplos.

	ampere (*A*)	**miliamperes (*mA*)**	**microamperes (∝*A*)**
1 Ampere =	1	10^3	10^6
1 Miliampere =	10^{-3}	1	10^3
1 Microampere =	10^{-6}	10^{-3}	1

El instrumento utilizado para medir la intensidad de corriente es el amperímetro, que al igual que el voltímetro, puede ser de tipo analógico o digital.

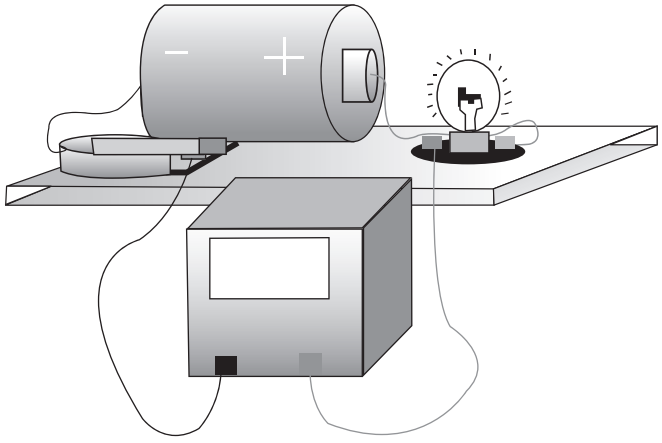


Figura 1.24 Para medir la intensidad de corriente en algún punto de un circuito, se conecta el amperímetro (o miliamperímetro) en serie con esa rama. Esquema de un circuito real.

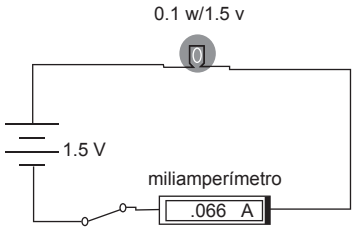


Figura 1.25 Representación simbólica o diagrama esquemático de un circuito eléctrico correspondiente al sistema que representa el circuito real, que se muestra en la figura 1.24.

La manera correcta de medir una intensidad de corriente en alguna *trayectoria* o *rama* de un circuito, es conectar el amperímetro en serie en la rama de interés, como muestran las figuras 1.24 y 1.25.

1.2.7 Potencia eléctrica y energía

COMPETENCIA:
Aplicar los *conceptos fundamentales de los circuitos eléctricos* para su análisis. [2]

La energía consumida (que se representa con *w*) o proporcionada por algún dispositivo está determinada por la capacidad que tiene el dispositivo para realizar un trabajo sobre una carga eléctrica, a través de una diferencia de potencial, y se expresa en *joules* (ecuación 1.7).

Otro concepto básico para el estudio de los circuitos eléctricos y electrónicos es el de *potencia eléctrica*, que se refiere a la capacidad de un dispositivo para realizar un trabajo sobre una carga eléctrica, a través de una diferencia de potencial, en un tiempo determinado. De acuerdo con las ecuaciones 1.7 y 1.8 la potencia eléctrica puede expresarse matemáticamente como la ecuación 1.10.

$$potencia\ eléctrica = \frac{trabajo}{tiempo} \qquad \text{(ecuación 1.10)}$$

O también:

$$potencia\ eléctrica = \frac{d.d.p.(\mathrm{V}) \cdot carga\ eléctrica\ (\mathrm{Q})}{tiempo\ (\mathrm{s})}$$

Al hacer el análisis dimensional, se tiene que la unidad de potencia eléctrica es el *watt (w):*

$$p = \frac{V \cdot Q}{t} = \frac{[\mathrm{volt}] \cdot [\mathrm{coul}]}{[\mathrm{s}]} = [\mathrm{volt}] \cdot [\mathrm{ampere}] = [\mathrm{watt}] \qquad \text{(ecuación 1.11)}$$

O bien, de acuerdo con la ecuación 1.8:

$$P = VI \qquad \text{(ecuación 1.12)}$$

La ecuación 1.12 describe a la *potencia eléctrica absorbida P,* por un dispositivo, cuando a través de dicho dispositivo circula una intensidad de corriente *I*, debido a una diferencia de potencial *V* entre sus terminales.

EJEMPLO 1.2

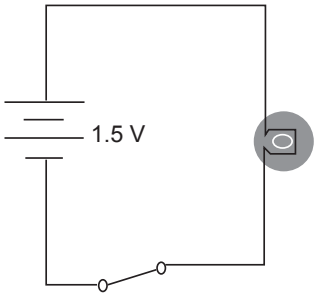


Figura 1.26 Diagrama esquemático para los ejemplos 1.2 y 1.3.

¿Cuál será la potencia absorbida por la lámpara usada en el circuito de la figura 1.25, si la diferencia de potencial en sus terminales es 1.5 volts y a través de su filamento circula una corriente de 66 mA?

Solución

Datos:

$V = 1.5$ volts

$I = 0.066\ A = 66$ mA

Desarrollo:

Como ya se indicó, para el análisis se utiliza el sentido convencional de la corriente (flujo de + a −).

Planteamiento:

$$P = VI$$

De acuerdo con la ecuación 1.12, se tiene que:

$$P = (1.5\ V)\ (0.066\ A) = 0.099 \text{ watts.}$$

Resultado:

La potencia absorbida por la lámpara es:

$$P = 99 \text{ mW}$$

EJEMPLO 1.3

¿Cuál será la potencia absorbida por la fuente usada en el circuito de la figura 1.26, si la diferencia de potencia en sus terminales es de 1.5 volts y circula una corriente de 66 mA?

Solución

Datos:

$$V = 1.5 \text{ volts}$$

$$I = -0.066\ A = -66 \text{ mA}$$

Planteamiento:

$$P = VI$$

Desarrollo:

Como se puede apreciar en la figura 1.22, la corriente *ingresa* a la fuente a través de la terminal negativa. De ahí que se le asigne el signo (–) a su valor numérico. Al proceder de acuerdo con la ecuación 1.12 que describe la potencia aborbida, y sustituir valores se tiene que:

$$P = (1.5 \text{ V})\,(-0.066 \text{ A}) = -0.099 \text{ watts}$$

Resultado:

La potencia absorbida por la fuente es $P = -99$ mW. El signo negativo indica que físicamente la fuente de alimentación e*ntrega* potencia.

De los ejemplos 1.2 y 1.3 se observa que la potencia absorbida por la lámpara es de la misma magnitud que la potencia absorbida por la fuente de alimentación; sólo que son de signos contrarios. El signo negativo en la potencia de la fuente de voltaje, indica que ésta *absorbe* una potencia negativa; o sea que, realmente *no absorbe* potencia, sino que *la entrega*. En cambio, el signo positivo de la potencia en la lámpara es un indicador de que ésta realmente *está absorbiendo* o consumiendo potencia eléctrica.

Se puede hacer un resumen de la situación en los ejemplos 1.2 y 1.3 como aparece en la tabla de datos 1.4.

Tabla 1.4 Concentración de datos obtenidos del análisis del circuito de la figura 1.24 para los ejemplos 1.2 y 1.3.

Elemento	Voltaje	Corriente	P = VI	Potencia absorbida
Fuente	1.5 V	– 0.066 A	(1.5 V) (–0.066 A)	– 0.099 W
Lámpara	1.5 V	+ 0.066 A	(1.5 V) (0.066 A)	+ 0.099 W

Suma total de potencias = 0 w

EJEMPLO 1.4

¿Cuál será la energía que consume la lámpara del circuito de la figura 1.26?

Solución

Datos:

$$P_s = 99 \text{ mW}$$

$$V_s = 1.5 \text{ V}$$

Planteamiento:

De la ecuación 3.10 se tiene que:

Trabajo (energía) W = potencia × tiempo.

Desarrollo:

$$W = \text{potencia} \times \text{tiempo} = 0.099 \text{ watts} \times 1 \text{ s} = 0.099 \text{ joules}.$$

Resultado:

La energía que consume la fuente de alimentación es de 0.099 joules.

1.3 Elementos de un circuito eléctrico

COMPETENCIA:
Comprender el concepto de *elemento de un circuito* y su relación con un circuito físico. [1]

Los conceptos estudiados en la primera sección son importantes y básicos cuando se aplican a uno o varios elementos de un circuito, ya que permiten apreciar el comportamiento del todo como un sistema.

De la misma manera que se utilizan dibujos o símbolos gráficos (iconos) para el esquema de un dispositivo físico real, la expresión *elemento de un circuito* se refiere al modelo matemático que representa el comportamiento de dicho dispositivo, como parte de un circuito físico real.

Se considera como *elemento general de un circuito* al que está compuesto por dos o más *elementos simples de circuito*; y *un elemento simple de circuito* es aquel que no puede subdividirse en otros elementos. Por lo general se usa la expresión abreviada *elemento de circuito* para referirse a los elementos simples.

Un *elemento simple* de un circuito no puede subdividirse en otros dispositivos de dos terminales, y queda matemáticamente representado mediante una expresión que relacione la intensidad de corriente a través del elemento respecto del voltaje que exista entre sus terminales.

Para conocer su comportamiento, primero se deben tener en cuenta los tipos de elementos que existen en los circuitos. Una clasificación general se realiza de acuerdo con su comportamiento respecto de la energía que utilizan. Entonces, con este enfoque pueden ser elementos *activos* o *pasivos*.

La tabla 1.5 que se muestra es sobre la clasificación de fuentes de Voltaje donde se incluye una breve descripción, el modelo matemático que representa, el símbolo que se utiliza para su representación gráfica y las unidades de magnitud de cada uno de ellos.

Tabla 1.5 Fuentes de alimentación de uso común en los laboratorios o en sistemas electrónicos.

Fuente de alimentación	Descripción
Fuente de potencia, de cd	De uso común en un laboratorio de electrónica. Entrega voltaje y corriente de cd a partir de recibir un voltaje desde un tomacorriente o contacto, el cual proporciona la energía eléctrica que suministra la compañía proveedora.[10]
Pilas y baterías	Constituyen una alternativa muy común entre las fuentes de cd. En ellas se emplea la energía de una reacción electroquímica para suministrar potencia eléctrica. Las hay con electrolito líquido, como en el caso de los acumuladores utilizados en los vehículos automotores y también las llamadas *secas*, como la batería alcalina de níquel-cadmio o la alcalina de manganeso.
Celdas solares	Son fuentes de potencia de cd que convierten directamente la energía solar a potencia de cd a través de dispositivos electrónicos dispuestos especialmente para ello.
Fotoceldas	Son dispositivos electrónicos que entregan cierta potencia de cd que se convierte directamente a partir de la energía luminosa que reciben, aunque no sea propiamente la energía solar.

1.3.1 Elementos activos

1.3.1.1 Fuente independiente de voltaje

El primer elemento, fundamental para todo circuito, es una *fuente independiente de voltaje*. Consiste en un sistema o un dispositivo físico que entrega un voltaje entre terminales de salida, independiente de la corriente que circula por sus terminales. Una manera de representar a una fuente independiente de voltaje en un diagrama es por medio de los símbolos presentados en la tabla 1.6. Para quedar bien definido, éste deberá incluir la polaridad, la magnitud y las unidades de la diferencia de potencial que entrega. Como se indica en la tabla 1.5 que muestra la clasificación de fuentes de voltaje.

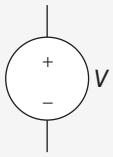
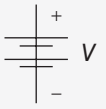
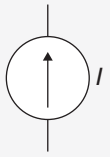
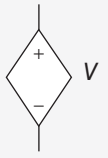
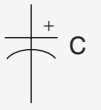
1.3.1.2 Fuente independiente de corriente

Otro elemento importante en los circuitos es la *fuente independiente de corriente.* La intensidad de corriente que circula a través de ella es totalmente independiente del voltaje que existe en sus terminales.

Para quedar bien determinado en un diagrama eléctrico, este elemento requiere de un símbolo, su magnitud y sus unidades, y es indispensable una flecha que indique el sentido en el cual circulará la corriente que entrega, tabla 1.6.

[10] La unidad de resistencia es el Ohm (Ω), cuyo nombre es en honor del físico alemán George Simon Ohm, quien fue de los primeros científicos que se dedicó a medir corrientes y voltajes para encontrar la manera de describirlos matemáticamente.

Tabla 1.6 Clasificación de los elementos de circuito desde el punto de vista de su comportamiento relacionado con la energía: elementos activos y pasivos.

Elementos	Tipos	Nombre y descripción	Modelo	Símbolo	Unidades
Activos Tienen la capacidad de entregar potencia a otro dispositivo externo.	**Independientes** (Su valor no se ve afectado por lo que suceda en el resto del circuito)	**Fuente de voltaje:** Dispositivo ideal de dos terminales, entre las cuales existe una diferencia de potencial eléctrico o voltaje, que es independiente de la corriente que pasa a través de ellas. No representa con exactitud a ningún dispositivo físico real, ya que teóricamente podría entregar una cantidad infinita de energía.	$V_s = k$	 	Volt (V)
		Fuente de corriente: Es una aceptable aproximación de un dispositivo físico de dos terminales, que entrega una corriente eléctrica, independientemente del voltaje que exista entre sus terminales.	$I_s = k$		Ampere (A)
	Dependientes o Controlados	**Fuente de voltaje:** Representa un dispositivo que entrega un voltaje cuyo valor está determinado o controlado por un voltaje presente en otro punto del sistema eléctrico en consideración.	$V_s = f(v)$ $V_s = f(i)$		Volt (V)
		Fuente de corriente: Representa un dispositivo que entrega corriente, cuyo valor está controlado por una corriente presente en otro punto del sistema en consideración.	$I_s = f(v)$ $I_s = f(i)$		Ampere (A)
Pasivos Elementos que solo reciben potencia.	**Fijos y variables**	**Resistor:** Representa la resistencia u oposición que un dispositivo presenta al paso de la corriente eléctrica.	$R = k$		Ohm (Ω)
		Capacitor: Representa al dispositivo formado por dos placas paralelas, capaz de almacenar energía en forma de carga eléctrica.	$i = C\frac{dv}{dt}$		Farad (F)
		Inductor: Representa a un conductor embobinado, que es capaz de almacenar energía en forma de campo magnético.	$v = L\frac{di}{dt}$		Henry (H)

1.3.1.3 Fuentes dependientes de alimentación

Además de las fuentes independientes de alimentación existen otras, en las que el voltaje o la corriente que proporcionan es una cantidad que depende de otro parámetro o valor presente en algún otro punto del sistema eléctrico en consideración. Por esta razón reciben el nombre de *fuentes dependientes*

de alimentación, tanto de voltaje o de corriente. Para distinguir las fuentes independientes se utiliza un símbolo en forma de rombo, con la polaridad bien señalada para el caso de la fuente de voltaje, y una flecha para el caso de la fuente de corriente. Al igual que las independientes, las fuentes dependientes deberán tener bien señalada su magnitud y sus unidades.

En el análisis de los circuitos es necesario conocer las características y especificaciones de las fuentes, tanto de voltaje como de corriente, dependientes e independientes, ya que son los elementos que alimentan con energía eléctrica a otros dispositivos, y constituyen la base para determinar el comportamiento del sistema en su conjunto; o en su defecto, contar con los datos necesarios para determinar las características de dichas fuentes.

Las fuentes de alimentación, tanto las dependientes como las independientes, son elementos *activos*, ya que tienen la *capacidad de entregar potencia* a algún otro dispositivo o a un sistema externo a ellos. En cambio, se consideran elementos *pasivos* a aquellos que representan dispositivos físicos que no son capaces de proporcionar potencia, sino que *sólo la consumen*. Ejemplo de elementos pasivos son el resistor, el capacitor y el inductor. En secciones posteriores se verá que estos dos últimos, aun cuando son pasivos, son elementos capaces de almacenar parte de la energía que reciben, y después de conservarla durante algún periodo determinado, la entregan a otros dispositivos o sistemas externos a ellos, tabla 1.6.

Tengamos presente que los elementos de un circuito son ideales y en consecuencia se representan mediante ecuaciones o modelos matemáticos que se utilizan para representar el comportamiento de dispositivos físicos reales.

En un laboratorio de electrónica se tienen fuentes de alimentación, equipos o sistemas constituidos por partes eléctricas y electrónicas, cuya función es *generar* una diferencia de potencial eléctrico de *corriente directa* (*cd*) o de polaridad fija, a partir de otra energía que reciben a su entrada (*ca*). Desde este punto de vista, los hay de varios tipos, como se puede apreciar en la tabla 1.6.

1.3.2 Elementos pasivos

Los tres elementos pasivos ideales son el *resistor,* el *capacitor* y el *inductor*:

El *resistor* es el elemento pasivo más simple cuyo modelo matemático y símbolo están representados en la tabla 1.6. Describe la oposición de un material o tendencia de éste para impedir el flujo de la corriente eléctrica a través de él. A esta oposición se le llama *resistencia* (*R*), cuya unidad de medida es el *ohm* (Ω).[11]

Se representa mediante la expresión:

$$R = k \qquad \text{(ecuación 1.13)}$$

lo que significa que el valor de la resistencia es constante. En el capítulo 3 se aborda de manera particular el concepto de *resistencia*.

[11] La expresión matemática que describe a la ley de Ohm es la siguiente: $V = I\,R$, donde;
V = voltaje expresado en volts
I = intensidad de corriente en amperes
R = resistencia expresada en ohms

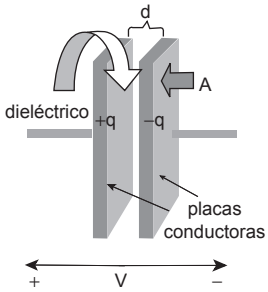


Figura 1.27 Representación de un capacitor de capacitancia ***C***. Al aplicarle una diferencia de potencial ***V*** entre placas, éstas adquieren carga eléctrica de $+q$ y $-q$, respectivamente.

El *capacitor* es un elemento pasivo que modela el comportamiento de un dispositivo físico constituido por dos placas conductoras paralelas, de las mismas dimensiones, figura 1.27, entre las que se coloca un dieléctrico, y están separadas una distancia *d*, medida en *metros* (m). El dispositivo tiene una *capacitancia C*, medida en *farads* (F), que es la capacidad de almacenar y luego entregar cantidades finitas de energía en forma de carga eléctrica. No tiene la capacidad de suministrar una cantidad ilimitada de energía o una potencia promedio finita en un intervalo de tiempo de duración infinita. El modelo que describe a este dispositivo es el siguiente:

$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad \text{(ecuación 1.14)}$$

A partir de la ecuación 1.14 se observa que la intensidad de corriente (*i*) es una variable que depende de las variaciones que tenga el voltaje respecto del tiempo (*dv*/*dt*). Esto quiere decir que si el voltaje no varía en su valor respecto del tiempo ($dv/dt = 0$), la intensidad de corriente será $i = 0$. De lo cual se concluye que un capacitor alimentado por un voltaje de *cd*, donde la frecuencia es cero, no permitirá el paso de la corriente a través de él; se comporta como un circuito abierto (resistencia infinita). Por el contrario, cuanto mayor sea el valor de la variación de *v* respecto del tiempo ($dv/dt \rightarrow$ valores grandes), la intensidad *i*, también tiende a crecer.

De la misma ecuación 1.14 se puede observar, mediante un análisis dimensional, al despejar *C*, que la unidad de capacitancia *farad* (F) relaciona la cantidad de carga eléctrica almacenada en las placas respecto del voltaje entre éstas, ecuación 1.15

$$\text{farad} = \frac{\text{ampere} \cdot \text{segundo}}{\text{volt}} = \frac{\text{coulomb}}{\text{volt}} \qquad \text{(ecuación 1.15)}$$

El **inductor.** También es un elemento pasivo que, desde el punto de vista del análisis de circuitos se define mediante una ecuación que relaciona las variables *corriente* y *voltaje*, entre las cuales existe una constante de proporcionalidad llamada *inductancia*, denotada por *L* y expresada en *henrys* (H).

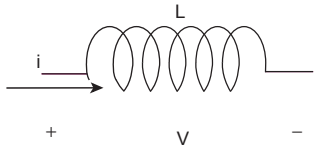


Figura 1.28 Representación simbólica de una inductancia.

Físicamente, un inductor es un alambre conductor embobinado (enrollado) sobre sí mismo. Se representa por una línea en forma de bucles como en la figura 1.28.

Michael Faraday, en Inglaterra, y Joseph Henry, en Estados Unidos, descubrieron casi simultáneamente (algunos historiadores dicen que Faraday se adelantó), que un campo magnético variable podía inducir un voltaje en un circuito cercano. Ellos demostraron que ese voltaje era proporcional a la razón de cambio de la corriente que producía el campo magnético respecto del tiempo. El modelo matemático que describe este fenómeno electromagnético es la ecuación 1.16.

$$v = L\frac{di}{dt} \qquad \text{(ecuación 1.16)}$$

A partir de la ecuación 1.16 se puede observar que el voltaje (v) inducido en un inductor, es una variable que depende de las variaciones que tenga la corriente (di/dt) que circula a través de dicho inductor. Esto quiere decir que si la corriente no varía en su valor respecto del tiempo ($di/dt = 0$), el voltaje inducido en las terminales del *inductor* será

$$v = 0$$

De esto se puede concluir que en un inductor a través del cual circula una corriente de cd, donde la frecuencia es cero, no se inducirá un voltaje entre sus terminales ($v = 0$). El inductor se comporta entonces como un cortocircuito. Por el contrario, cuanto mayor sea el valor de la variación de i respecto del tiempo ($di/dt \rightarrow$ valores grandes), el voltaje entre terminales del inductor v, también tiende a crecer[12].

1.4 Circuitos eléctricos

1.4.1 Redes eléctricas

Cuando se tienen dos o más elementos simples de circuito conectados entre sí, éstos forman una *red eléctrica.* Si esta red contiene por lo menos una trayectoria cerrada, a través de la cual puedan circular cargas eléctricas, se tiene un *circuito eléctrico.* Se puede observar entonces que todo circuito eléctrico es una red, sin embargo, no todas las redes se configuran en forma de circuito eléctrico, figura 1.29. Una red eléctrica que contiene por lo menos un elemento activo (una fuente de voltaje o de corriente), se llama *red activa*; mientras que una red que no contiene ningún elemento activo será una *red pasiva.* Con dependencia en el tipo de elementos que contenga un arreglo de elementos, será el nombre que reciba; por ejemplo, un arreglo formado exclusivamente por resistores será un *arreglo resistivo* (*R*); cuando contiene resistores e inductores, será un arreglo *resistivo-inductivo* (*RL*); será *resistivo-capacitivo* (*RC*) cuando sea una conexión formada por resistores y capacitores; o bien, será un arreglo *RLC* (*resistivo-inductivo-capacitivo*) cuando lo integren elementos pasivos de los tres tipos que se han visto.

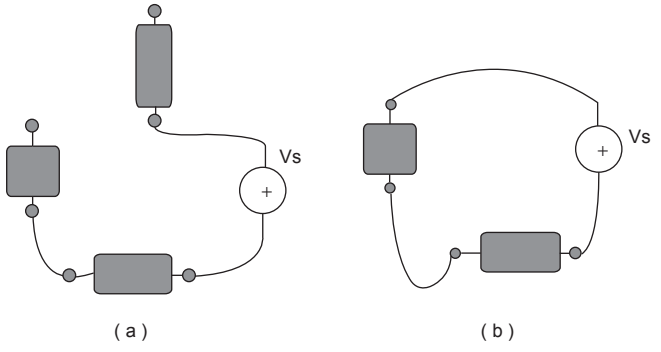


Figura 1.29 *a*) Una red eléctrica que no es un circuito, formado por tres elementos pasivos y una fuente independiente de voltaje.
b) Una red eléctrica que constituye un circuito, formado por dos elementos pasivos y una fuente independiente de voltaje.

[12] El estudio relacionado con el comportamiento de los inductores o bobinas se realiza en cursos de Física (Electricidad y Magnetismo), previos a un curso de Electrónica básica.

1.4.2 Representación

A continuación se verán algunos aspectos básicos en lo que se refiere a la *representación* y los tipos más usados en la solución de problemas en ingeniería, en lo general, y en el análisis de circuitos, en particular.

1.4.2.1 Representación icónica

COMPETENCIA:
Comprender la simbología técnica usada en la representación de los circuitos eléctricos. [1]

Es el tipo de representación que se utiliza para aquellas reproducciones de seres u objetos de la vida real; pueden ser en dos dimensiones (en un plano) o en tres dimensiones. Por ejemplo, las fotografías, los esquemas, los mapas y las copias heliográficas, son representaciones icónicas bidimensionales; mientras que un tren de juguete, una esfera representativa del globo terráqueo, una estatua que reproduce al cuerpo de una persona o la maqueta de un edificio son ejemplos de representaciones icónicas tridimensionales de realidades o prototipos físicos. Todas ellas permiten tener una apreciación real del objeto que *representan* figura 1.30.



Figura 1.30 Ejemplos de representaciones icónicas utilizadas en las computadoras personales.

1.4.2.2 Representación diagramática

Esta forma de representación, aun cuando no tiene parecido alguno con su prototipo, refleja alguna realidad del mismo. Mediante un conjunto de líneas y símbolos, dispuestos apropiadamente, se representa la estructura, el comportamiento, o ambos, de la realidad física en consideración. Los más comunes son los diagramas esquemáticos de circuitos electrónicos, los diagramas de bloques que representan algún proceso, y los circuitos equivalentes.

1.4.2.3 Diagramas esquemáticos

Estos diagramas se utilizan para construir una réplica de los circuitos reales y para ayudar a localizar fallas en su funcionamiento. Se excluye toda información no eléctrica como cajas externas, soportes mecánicos, bornes y otros. Son una especie de *mapas* que ayudan al experimentador a llevar un seguimiento del sistema en cada una de sus partes.

Los símbolos se dibujan de una forma que hace pensar en los componentes de una manera operativa. Estos diagramas pueden contener a los elementos dispuestos de manera diferente a como están en el circuito real. La figura 1.24 muestra un ejemplo del diagrama esquemático de un circuito formado por una fuente de alimentación, una lámpara y un interruptor.

1.4.2.4 Diagramas de circuito equivalente

Es una representación muy relacionada con la idea del modelo de un circuito. Se obtiene al reemplazar en el diagrama esquemático los símbolos de cada componente, por su circuito equivalente. El circuito equivalente se forma a partir de los cinco elementos ideales y de los símbolos extras que designan las condiciones ideales en un circuito.

Por ejemplo, a partir del diagrama esquemático de la figura 1.24 se puede obtener un diagrama de circuito equivalente (de manera abreviada *circuito eléctrico),* de lo que resulta la figura 1.31. Sin embargo, en este último diagrama, todavía existe una representación de la lámpara, que corresponde a una representación esquemática.

Para que el diagrama sea de *circuito equivalente*, esta lámpara deberá sustituirse por el símbolo de un resistor, ya que el filamento de ese dispositivo presenta en la realidad una oposición al paso de la corriente (en este caso es un resistor de 22.5 Ω). El diagrama de circuito equivalente de la figura 1.31 quedará como se presenta en la figura 1.32.

El diagrama de circuito equivalente (o diagrama eléctrico) es una de las formas de reperesentación de los circuitos eléctricos y electrónicos más comunes, ya que utiliza un conjunto de símbolos patrones fáciles de dibujar, aunque sujetos a ciertas reglas. Con estos símbolos se logran representaciones de los circuitos, a través de las cuales el experimentador puede recolectar la información necesaria acerca del circuito considerado.

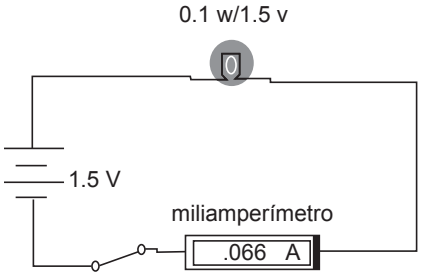


Figura 1.31 Diagrama eléctrico del circuito de la figura 1.24.

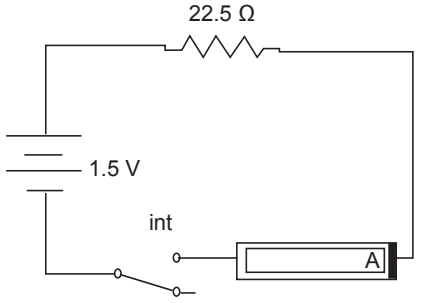


Figura 1.32 Diagrama de circuito equivalente del circuito eléctrico de la mostrado en la figura 1.31.

1.4.2.5 Diagramas de bloques

Se utilizan para ayudar al experimentador y al diseñador a describir la operación, de manera global y general de un dispositivo, un instrumento, un equipo o todo un sistema, que en su esencia resultan complejos. La idea es utilizar dibujos en forma de rectángulos, llamados *bloques*, para cada uno de los cuales existe una o varias vías de *entrada* y una o más vías de *salida*, y cuyo contenido no se especifica. Los bloques se dibujan ordenadamente para que describan la secuencia del proceso que representan.

Por ejemplo en la figura 1.33 se tiene un diagrama a bloques de una fuente de alimentación de cd, misma que se alimenta a partir de un tomacorriente de 117 volts de *ca*, y a su salida entrega un voltaje fijo de 12 volts *cd*. En esta figura no se destaca ningún detalle, sólo se plantea, de manera muy general, cuáles son las etapas que conforman a este sistema de alimentación, colocadas de acuerdo con la secuencia que lleva la transformación de la energía desde una entrada hasta la salida.

1.4.2.6 Representación gráfica

En este tipo de representación, mediante segmentos de recta, barras, sectores circulares, curvas, es posible representar magnitudes de naturaleza muy diversa como temperatura, tiempo, presión, intensidad de corriente, potencia eléctrica. Este tipo de representación es útil para

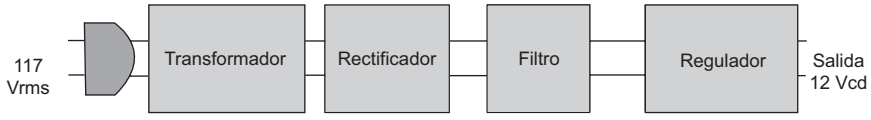


Figura 1.33 Diagrama a bloques de una fuente de alimentación que entrega 12 *Vcd*.

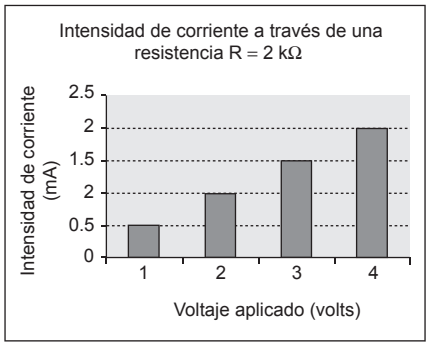


Figura 1.34 Representación gráfica de la relación corriente frente a voltaje en un resistor de 2 kΩ.

fines de visualización, comunicación y predicción de fenómenos o procesos, figura 1.34.

En el análisis de circuitos este tipo de representación juega un papel muy importante para la descripción del comportamiento de algún elemento, circuito o sistema completo.

1.4.2.7 Representación matemática

La expresión:

$$v(t) = A\ sen\ \omega t$$

es un modelo matemático que describe la forma en que un voltaje adquiere valores instantáneos en función del tiempo y predice el valor de dicho voltaje cuando se conoce el valor del tiempo t (segundos), la amplitud A (volts) y la frecuencia ω (rad/s). En el análisis de circuitos es fundamental conocer el modelo o representación matemática, tanto de los elementos de circuitos como de los sistemas completos.

Gracias a la aplicación de las leyes formales de las matemáticas, y mediante el uso de símbolos representativos de fenómenos físicos y de sus interpretaciones, las expresiones matemáticas resultantes pueden manejarse en forma útil, lo que permite hacer predicciones respecto a lo que, con muchas posibilidades, se puede esperar bajo ciertas condiciones.

Indiscutiblemente las matemáticas constituyen un medio de representación muy poderoso, ya que proporcionan medios efectivos de predicción y un lenguaje conciso y universalmente comprensible y, en consecuencia, valioso para la comunicación.

COMPETENCIA:
Valorar, de manera particular, la importancia del *uso correcto del lenguaje simbólico* en el estudio de los circuitos eléctricos, y de modo general, en la ingeniería. [3]

Además, sus símbolos, reglas y demás leyes formales, las hacen un instrumento de razonamiento sumamente valioso. Esto significa que mediante símbolos matemáticos, con sus adecuadas relaciones, se pueden expresar formas y procesos que verbalmente implican un gran conjunto de frases y oraciones.

1.4.3 Simbología

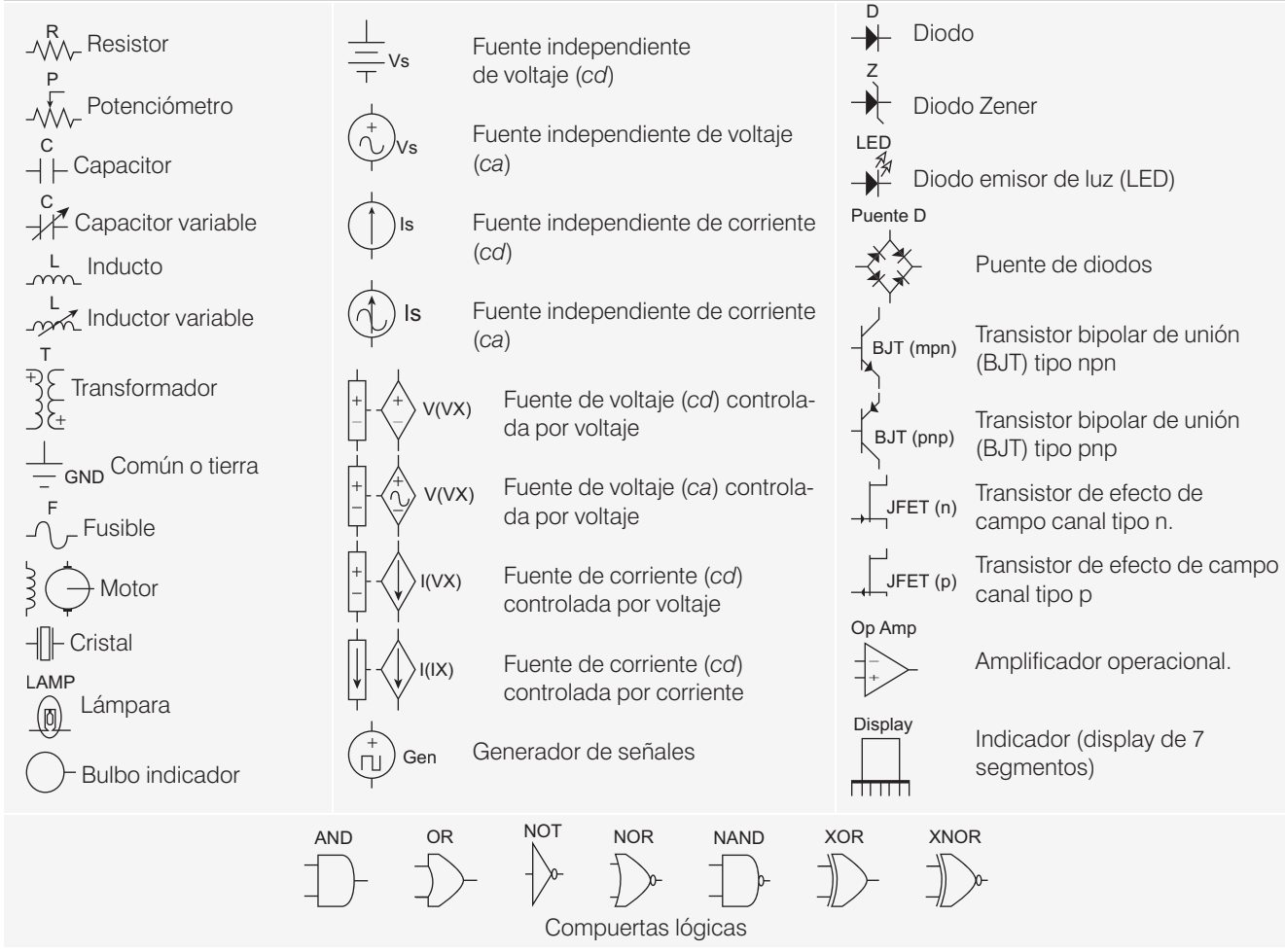
Con este nombre se reconoce al conjunto de figuras, formas o imágenes, mediante las que se representan conceptos e ideas. Cada símbolo se

construye de acuerdo con alguna relación que existe entre la propia imagen que lo constituye y el entendimiento que el conocimiento percibe a través de ésta.

La simbología ha sido para la humanidad una forma de comunicación que se utiliza en diferentes actividades y áreas del conocimiento. Se utiliza en la ciencia, la tecnología, la cultura, las artes, las letras, los deportes y en la vida diaria. Se pueden ver símbolos en las calles, en mercados, escuelas, hospitales, oficinas, fábricas y, desde luego, también en los escritos y tratados, así como en los textos y libros.

En el estudio de los circuitos eléctricos y electrónicos también se usan los símbolos que representan a los diferentes elementos, dispositivos, sistemas y procesos. Con base en ellos se hacen las diversas representaciones que se han mencionado, lo cual facilita enormemente el estudio y el conocimiento de sistemas y circuitos complejos como los que en la actualidad utilizan los diversos campos de la tecnología y la ciencia. En la tabla 1.7 se presentan algunos de los símbolos más usados para representar a los elementos y dispositivos en el área de la electrónica.

Tabla 1.7 Símbolos más usados para la representación de elementos y dispositivos en los circuitos eléctricos y electrónicos.



COMPETENCIAS:
- Comprender, de forma particular, el concepto *simulación* para el estudio de los circuitos y en general para la ingeniería. [1]
- Valorar la importancia del *proceso de simulación* en la solución de problemas. [3]

1.4.4 Simulación

A la técnica que consiste en realizar experimentación y observación sobre una *representación* de un objeto o sistema real, se le conoce como *simulación.* A través de la simulación es posible predecir el comportamiento de la realidad física que ésta representa; por ejemplo, mediante un modelo de avión propuesto a escala, es posible estimar las fuerzas a que estará sujeto el avión real (en este caso llamado prototipo), mediante la observación del comportamiento del modelo en un túnel de viento, bajo condiciones similares a las del prototipo, lo que permite predecir si éste podrá o no resistir las fuerzas que actuarán sobre él.

Con una maqueta un ingeniero de la construcción puede predecir las características de un edificio o de un puente, antes de su construcción real. De la misma manera, a través de un simulador electrónico en una computadora podremos representar el comportamiento de un circuito

Por medio de la simulación el ingeniero evalúa diversos diseños sin generar gastos prohibitivos, o requerir cantidades de tiempo, o evitar peligros a los que probablemente pueda estar expuesto al trabajar con el prototipo real. El uso de la simulación va en aumento conforme crecen las inversiones y los riesgos (como en vuelos espaciales) que se asocian con la magnitud de las innovaciones presentes en estas ramas de la ingeniería.

En electrónica se utilizan principalmente dos tipos de simulación: la *analógica* y la *digital.*

1.4.4.1 Simulación analógica

A diferencia de la simulación icónica, en la cual las realidades físicas se reducen a modelos en todo semejantes al prototipo, existe la *simulación analógica* en la que el modelo no tiene ningún parecido físico con su prototipo. La ejemplifican los dispositivos electrónicos empleados para predecir el comportamiento y la efectividad de los posibles sistemas de control del tráfico vehicular que se utilizan en una avenida o carretera, o en un sistema de control vial para trenes de pasajeros. O bien para describir el funcionamiento actual de alguno de estos sistemas reales. En este ejemplo, se reproducen hechos reales mediante el uso de pulsaciones eléctricas y señales luminosas de colores aun cuando no exista ningún parecido físico entre los alambres conductores y los impulsos eléctricos y luces, con las calles y los automóviles o los trenes.

En este tipo de simulación se utilizan los sistemas electrónicos que son los encargados de llevar y traer señales eléctricas desde el lugar donde se originan hasta algún puesto de control y seguimiento. De hecho, el *mundo real es analógico*, y a través de estos sistemas, este mundo puede ser simulado en algún tablero de control o en el monitor de alguna computadora, quedando representado por símbolos,

luces, colores, sonidos, cada uno con un significado definido por los experimentadores.

1.4.4.2 Simulación digital

Básicamente consiste en una serie de cálculos numéricos realizados paso a paso y de una serie de decisiones, con pequeños intervalos de variación, realizadas conforme a un conjunto de reglas específicas. Esta característica la hace adaptable a una computadora digital. La simulación digital tiene cada día más aplicaciones en procesos como los transportes, en la industria eléctrica, en procesos de fabricación, distribución, tráfico aéreo, terrestre o marino, en detección de fallas de sistemas, en vuelos espaciales y varios problemas de mantenimiento y de control de sistemas.

Para el estudio de los circuitos existe una gran variedad de simuladores digitales que permiten al diseñador y al experimentador confirmar cálculos matemáticos y predecir el comportamiento de un sistema electrónico real, con un alto nivel de confiabilidad. Algunos de ellos son muy complejos, y en otros casos son muy sencillos y accesibles. Son programas de computadora, algunos de uso general y otros de aplicación específica, en versiones profesionales o estudiantiles. Estas últimas, desde luego, con mayor facilidad en su manejo e interpretación, resultan ser más económicas, pero no menos efectivas.[13]

El proceso de la simulación, digital y analógica, además de hacer posible la experimentación y mejores predicciones, presenta la ventaja adicional de una escala de tiempos reducida; es decir, por estos medios es posible simular años de tiempo real en horas o minutos. Estos tipos de simulación, realizados en tiempos sorprendentemente cortos, sintetizan experiencias que, en condiciones normales, requieren de años para adquirirlas. Esta cualidad de "ahorro de tiempo" es una ventaja notable de la simulación.

1.4.5 Importancia de los modelos

COMPETENCIA:
Desarrollar la capacidad para describir con sus propias palabras *la importancia de las técnicas de representación y los modelos*, en el estudio de los circuitos. [2]

El término que se usa para denotar a todas las representaciones descritas, es *modelo*. Esto quiere decir que dicho término adquiere ahora un significado mucho más amplio que en la vida común, en la que por *modelo* suele entenderse una reproducción tridimensional de algún objeto o persona. En la terminología de ingeniería, *modelo* es sinónimo de *representación*, pudiendo hablarse de modelos icónicos, diagramáticos, de simulación y matemáticos, salvo que se adopte algún acuerdo distinto.

[13] Nota del Autor. En este libro se utiliza como simulador de circuitos electrónicos *Electronics workbench,* versión estudiantil, que es un software confiable, de fácil y económica adquisición.

Los modelos facilitan la visualización de la naturaleza o comportamiento de un sistema, estructura o fenómeno, que difícilmente podrían captarse sin ellos. Por ejemplo, en el estudio de la electrónica, en sistemas de fabricación, procesos químicos y mecanismos, se hace indispensable el uso de los modelos diagramáticos o de cualquier otro tipo, a fin de que sean comprensibles a la mente humana.

Los modelos también son sumamente útiles para dar a conocer a otros la naturaleza y comportamiento de una creación o invento, para someterlo a aprobación, construcción, manejo y mantenimiento del mismo.

Durante la solución de cualquier problema, el ingeniero, usualmente debe considerar muchas soluciones posibles, y a fin de decidir cuál de ellas es la mejor, deberá disponer de elementos que le permitan predecir la eficiencia de cada una de ellas. Para esta finalidad, los modelos han demostrado ser sumamente valiosos. Asimismo, también tienen amplia utilización como medios de control y como auxiliares en el adiestramiento.

Desde las dos o tres últimas décadas del siglo XX se han venido desarrollando de manera importante los modelos de *realidad virtual*, mediante la aplicación de diversos elementos de carácter electrónico, tanto de accesorios (hardware) como de programación (software), lo que en conjunto permite que un experimentador o usuario pueda "ver" y "vivir" de manera virtual procesos y experiencias no reales, pero que a través de este tipo de simulación o modelado se asemejan en gran medida a lo que podría ser una *verdadera realidad*. En la primera década del siglo XXI estas representaciones han tenido cada vez mayor aplicación en las áreas de la salud, la medicina, la ingeniería, la educación, los deportes y muchas más, con grandes perspectivas para los años venideros.

Actividades para la evaluación de competencias

Estudio de las cargas eléctricas, de Coulomb a Bohr

1.1 A partir del modelo matemático que describe a la ley de Coulomb, explica el contenido físico de esta ley. [1]

1.2 Explica lo que desde tu punto de vista consideras más relevante de la teoría atómica de Thompson, y compárala con los estudios que realizó Coulomb. [1]

1.3 ¿Cuáles son los principales aspectos que hacen diferente a la teoría atómica de Thompson respecto de la teoría propuesta por Rutherford? [3]

1.4 Explica en qué consiste el experimento que realizó Rutherford para emitir su teoría respecto de las partículas subatómicas. [2]

1.5 ¿Qué diferencias existen entre la teoría atómica emitida por Rutherford y la teoría de Bohr? [2]

Conceptos básicos

1.6 Explica el concepto de *carga eléctrica*. [1]
1.7 Explica por qué a un tipo de carga eléctrica se le denomina *negativa* y a otra *positiva*. [1]
1.8 Explica en qué consiste la electrización de un cuerpo. [2]
1.9 Explica en qué consiste la ionización de un átomo. [1]
1.10 ¿Cómo puede saberse en el laboratorio que un cuerpo está cargado eléctricamente? [2]
1.11 ¿Qué es el potencial eléctrico? [1]
1.12 ¿Qué es la corriente eléctrica? [1]
1.13 ¿En qué consiste la corriente eléctrica a través de un material conductor? [1]
1.14 ¿Cómo se puede detectar experimentalmente una diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos? [2]
1.15 ¿Es lo mismo el concepto "carga eléctrica" que "potencial eléctrico"? Justifica tu respuesta. [1]
1.16 ¿Existe alguna relación entre la corriente eléctrica y el potencial eléctrico? Justifica tu respuesta. [1]
1.17 ¿Qué es una fuente de voltaje? [1]
1.18 Explica cómo circulan las cargas eléctricas en un conductor, debido a una diferencia de potencial. [2]
1.19 ¿Cuál será la potencia absorbida en cada uno de los elementos del circuito de la figura 1.35, si la fuente de alimentación es de 6 V, y en el circuito circula una intensidad de corriente de 500 mA? En la lámpara *A* hay una caída de potencial de 2.5 V y en la lámpara *B* hay una caída de 3.5 V. [2]

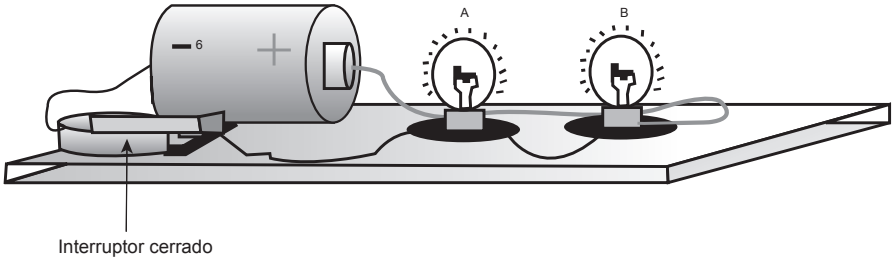


Figura 1.35 Esquema del circuito eléctrico para la actividad 1.19.

1.20 Para el problema 1.19 diseña un cuadro en el cual concentres todos los datos claramente. Calcula la potencia total absorbida en el sistema. [2]
1.21 Para el problema 1.19, ¿cuál será la energía total consumida, en joules, por las dos lámparas, si éstas encienden durante 30 minutos? ¿Cuál será la energía que entrega la fuente durante el mismo periodo? [2]

Elementos de un circuito eléctrico

1.22 ¿Qué se entiende por *elemento de un circuito*? [1]
1.23 Explica lo que se entiende por *elemento activo* y por *elemento pasivo* en un circuito. [1]
1.24 ¿Cuál es el objetivo del análisis de los circuitos eléctricos y electrónicos?
1.25 ¿Qué papel desempeñan los elementos de un circuito en el análisis de los circuitos eléctricos? [1]
1.26 Si el voltaje que entrega una fuente de alimentación está dado por la expresión $v(t) = 75 \cos 377t$ (volts) ¿Cuál será el voltaje instantáneo para $t = 12$ s? [2]
1.27 ¿Cuál es la característica inicial de los elementos pasivos en los circuitos eléctricos? [2]
1.28 A partir de la ecuación 1.14 explica el comportamiento de la corriente eléctrica que fluye por un capacitor. [2]
1.29 A partir de la ecuación 1.16 explica el comportamiento del voltaje en las terminales de un inductor. [2]

Circuitos eléctricos

1.30 Explica la diferencia esencial entre una red y un circuito eléctrico. [3]
1.31 ¿En qué consiste la *representación* en ingeniería? [1]
1.32 Menciona tres tipos de representación usados en ingeniería y explica en qué consiste cada una. [1]
1.33 Elabora un diagrama eléctrico que represente al circuito de la figura 1.35 e identifica cada una de sus partes, así como el voltaje y la corriente asociados a cada elemento. [2]
1.34 Observa con detenimiento la representación de la figura 1.35 e identifica el objetivo para el cual crees que se ha ensamblado el circuito representado. [3]
1.35 Elabora un diagrama a bloques del proceso que se verifica en el circuito de la figura 1.35 e identifica el objetivo para el cual se ensambló. [3]
1.36 Elabora una gráfica de la intensidad de corriente (i) vs el voltaje (v) en cada uno de los elementos de la figura 1.35. [3]
1.37 Explica qué papel desempeña la simbología para el estudio de los circuitos eléctricos y electrónicos. [1]
1.38 Desarrolla una simulación del circuito de la figura 1.35 e imprime en papel tu resultado. (Recuerda que puedes asignarle valores a cada elemento; es decir, los puedes editar). [2]
1.39 Expresiones como la 1.14 y la 1.16 son *ecuaciones matemáticas*. ¿Por qué se les considera como *modelos matemáticos*? [3]
1.40 A partir de tu respuesta para el problema 1.39 explica qué entiendes por un modelo matemático y qué importancia tienen los modelos matemáticos en la ingeniería. [3]

Notas:

[1] Competencias de la dimensión Instrumental.
[2] Competencias de la dimensión Sistémica.
[3] Competencias de la dimensión Interpersonal.
……..

Capítulo 2

Circuitos resistivos y ley de Ohm

Estructura

Temas	Conceptuales
2.1 Resistencia y resistividad	• Conceptos de *resistencia y resistividad*, como propiedad de los materiales, y formas para su cuantificación. • Valor del coeficiente de resistividad para diferentes materiales conductores.
2.2 Resistencia y temperatura	• Efecto de la temperatura en la resistencia eléctrica de los materiales
2.3 Tipos más comunes de resistores 2.3.1 Resistores de carbón. 2.3.2 Resistores de alambre. 2.3.3 Resistores tipo película. 2.3.4 Resistores variables. 2.3.5 Décadas de resistores.	• Conceptos de resistores de valor fijo y variable. • Tipos de resistores de acuerdo con su valor y material de fabricación.
2.4 Medición de resistencia	• Conceptos de *exactitud* y *precisión* en las mediciones. • Concepto de *error* en las mediciones. • Concepto de *tolerancia* en la medición de resistencia y su aplicación en circuitos. • Conocimiento de instrumento para medición de los resistores. • Código de colores para interpretación de valores en los resistores.

temática

	CONTENIDOS	
	Procedimentales	**Actitudinales**
	• Cálculo de la resistencia eléctrica de los materiales en función del coeficiente de resistividad. • Análisis dimensional en problemas relacionados.	• Argumentos técnicos para propiciar el interés por la búsqueda y localización de fuentes de información relacionadas con el tema. • Oportunidades para el desarrollo de una cultura de iniciativa frente a la realidad.
	• Cálculo del valor de la resistencia eléctrica de un material en función de la temperatura. • Análisis dimensional en problemas relacionados.	• Argumentos técnicos para propiciar el interés por la búsqueda y localización de fuentes de información relacionadas con el tema. • Oportunidades para el desarrollo de una cultura de iniciativa frente a la realidad.
	• Determinación del intervalo de valores de un resistor considerando su tolerancia. • Uso de hojas de datos característicos de los resistores. • Uso de las décadas de resistores en el laboratorio de electrónica.	• Apreciar la importancia que tiene el conocimiento de los materiales que se emplean en la fabricación de resistencias eléctricas. • Elementos que propician el desarrollo de una cultura de evaluación y autoevaluación. • Actividades que fomentan el interés por desarrollar tareas en equipos de trabajo.
	• Lectura de valores de los resistores usando el código de colores. • Técnicas utilizadas para medición de resistencias en el laboratorio de electrónica. • Cálculo del error en la medición de resistencia. • Comparación de los valores especificados por el fabricante y valores medidos con un óhmetro.	• Actividades que permiten valorar el esfuerzo y el trabajo individual mediante la determinación de exactitud y precisión en la resolución de problemas relacionados con los temas correspondientes. • Elementos que permiten desarrollar el hábito de la autoevaluación.

Estructura

Temas	Conceptuales	
2.5 Ley de Ohm	• Enunciado de la ley de Ohm destacando las variables que en ella intervienen.	
2.6 Conductancia y conductividad	• Conceptos de *conductancia y conductividad* en los materiales, su relación y su importancia en los circuitos. • Unidades de medición. • Información acerca de valores de conductancia y conductividad en diferentes materiales.	
2.7 Potencia y energía eléctrica en los resistores	• Conceptos de potencia y energía en las resistencias, y su importancia en los circuitos. • Unidades de medición.	
2.8 Arreglos de resistores en serie 2.8.1 Resistores conectados en serie. **2.9 Arreglos de resistores en paralelo** 2.9.1 Resistores conectados en paralelo.	• Concepto de arreglos resistivos. • Clasificación de los arreglos resistivos y su importancia en los circuitos.	
2.10 Cálculo, simulación y medición de diversos arreglos resistivos 2.10.1 Cálculo de una resistencia equivalente por reducciones sucesivas. 2.10.2 Simulación de un circuito resistivo.	• Concepto de resistencia equivalente. • Métodos para determinar la resistencia equivalente en arreglos resistivos. • Concepto de simulación en la ingeniería. • Uso de los simuladores por computadora en la ingeniería.	
Actividades para la evaluación de competencias		

	temática

	CONTENIDOS	
	Procedimentales	**Actitudinales**
	• Aplicación de la ley de Ohm para el cálculo de las variables que en ella intervienen. • Métodos para la resolución de problemas mediante el modelo de la ley de Ohm.	• Valorar la importancia que tiene la ley de Ohm para el desarrollo de la ciencia, y su impacto en la tecnología de la actualidad.
	• Búsqueda y uso de hojas de datos para la conductividad de los materiales. • Métodos para el cálculo de la conductancia de un material. • Análisis dimensional en resolución de problemas relativos.	• Argumentos técnicos para propiciar el interés por la búsqueda y localización de fuentes de información relacionadas con el tema. • Elementos que propician el desarrollo de una cultura de investigación.
	• Resolución de problemas para el cálculo de la potencia eléctrica absorbida por elementos de un circuito. • Aplicación del principio de la conservación de la energía en arreglos eléctricos.	• Actividades que fomentan el interés por desarrollar tareas en equipos de trabajo. • Elementos para valorar la importancia de una buena administración de la energía eléctrica en usos domésticos, públicos e industriales.
	• Proceso para el modelado matemático de arreglos resistivos.	• Argumentos que propician el interés por crear métodos propios para resolución de problemas.
	• Cálculo de resistencia equivalente en un arreglo tipo serie. • Cálculo de resistencia equivalente en un arreglo tipo paralelo. • Cálculo de resistencia equivalente en un arreglo mixto. • Resolución de problemas con arreglos resistivos por reducciones sucesivas. • Representación de arreglos resistivos en un simulador por computadora. • Proceso para determinar la exactitud de un cálculo de resistencia equivalente en un arreglo resistivo con relación al resultado dado por un simulador.	• Argumentos para la autoevaluación del trabajo propio. • Argumentos para la evaluación del trabajo de otras personas. • Elementos para tomar decisiones con relación a formas de trabajo. • Apreciar la importancia que tiene la simulación en procesos de ingeniería.

Orientación general		
Desarrollar en el estudiante la capacidad para comprender la ley de Ohm, así como la importancia de su correcta interpretación y aplicación para el análisis y diseño de circuitos eléctricos resistivos.		
Competencias		
Dimensión Instrumental [1]	**Dimensión Sistémica [2]**	**Dimensión Interpersonal [3]**
Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:
1.1 Comprender los conceptos de *resistencia* y *resistividad* eléctricas en los materiales. 1.2 Conocer el efecto que la temperatura tiene sobre la resistencia eléctrica en los materiales. 1.3 Conocer la clasificación los resistores de uso más común, según su estructura y su aplicación en los circuitos eléctricos. 1.4 Comprender el concepto de *tolerancia* en el valor de los resistores. 1.5 Leer el valor de un resistor con la ayuda del código de colores. 1.6 Describir la técnica para medición de resistores con un óhmetro. 1.7 Comprender la ley de Ohm y la importancia de su interpretación y aplicación adecuada de en el análisis y diseño de circuitos resistivos. 1.8 Comprender los conceptos de *conductancia* y *conductividad* eléctricas en los materiales. 1.9 Comprender los conceptos de *potencia* y *energía eléctrica consumidas* por elementos resistivos en los circuitos eléctricos. 1.10 Comprender las técnicas para la reducción de arreglos resistivos a circuitos equivalentes. 1.11 Comprender la importancia de la simulación en el análisis y diseño de circuitos resistivos.	2.1 Calcular el valor de la resistencia eléctrica de un conductor en función del material del cual está constituido. 2.2 Cuantificar el efecto que la temperatura tiene sobre la resistencia eléctrica en los materiales. 2.3 Medir resistores con la ayuda del óhmetro. 2.4 Aplicar la ley de Ohm en el análisis y diseño de circuitos resistivos. 2.5 Calcular la potencia y la energía eléctrica consumidas por elementos resistivos en los circuitos eléctricos 2.6 Calcular la resistencia equivalente en arreglos resistivos. 2.7 Usar simuladores por computadora como herramientas de apoyo para el análisis y diseño de circuitos resistivos.	3.1. Valorar la importancia de comprender el comportamiento de las cargas eléctricas en los diversos materiales en función de las propiedades eléctricas de éstos. 3.2. Valorar la importancia de la Ley de Ohm como base para el desarrollo de la tecnología eléctrica y electrónica. 3.3. Autoevaluar su trabajo.

Introducción

COMPETENCIA:
Valorar la importancia de comprender el *comportamiento de las cargas eléctricas* en los diversos materiales en función de las propiedades eléctricas de éstos. [3]

El capítulo 1 trató sobre conceptos básicos como *carga eléctrica*, *potencial* y *diferencia de potencial eléctrico*, *fuentes de voltaje* e *intensidad de corriente,* que se ligan directamente con un circuito y con los elementos que lo forman, además de algunos aspectos relacionados. Ahora ya sabes que una corriente fluye a través de un conductor cuando se aplica una diferencia de potencial eléctrico, o voltaje, entre sus extremos. Esta diferencia de potencial se asocia a un campo eléctrico, cuyo efecto se manifiesta por la aceleración que imprime a los portadores[1] de la carga eléctrica. En este proceso los electrones tienden a moverse por el medio conductor, cada vez a mayor velocidad, lo que ocasiona que en su camino *choquen* con los átomos que integran al conductor. En cada choque los electrones pierden energía, pero el mismo campo eléctrico les vuelve a imprimir nueva energía que les permite continuar su viaje, atraídos por el polo positivo del campo que les rodea, figura 2.1.

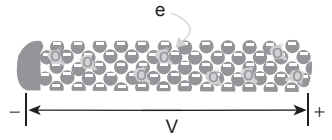


Figura 2.1 Movimiento de los electrones en un conductor, debido a un voltaje *V* aplicado.

El proceso de choque-aceleración-choque se mantiene conforme se aplica voltaje al conductor. Y en ese proceso cada vez que un electrón móvil choca con un átomo del material, el electrón pierde energía mientras que el átomo recibe una cierta cantidad de esa energía, es un fenómeno de transferencia de energías, lo que en conjunto y en promedio resulta en una disminución de la velocidad de los electrones, y en consecuencia, en una disminución de la corriente que circula en el conductor. Entonces se presenta un fenómeno de oposición o *resistencia* al paso de la corriente por parte del material conductor.

El presente capítulo se enfoca a los conceptos básicos de la resistencia que los materiales presentan al paso de la corriente eléctrica y las técnicas mediante las cuales se controla el paso de una corriente a través de un circuito o alguna sección de éste. También presenta las técnicas básicas que permiten al experimentador hacer cálculos, simulaciones, mediciones y comprobaciones experimentales en el laboratorio, de circuitos resistivos; así como la ley de Ohm, que establece la relación entre una intensidad de corriente, el voltaje que la ocasiona y la resistencia que presenta un conductor al paso de las cargas.

Además aborda temas sobre circuitos resistivos; es decir, redes compuestas únicamente por resistores, en las cuales existe por lo menos una trayectoria cerrada; o bien, aunque no tenga en un principio una trayectoria cerrada, ésta se logra al conectar el conjunto de resistores con alguna fuente de alimentación.

2.1 Resistencia y resistividad

COMPETENCIA:
Comprender los conceptos de *resistencia* y *resistividad* eléctricas en los materiales. [1]

Cuando en el estudio de circuitos eléctricos y electrónicos se habla de *resistencia eléctrica*, o simplemente *resistencia*, se hace referencia a la oposición que un material presenta para que las cargas eléctricas pasen a través

[1] El análisis se hace con respecto a cargas negativas o electrones únicamente.

de él. Esta oposición varía de un material a otro, o de un cuerpo a otro aun cuando se trate del mismo material. Esto significa que la intensidad de corriente que fluye a través de un conductor, bajo la influencia de un voltaje, no siempre será la misma. A mayor oposición (mayor resistencia) se tendrá una menor intensidad de corriente eléctrica, y viceversa. Y se habla de mayor o menor resistencia porque el nivel de oposición a la corriente eléctrica del conductor depende del material que lo constituye.

Para cuantificar la magnitud o valor de la resistencia eléctrica se ha tomado como unidad al *ohm*[2] (Ω) y, aunque existen varios métodos para medirla, el más común es usar el instrumento llamado *óhmetro.* Un *ohm* equivale a la resistencia que presenta al paso de la corriente eléctrica, una columna de mercurio (Hg) de 106.3 cm de longitud y una sección transversal de 1 mm^2 a una temperatura de 0 °C. O bien, 1 *ohm* es la resistencia que presenta un material cuando a través de él circula una corriente de 1 *ampere*, debido a una diferencia de potencial de 1 *volt*.

$$1 \text{ ohm} = \frac{1 \text{ volt}}{1 \text{ ampere}} \qquad \text{(ecuación 2.1)}$$

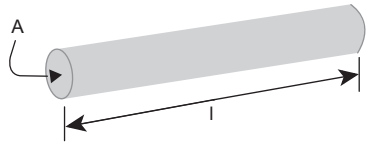


Figura 2.2 Esquema de un conductor de longitud *l* y sección transversal de área *A*.

La *resistencia* en un material, al igual que muchas de sus propiedades como el color, la dureza, el sabor, la determinan las características específicas de los átomos que lo constituyen –principalmente por la disposición de los electrones periféricos y la manera en que se enlazan para formar las moléculas– como por las dimensiones longitudinales que tenga en su exterior. En resumen, son cuatro factores los que determinan la resistencia en un conductor, y se relacionan mediante la siguiente ecuación, figura 2.2:

$$R = \rho \frac{l}{A} \qquad \text{(ecuación 2.2)}$$

donde: R = resistencia del material, en ohms (Ω)
ρ = resistividad del material, en ohms-metro (Ω m).
l = longitud del material, en metros (m).
A = Área transversal del material, en metros cuadrados (m^2).

Por tanto:

$$\text{Resistencia} = \text{resistividad} \left[\frac{\text{longitud del conductor}}{\text{área de la sección transversal del conductor}} \right]$$

A partir de la ecuación 2.2 es posible deducir que la magnitud de la resistencia en un conductor es directamente proporcional, tanto a la resistividad del material que lo conforma, como a la longitud del mismo, e inversamente proporcional al área de su sección transversal. La implicación práctica es que de dos trozos de un mismo conductor, un alambre

[2] Llamado así en honor del físico alemán Georg Simon Ohm (1787-1864).

de cobre del número 22, por ejemplo, un metro de longitud y otro de 20 cm, tendrá mayor resistencia el tramo de 1 m que el tramo de 20 cm. O bien, de dos tramos de conductor de cobre de la misma longitud, pero uno más grueso que el otro, presentará menor resistencia el tramo más grueso, ya que tiene un área mayor en su sección transversal.

Por otro lado, un conductor con baja resistividad presentará poca resistencia al paso de la corriente, por tanto, las cargas eléctricas se desplazarán a través de él con relativa facilidad, sin pérdida de energía por los choques con otras partículas; mientras que un material con alta resistividad presentará mayor resistencia al paso de la corriente, impidiendo inclusive, el movimiento de cargas eléctricas a través de él. De aquí que, según su comportamiento ante una corriente eléctrica debida a una diferencia de potencial, los materiales se clasifican en *conductores* y *no conductores* o aislantes. En el capítulo 6 se presentan los conceptos básicos de la teoría de bandas de energía, la cual proporciona una explicación respecto de esta clasificación. En la tabla 2.1 se presentan los valores de resistividad para diferentes materiales.

EJEMPLO 2.1

¿Cuál será el valor de la resistencia de un tramo de alambre de cobre de 2 m de longitud, con un área de 1.8 mm^2 en su sección transversal?

COMPETENCIA:
Desarrollar la capacidad *para calcular el valor de la resistencia eléctrica* de un conductor en función del material del cual está constituido. [2]

Solución

Datos:

$l = 2\ \text{m}$
$A = 1.8\ \text{mm}^2 = 1.8 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$
$\rho_{\text{Cu}} = 1.72 \times 10^{-8}\ \Omega\,\text{m}$
$R = ?$

Desarrollo:

$$R = \left(1.72 \times 10^{-8}\ \Omega\,\text{m}\right)\left(\frac{2\ \text{m}}{1.8 \times 10^{-6}\ \text{m}^2}\right)$$

Resultado:

$R = 0.0191\ \Omega$

Tabla 2.1 Resistividad de algunos materiales.

Material	Resistividad, ρ (Ω-m)
Plata	1.47×10^{-8}
Cobre	1.72×10^{-8}
Aluminio	2.63×10^{-8}
Oro	4.7×10^{-8}
Fierro	10.0×10^{-8}
Nicromel	100×10^{-8}
Vidrio	De 10^{10} a 10^{14}
Madera	De 10^{8} a 10^{11}
Caucho sólido	De 10^{13} a 10^{16}

EJEMPLO 2.2

Calcula la longitud de un tramo de cable de aluminio enrollado cuya sección transversal tiene forma circular con un diámetro de 0.317 cm, cuya resistencia total es de 0.212 Ω.

Solución

Datos:

$R = 0.212\ \Omega$
$\rho_{Al} = 2.63 \times 10^{-8}\ ^{P}\Omega\text{-m}$
$A = r^2\,\pi$
$d = 0.317\ \text{cm}$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{0.00317\ \text{m}}{2}$$

$r = 0.001585\ \text{m}$

Desarrollo:

De la ecuación 2.2 se tiene que:

$$l = \frac{R\,A}{\rho}$$

donde $A = r^2\pi = (0.001585\ \text{m})^2\pi$
$A = 0.000007892\ \text{m}^2$
entonces:

$$l = \frac{\left(0.212\ \Omega\right)\left(0.000007892\,\text{m}^2\right)}{2.63\times10^{-8}\ \Omega\ \text{m}}$$

Resultado:

$$l = 63.61\ \text{m}$$

2.2 Resistencia y temperatura

COMPETENCIA:
Conocer el efecto que la *temperatura* tiene sobre la *resistencia eléctrica* en los materiales. [1]

Una característica de los materiales conductores es que conforme aumenta su temperatura, la actividad de sus átomos se incrementa, lo cual ocasiona mayor número de choque entre partículas; esto dificulta el paso, a través del cuerpo del conductor, de los electrones portadores de la energía eléctrica. Lo anterior se interpreta como un aumento en la *resistencia*; es decir, a mayor temperatura mayor resistencia en el conductor, y viceversa.

Mediante la experimentación se ha podido establecer una constante de variación de la resistencia en función de la temperatura para cada material; se le llama *coeficiente de temperatura para la resistencia* y se simboliza con α_1, letra alfa, y tiene dimensiones de 1/°C. En la tabla 2.2 se muestran los valores del coeficiente de temperatura para algunos materiales.

De acuerdo con lo anterior, cuando un conductor es sometido a un cambio de temperatura, el valor de su resistencia también cambia. Así se puede hablar de un valor inicial de la resistencia (R_i) que corresponde a una temperatura inicial (T_i), y un valor final de resistencia (R_f) para una temperatura final (T_f). Estas variables y el coeficiente

Tabla 2.2 Coeficiente de temperatura para la resistencia (α_1), en algunos materiales.

Material	α_1(1/°C)
Plata	0.0038
Cobre	0.00393
Oro	0.0034
Aluminio	0.00391
Tungsteno	0.005
Níquel	0.006
Fierro	0.0055
Nicromo	0.00044

de temperatura (α_1) de un material se relacionan como lo expresa la ecuación 2.3:

$$R_f = R_i[1 + a_1(T_f - T_i)] \qquad \text{(ecuación 2.3)}$$

EJEMPLO 2.3

Si el conductor del ejemplo 2.2 se encuentra a una temperatura ambiente de 25 °C, y de pronto se le somete a un aumento de temperatura hasta alcanzar una temperatura de 95 °C, ¿cuál será la variación en el valor de su resistencia?

COMPETENCIA:
Desarrollar la capacidad para *cuantificar el efecto que la temperatura* tiene sobre la *resistencia eléctrica* en los materiales. [2]

Solución

Datos:

$R_i = 0.212\ \Omega$
$T_i = 25\ ^\circ\text{C}$
$T_f = 95\ ^\circ\text{C}$
$\alpha_{1\text{Al}} = 0.00391\ \frac{1}{^\circ\text{C}}$
$\Delta_R = ?$

Desarrollo:

Aplicando la ecuación 2.3:

$$R_f = (0.212\ \Omega)\left[1 + 0.00391\frac{1}{^\circ\text{C}}(95\ ^\circ\text{C} - 25\ ^\circ\text{C})\right] = 0.269\ \Omega$$

La variación de la resistencia será entonces:

$$\Delta_R = R_f - R_i = 0.269\ \Omega - 0.212\ \Omega = 0.057$$

Resultado:

$$\Delta_R = 0.057\ \Omega = 27.3\% \uparrow \text{(incremento)}$$

EJEMPLO 2.4

Un alambre de cobre de 100 m de longitud y 2 mm de diámetro tuvo un aumento de 10% en su resistencia total por efecto de la temperatura. ¿A qué valor debió cambiar la temperatura, si originalmente se encontraba a 25 °C?

Solución

Datos:

$l = 100$ m
$d = 2$ mm $= 0.002$ m
$\Delta_R = R_f - R_i = 10\%$
$T_i = 25\ ^{\circ}\text{C}$
$T_f = ?$

$$\alpha_{1\text{Cu}} = 0.00393\ \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$$

Desarrollo:

Primero se calcula la resistencia del conductor a la temperatura inicial $T_i = 25\ ^{\circ}\text{C}$, con la aplicación de la ecuación 2.2:

$$R_i = \left(1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}\right)\left(\frac{100\ \text{m}}{(0.001\ \text{m})^2\,\pi}\right)$$

$R_i = 0.547\ \Omega$

Entonces, un incremento de $\Delta_R = 10\%$ en la resistencia, corresponde a 10% de R_i, que equivale a $(0.547\ \Omega \times 0.1) = 0.0547\ \Omega$

$$\Delta_R = 0.0547\ \Omega$$

Lo cual significa que $R_f = Ri + \Delta_R$

$$R_f = 0.547\ \Omega + 0.0547\ \Omega$$
$$R_f = 0.6017\ \Omega$$

Luego, si se sustituyen estos valores en la ecuación 2.3, se tiene:

$$0.6017\ \Omega = \left(0.547\ \Omega\right)\left[1 + 0.00393\frac{1}{^{\circ}\text{C}}\left(T_f\ ^{\circ}\text{C} - 25\ ^{\circ}\text{C}\right)\right]$$

Al despejar a T_f se tiene:

$$T_f = \frac{0.6017\ \Omega - 0.547\ \Omega + (0.547\ \Omega)(0.00393\frac{1}{^{\circ}\text{C}})(25\ ^{\circ}\text{C})}{(0.547\ \Omega)(0.00393\frac{1}{^{\circ}\text{C}})}$$

Resolviendo, se tiene que $T_f = 50.44^{o}C$; que es el valor de la temperatura después del incremento en la temperatura del alambre.

Resultado:

$T_f = 50.44\ ^{o}C$

2.3 Tipos más comunes de resistores

COMPETENCIA:
Conocer la *clasificación de los resistores* de uso común, de acuerdo con su estructura y aplicación en los circuitos eléctricos. [1]

En la actualidad se conocen con gran exactitud los valores resistivos de los diferentes materiales utilizados en los circuitos eléctricos y electrónicos, ya que existen equipos y técnicas especializadas para ello.

De ahí que cuando se desea establecer un valor determinado de resistencia en algún punto de una red para controlar la intensidad de la corriente eléctrica, se cuenta con varios elementos que ayudan al experimentador a lograr sus objetivos de diseño y construcción. Gracias a esto, se han desarrollado diferentes tipos y tamaños de resistores o resistencias, con diferentes porcentajes de exactitud o tolerancia, como se describe a continuación.

2.3.1 Resistores de carbón

Es la clase de resistor, que se utiliza con mayor frecuencia en los circuitos electrónicos, se fabrica a partir de carbón compactado o grafito, mezclado con algún material de relleno. Las proporciones de la mezcla determinan el nivel de resistencia, ya que el grafito es un conductor moderado, y mientras mayor cantidad de grafito contenga, menor será la resistencia de la mezcla, y viceversa. Las puede haber desde 1 Ω hasta 22 MΩ, con la característica de bajo costo, larga duración y gran estabilidad en su funcionamiento; además, son de fácil adquisición en el mercado.

COMPETENCIA:
Comprender el concepto de *tolerancia* en el valor de las resistencias. [1]

Sin embargo, no se elaboran para una gran exactitud, puesto que tienen tolerancia o desviación en sus valores, que va de ± 5% hasta ± 20%. La tolerancia representa la variación máxima que puede llegar a tener un resistor en particular respecto al valor nominal establecido por el fabricante.

EJEMPLO 2.5

¿Cuál será el intervalo en que puede encontrarse el valor de un resistor de carbón de 1200 Ω que tiene una tolerancia de ± 5%?

Solución

Datos:

$R = 1200\ \Omega$
$tol = \pm\ 5\%$

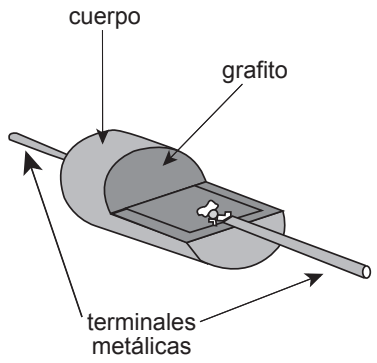


Figura 2.3 Corte de un resistor de carbón.

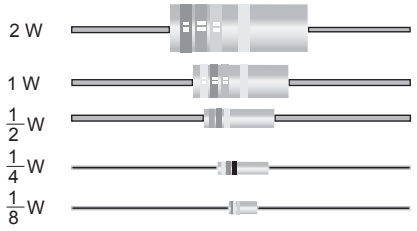


Figura 2.4 Resistores de carbón para diferentes potencias (el tamaño de la imagen se asemeja al tamaño real).

Tabla 2.3 Código de colores para los resistores de carbón.

Color	Valor	
Negro	0	1er y 2º dígito
Café	1	
Rojo	2	
Naranja	3	
Amarillo	4	
Verde	5	
Azul	6	
Violeta	7	
Gris	8	
Blanco	9	
Oro	0.1	multiplicador
Plata	0.01	
Negro	X 1	
Café	X 10	
Rojo	X 100	
Naranja	X 1K	
Amarillo	X 10K	
Verde	X 100K	
Azul	X 1 M	
Violeta	X 10 M	
Gris	X 0.1 M	tolerancia
Blanco	X 0.01 M	
Oro	5%	
Plata	10%	
Sin color	20%	

Desarrollo:

5% de tolerancia para 1200 Ω expresado en ohms corresponde a:
$tol\ (5\%) = 1200\ \Omega \times 0.05 = 60\ \Omega$
Entonces, el rango de valores es de $1\ 200\ \Omega \pm 60\Omega$

Resultado:

El valor de este resistor es:
$1140\ \Omega \leq R \leq 1260\ \Omega$

Potencia en los resistores de carbón

Los resistores de carbón se construyen en forma cilíndrica con terminales metálicas, como muestra la figura 2.3. La potencia que consumen puede ser desde ⅛ de watt (W) hasta 2 watts, y se identifica por el tamaño del resistor, como se ilustra en la figura 2.4.

Antes de utilizar un resistor, del tipo que sea, el experimentador deberá calcular la potencia que absorberá en el circuito donde la colocará, y para evitar que ésta se deteriore por exceso de calentamiento, es recomendable que siempre se elija una resistencia con por lo menos una potencia 30% mayor de lo que realmente absorberá.

Código de colores para los resistores de carbón

El valor óhmico de los resistores de carbón está dado por medio de franjas de colores con base en un código de aceptación internacional, cuyas equivalencias numéricas se presentan en la tabla 2.3. Las franjas están agrupadas hacia un extremo de la resistencia o resistor; es decir, no están centradas; donde la cuarta franja está más separada de las tres primeras. Para leer el valor se procede de la siguiente manera:

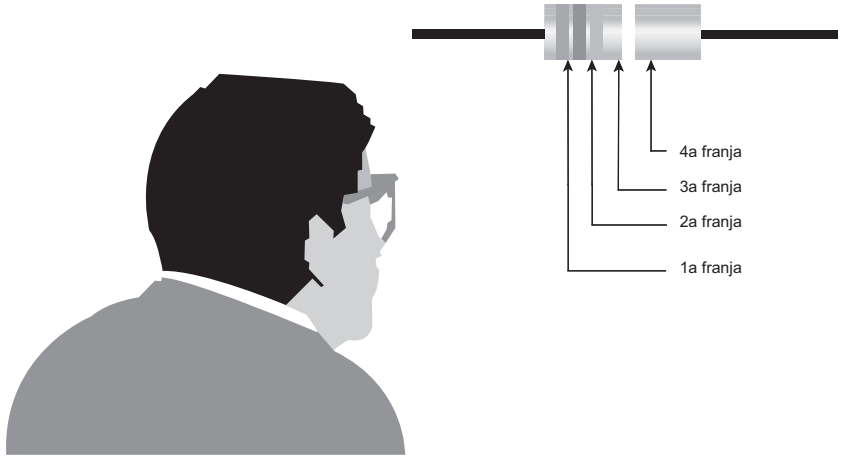


Figura 2.5 Forma correcta para leer el valor de un resistor de carbón mediante el código de colores.

COMPETENCIA:
Propiciar el desarrollo de la capacidad para leer el valor de una resistencia a través del código de colores. [1]

1. Se coloca el resistor de manera que el grupo de franjas de colores quede hacia el lado izquierdo del observador. Se enumeran de izquierda a derecha: 1a, 2a, 3a y 4a franja, como muestra la figura 2.5.
2. Se interpreta el valor numérico de cada franja según el código de colores de la tabla 2.3, de la siguiente manera:

Franja	Representa
1a.	El primer dígito, de izquierda a derecha, del valor del resistor.
2a.	El segundo dígito, de izquierda a derecha, del valor del resistor.
3a.	Multiplicador o número de ceros que hay que agregar a los primeros dos dígitos.
4a.	Tolerancia o desviación (%).

3. Se unen los valores numéricos de cada franja para formar la cantidad o valor óhmico del resistor y su tolerancia.

EJEMPLO 2.6

¿Cuál será el valor de un resistor de carbón que tiene los siguientes colores?:

1a. Franja: verde
2a. Franja: azul
3a. Franja: café
4a. Franja: sin color

Solución

De acuerdo con el código de colores de la tabla 2.3 se tendrá lo siguiente, figura 2.6:

1er. dígito $\rightarrow 5$
2o. dígito $\rightarrow 6$
Número de ceros $\rightarrow 1$
Tolerancia $\rightarrow 20\%$

Valor del resistor:
$R = 560\ \Omega \pm 20\%$

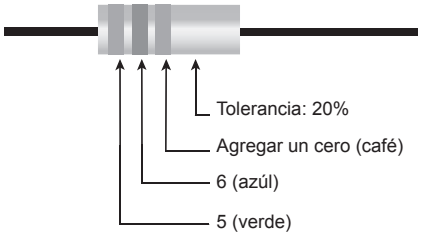


Figura 2.6 Lectura de un resistor de 560 Ω con una tolerancia de 20% .

2.3.2 Resistores de alambre

Estos resistores se fabrican con alambre de una aleación de cobre y níquel, llamada *constantan,* o también de otra aleación llamada *manganina* compuesta por cobre, níquel, manganeso y carbono.



Figura 2.7 Resistor de alambre devanado.

El alambre es de longitud y de calibre bien definidos, enrollado sobre un núcleo cilíndrico de material aislante, figura 2.7. Se caracterizan por su alta resistividad y bajo coeficiente de temperatura, así como por su gran exactitud, ya que se puede controlar su valor resistivo mediante la longitud del alambre, con errores de entre 0.01 y 1.0 %.

En el mercado se encuentran con valores que van desde 1 Ω hasta del orden de 1 MΩ, con capacidades de disipación de potencia de entre 5 W y 200 W.

Los resistores de alambre reúnen condiciones de seguridad y de potencia eléctrica que no poseen los resistores de carbón; de ahí que se utilicen en aplicaciones que requieren gran exactitud y elevada disipación de potencia. Su valor en *ohms* está impreso en el cuerpo del resistor.

2.3.3 Resistores tipo película

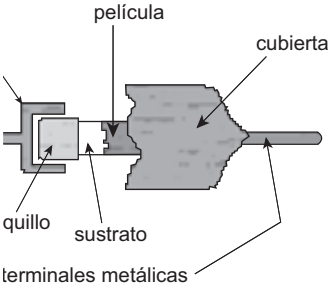


Figura 2.8 Esquema de la construcción de un resistor del tipo película. Puede ser de película de metal o de carbón.

Reciben este nombre porque las elaboran a partir de una película muy delgada que se deposita sobre un material aislante, al que se llama *sustrato*. La combinación entre la película y el aislante permite al fabricante controlar el valor del resistor, figura 2.8. Los hay de dos tipos principalmente: de película metálica y de película de carbón.

- **De película de metal**: contienen una película metálica cuya resistencia puede llegar hasta los 10 000 MΩ. Se caracterizan por ser de tamaño más pequeño que los resistores de alambre y los de carbón; además porque no se presentan efectos secundarios de inductancias, como en el caso de los resistores de alambre. Son de gran exactitud, y como no generan *ruidos* indeseables, se utilizan comúnmente en amplificadores de señal de baja potencia y en los sistemas de cómputo.
- **De película de carbón**: también contienen una película delgada, sólo que en lugar de ser de metal, es de carbón. Este tipo de resistores no logra valores óhmicos tan elevados como los de película de metal, pero sí de menor tolerancia que las primeras.

2.3.4 Resistores variables

Son resistores que, a diferencia de los descritos anteriormente –que son de valores fijos–, pueden variar su valor en un intervalo fijo definido por el fabricante. Se utilizan en los circuitos eléctricos y electrónicos, en las secciones donde se requiere hacer ajustes en los valores de las resistencias, una vez instaladas. Por ejemplo para el control del volumen en un amplificador o un en un receptor de radio, o el control de voltaje a la salida de una fuente de alimentación.

Los resistores variables de propósito general consisten en un resistor de valor fijo sobre el que se coloca un contacto deslizable que puede hacer recorridos de un extremo al otro. Esto significa que el resistor tendrá tres terminales, y si entre las terminales de los extremos se tiene

un valor fijo de resistencia, entre un extremo y el centro habrá un valor de resistencia que variará de acuerdo con la posición que guarde la terminal central respecto de la otra terminal, figura 2.9.

En este tipo de resistores el cuerpo central puede ser de una composición de carbón o bien de alambre devanado. Los resistores de composición de carbón se fabrican con valores máximos que están entre 100 Ω y 1 MΩ, mientras que los resistores de alambre devanado tienen valores máximos en el intervalo de 5 Ω a 50 kΩ.

Al hablar de valores máximos en los resistores variables se entiende que pueden adquirir el valor desde 0 Ω hasta el valor máximo en consideración. Por ejemplo, si se trata de un resistor variable que el fabricante ha especificado en 500 kΩ, significa que puede variar su valor desde 0 Ω hasta 500 kΩ (o 5×10^5 Ω), como lo requiera el experimentador.



Figura 2.9 Resistencias variables para propósitos generales.

De acuerdo con su forma de conexión, los resistores variables pueden designarse de dos formas:

- **Potenciómetro** (figura 2.10*a*). Utiliza tres terminales. Entre las terminales 1 y 3, de los extremos, existe un resistor de valor fijo, mientras que entre la terminal del centro (2), que es móvil, y cualquiera de los extremos, varía la resistencia. Se puede apreciar que en un potenciómetro se obtienen dos secciones de resistencia variable, mientras la resistencia entre la terminal del centro y un extremo disminuye, 2 y 1, por ejemplo, la resistencia entre la terminal central y el otro extremo (2 y 3) aumenta. La suma de las resistencias de las dos secciones siempre será el valor de la resistencia total que existe entre los extremos fijos.

$$R_{21} + R_{23} = R_{13} \qquad \text{(ecuación 2.4)}$$

Los potenciómetros se utilizan para secciones de circuitos electrónicos donde se tienen valores bajos en intensidad de corriente, hasta de unos cuantos amperes.

- **Reóstato** (figura 2.10*b*). Un resistor variable recibe este nombre cuando se utilizan sólo dos de sus tres terminales, un extremo y la del centro, que es la móvil (1 y 2, por ejemplo). Cuando se le da este uso, queda uno de los extremos sin conectar, por tanto, sólo se tendrá una resistencia variable entre la terminal del centro y el extremo en uso (R_{12}), a diferencia del potenciómetro, en el cual se tienen siempre dos secciones de resistencia variable. Los reóstatos soportan valores más elevados de intensidad de corriente que los potenciómetros.

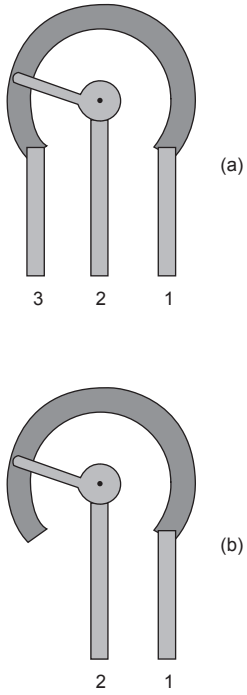


Figura 2.10 Resistores variables. a) Potenciómetro. b) Reóstato.

Los resistores variables se representan simbólicamente como aparece en la figura 2.11. En el capítulo 3 se trata el tema de los *divisores de voltaje*, en los cuales se utilizan también las resistencias variables para tal efecto.

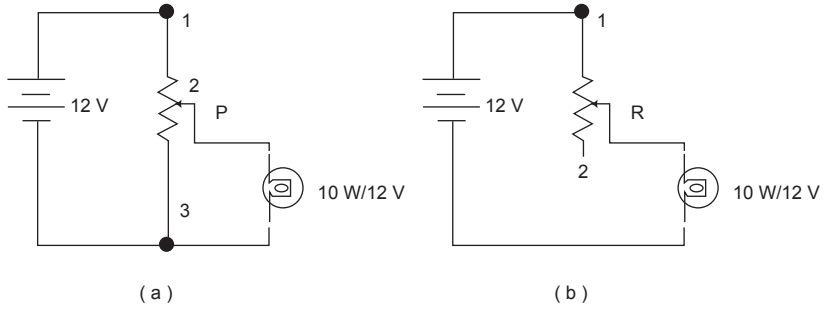


Figura 2.11 Representación simbólica de los resistores variables: a) potenciómetro b) reóstato.

2.3.5 Décadas de resistores

Otro tipo de resistores variables de uso común en el laboratorio de electrónica son los *décadas de resistores*. Consisten en arreglos de resistores de valor fijo (en realidad son arreglos de nueve resistores por grupo o década, dando por resultado 10 puntos con diferente valor resistivo, incluso el valor de cero, en todos los casos).

Los valores varían en relación de 1 a 10 de un arreglo a otro (de ahí el nombre de *décadas*). Es decir, en el primer arreglo los valores individuales de cada resistor son de 1 Ω; al agruparse pueden sumar, entonces, desde 0 a 9 Ω, con variaciones de 1 en 1 Ω; en el segundo arreglo hay resistores de 10 Ω, que al agruparse pueden sumar desde 0 a 90 Ω, con variaciones de 10 en 10 Ω; en el tercer arreglo los resistores son de 100 Ω; así que puede tenerse de 0 a 900 Ω con variaciones de 100 en 100 Ω. Estos arreglos se colocan de manera que se puede hacer conexión con ellas a través de un contacto o interruptor giratorio, seleccionando en cada posición un resistor equivalente a la suma de los resistores que quedan incluidas en la selección, como se aprecia en la figura 2.12.

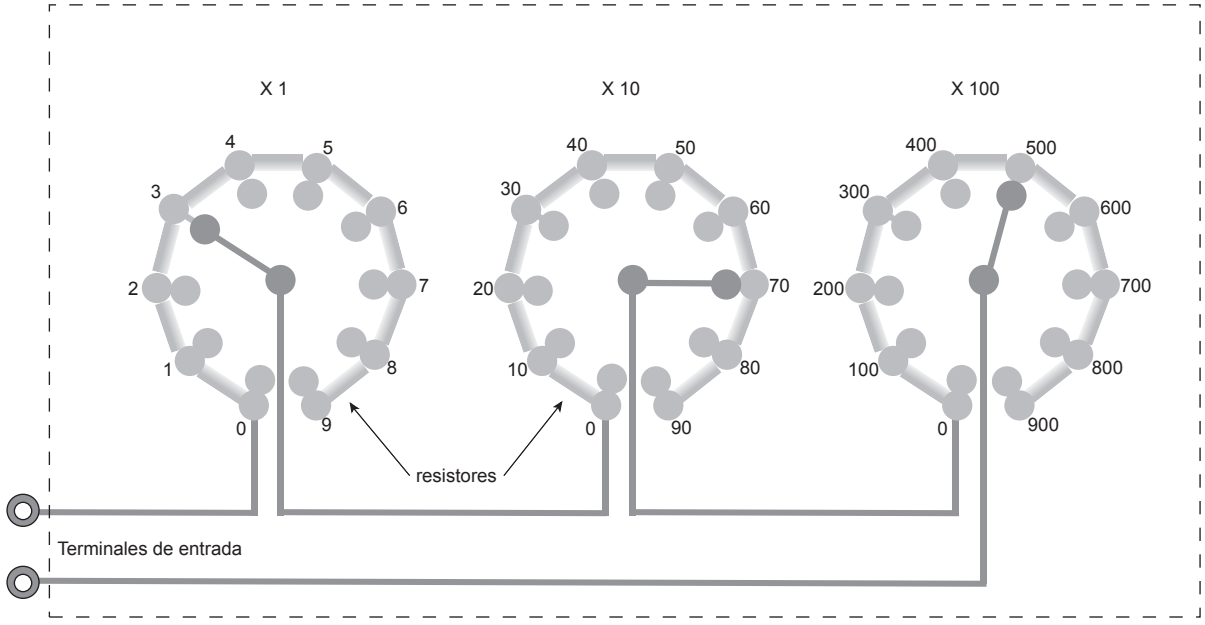


Figura 2.12 Diagrama esquemático de una década de resistores cuyo valor va de 0 a 999 Ω. En esta figura se representa un resistor con valor de 573 Ω en las terminales de la década.

2.4 Medición de resistencia

COMPETENCIA:
Describir la *técnica para medición de resistencias* con un óhmetro. [1]

La resistencia de un resistor, de un conductor, de una red, o de un sistema se mide con el *óhmetro*, que es uno de los instrumentos básicos y de uso fundamental en el laboratorio de electrónica. Por lo común el *óhmetro* está integrado como parte de un instrumento más completo llamado *multímetro*, cuyo nombre obedece al hecho de contar con múltiples escalas y es capaz de realizar mediciones, tanto de voltaje (*voltímetro*) como de intensidad de corriente (*amperímetro*), así también resistencias (*óhmetro*). Al igual que los voltímetros y amperímetros, por la forma de entregar las lecturas, hay de dos tipos: analógicos y digitales.

COMPETENCIA:
Propiciar el desarrollo de la habilidad para *medir resistencias mediante el uso del óhmetro*. [2]

A continuación se muestra el procedimiento correcto para medir el valor de un resistor o de conjunto de resistores, independientemente del tipo de óhmetro:

Paso 1. El resistor por medir deberá estar aislado o desconectado del circuito del cual forme parte (si es el caso).

Paso 2. Se colocan las puntas de prueba en el instrumento: la roja en la terminal positiva y la punta negra en la terminal *común*, que se identifica en color negro.

Paso 3. Se selecciona en el óhmetro la escala de mayor rango. Si el óhmetro es analógico deberá hacerse el *ajuste a cero*, uniendo las puntas de prueba y accionando el control de ajuste, como muestra la figura 2.13 (siempre que se hace un cambio de escala deberá hacerse el *ajuste a cero*). Si el óhmetro es digital, el ajuste lo hace el instrumento en automático.

Paso 4. Los extremos libres de las puntas de prueba se ponen en contacto con las terminales del resistor a medir. Debe evitarse el



Figura 2.13 Ajuste a cero en un óhmetro analógico. (En el óhmetro digital el ajuste a cero se hace en forma automática).

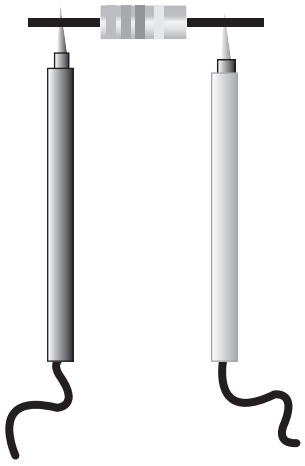


Figura 2.14 Forma correcta de medir un resistor con el óhmetro. El resistor debe estar desconectado, al menos en una de sus terminales.

contacto de los dedos del experimentador con los elementos y equipo, figura 2.14.

Paso 5. El valor del resistor que se mide aparecerá en la escala del instrumento, mediante el desplazamiento de la aguja indicadora sobre la escala graduada en *ohms*, si es analógico; o en la pantalla (*display*, por su nombre en inglés) si es digital. En el caso de un óhmetro analógico, cuando el valor de la resistencia que se mide es muy pequeño en comparación con el rango de la escala, será necesario cambiar a la escala inmediata inferior, haciendo el correspondiente *ajuste a cero.* Si la nueva escala resultara todavía grande para poder hacer una lectura exacta, deberá hacerse un nuevo cambio a otra escala menor aún.

Nota: En un óhmetro analógico, cada vez que se cambie de escala deberá realizarse el *ajuste a cero*.

La medición de resistencia es un aspecto de suma importancia en el trabajo de laboratorio, ya que es conveniente contar con el valor correcto de cada uno de estos elementos, para futuros cálculos, tanto en el análisis como el diseño de circuitos. Debes recordar que el valor óhmico que el fabricante establece para cada resistor, lleva un margen de error o tolerancia, por lo que es recomendable que como experimentador cuentes con su bitácora[3] personal para tener registro de los valores reales de características y variables de los circuitos.

2.5 Ley de Ohm

COMPETENCIAS:
- Comprender *la ley de Ohm y la importancia de su interpretación y aplicación* adecuada de en el análisis y diseño de circuitos resistivos. [1]
- Valorar *la importancia de la Ley de Ohm* como base para el desarrollo de la tecnología eléctrica y electrónica. [3]

En el capítulo 1 se analizaron dos de las variables fundamentales en los circuitos eléctricos y electrónicos: el *voltaje* y la *corriente eléctrica*; la segunda como variable dependiente de la primera, que sería una variable independiente; es decir, el experimentador controla el voltaje, y en consecuencia controla a la corriente. Existe entonces, una relación directa entre la corriente y el voltaje que la causa, que se puede expresar de la siguiente manera:

"La intensidad de corriente que circula por un conductor es **directamente proporcional** al voltaje que la origina".

Esta relación de proporcionalidad entre la corriente y el voltaje a través de un conductor tiene su expresión matemática:

$$I \alpha V$$

Donde I representa la corriente y V al voltaje.

En esta relación existe una constante de proporcionalidad que, en primera instancia se le puede llamar k, misma que al incluirla

[3] Se otorga el nombre de bitácora a la libreta en la cual se registran las observaciones durante la realización de algún experimento o cálculo.

en la expresión anterior, permite obtener la siguiente igualdad matemática:

$$I = kV \qquad \text{(ecuación 2.5)}$$

El valor numérico de la constante k se determina experimentalmente al aplicar diversos voltajes a un mismo material conductor y medir la intensidad de corriente en cada caso.

El experimento lo realizó por primera vez el físico alemán J. S. Ohm, quien encontró que, para un mismo material, el valor de la constante k está dado por la relación

$$k = \frac{I}{V} \qquad \text{(ecuación 2.6)}$$

Después de incontables experimentos y cálculos logró determinar que el valor de la constante k corresponde precisamente al inverso del valor de la resistencia R que presenta el material considerado al paso de la corriente eléctrica; es decir, $k = \frac{1}{R}$. Esto significa que la corriente I, es inversamente proporcional a la resistencia R que se opone a su paso.

A partir de esto, *Ohm* estableció la ley que rige el comportamiento de una corriente I a través de un material de resistencia R, debido a la presencia de un voltaje V:

COMPETENCIA:
Aplicar *la ley de Ohm en el análisis y diseño de circuitos resistivos*. [2]

La intensidad de corriente eléctrica I que circula por un material es directamente proporcional al voltaje V que la ocasiona, e inversamente proporcional a la resistencia R, que presenta dicho material, figura 2.15.

$$I = \frac{V}{R} \qquad \text{(ecuación 2.7)}$$

Donde: I = Intensidad de corriente en *amperes* (A)
V = Voltaje, en *volts* (V)
R = Resistencia, en *ohms* (Ω)

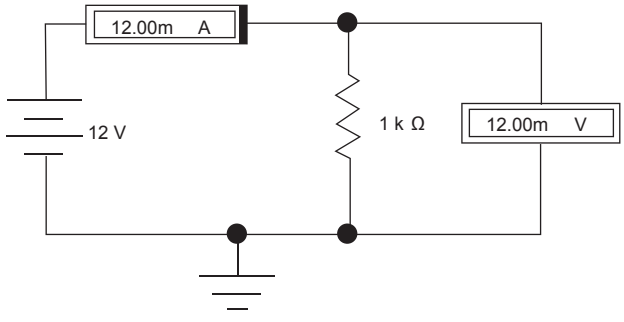


Figura 2.15 Circuito simbólico de la simulación del experimento de J. S. Ohm, que muestra la relación entre la intensidad de corriente que circula por un resistor y el voltaje.

A esta ley física se le dio el nombre de *ley de Ohm*, en honor precisamente, de quien la estableció. Es esencial para el estudio de la electricidad y la electrónica, puesto que con base en ella se han logrado importantes avances en la ciencia y la tecnología. Es de sencilla interpretación y aplicación, aunque no siempre se tienen a la mano los valores de las variables que en ella intervienen. De ahí que es necesario que el estudiante comprenda el significado de esta ley, para su correcta interpretación y aplicación en situaciones prácticas.

EJEMPLO 2.7

¿Cuál será el valor de la corriente eléctrica I que circulará a través de un resistor de 2200 Ω, si entre sus terminales existe un voltaje de 1.25 V?

Solución

Datos:

$R = 2200\ \Omega$
$V = 1.25\ \text{V}$
$I = ?$

Desarrollo:

Al aplicar la ecuación 2.6, se tiene que:

$$I = \frac{1.25\ \text{V}}{2200\ \Omega} = 568 \times 10^{-6}\ \text{A}$$

Resultado:

$I = 568\ \mu\text{A}$

EJEMPLO 2.8

Se requiere limitar la corriente a través de una rama de un circuito dado, en cuyas terminales hay una diferencia de potencial de 4.8 V. Calcula la resistencia que habrá que conectar en esa rama para tener una intensidad de 8 mA.

Solución

Datos:

$V = 4.8\text{V}$
$I = 8\ \text{mA} = 0.008\ \text{A}$
$R = ?$

Desarrollo:

A partir de la ecuación 2.6, se obtiene la expresión para R:

$$R = \frac{V}{I}$$

Se sustituyen valores:

$$R = \frac{4.8\ \text{V}}{0.008\ \text{A}} = 600\ \Omega$$

Resultado:

$R = 600\ \Omega$

2.6 Conductancia y conductividad

COMPETENCIA:
Comprender los conceptos de *conductancia* y *conductividad* eléctricas en los materiales. [1]

Un aspecto relevante que se observa en la ecuación que modela a la ley de Ohm es la relación que existe entre la corriente y el voltaje ($\frac{I}{V}$), que, según se observa en la ecuación 2.5, es una relación constante cuando se trata del mismo cuerpo o de una misma resistencia. A esta constante se le llamó provisionalmente $k = \frac{1}{R}$. Esto significa que k es el inverso de R; y si R representa la oposición al paso de la corriente eléctrica, se deduce que k será, entonces, *la disposición* que un material presenta para que la corriente circule a través de él. A esta característica de los materiales se le llama *conductancia*, y se simboliza por la letra G.

Por consiguiente:

$$G = \frac{1}{R} \qquad \text{(ecuación 2.8)}$$

es decir, conductancia $= \dfrac{1}{\text{resistencia}}$

En el *Sistema Internacional de* Unidades de Medida (SI), si la resistencia se mide en *ohms* (Ω), entonces la conductancia se medirá en *siemens*[4] (S):

$$\frac{1}{\Omega} = \Omega^{-1} = 1 \text{ S}$$

Esta relación permite determinar la conductancia de algún material cuando ya es conocido el valor de su resistencia, y viceversa.

De manera similar a la relación inversa que existe entre la *resistencia* (R) y la *conductancia* (G), también hay una relación inversa entre la *resistividad eléctrica* (ρ) de los materiales, que es la oposición al paso de la corriente por unidad de longitud, y la *conductividad eléctrica* (σ), que se entiende como la *disposición* de parte de un material para permitir el paso de la corriente *por cada unidad de longitud*. De lo anterior se tiene:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \qquad \text{(ecuación 2.9)}$$

$$\text{Resistividad} = \frac{1}{\text{conductividad}}$$

En el Sistema Internacional de Unidades de Medida (SI), si la resistividad se mide en *ohms·metro* (Ω m), entonces la conductividad se medirá en $\dfrac{\text{Siemens}}{\text{metro}}, \dfrac{\text{S}}{\text{m}}$

[4] Algunos textos o artículos sobre electrónica usan el *mho* (*ohm* al revés) como unidad para medir la conductancia, y lo simbolizan con una letra griega omega mayúscula invertida, o también Ω^{-1}. El mho era la unidad de conductancia antes de adoptar el *siemens* como parte del Sistema Internacional de Unidades de Medida.

EJEMPLO 2.9

Con base en la información proporcionada por la tabla 2.1, determina la conductividad para el cobre.

Solución

Datos:

$\rho_{Cu} = 1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$

Desarrollo:

Al aplicar la ecuación 5.8, se tiene que:

$$\sigma_{Cu} = \frac{1}{1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m} = 5.8 \times 10^{7}\ \frac{S}{m}$$

2.7 Potencia y energía eléctrica en los resistores

COMPETENCIAS:

- Comprender los conceptos de *potencia* y *energía eléctrica que consumen* los elementos resistivos en los circuitos eléctricos. [1].
- Desarrollar la capacidad para *calcular la potencia y la energía eléctrica* que consumen los elementos resistivos en los circuitos. eléctricos. [2]

Como recordarás, en el capítulo 1 aprendiste sobre la potencia eléctrica absorbida o consumida por algún dispositivo, así como la energía eléctrica relacionada en ello. Éstas quedan expresadas por las ecuaciones 1.10, 1.11 y 1.12. Sin embargo, en ellas no se menciona la resistencia eléctrica R que pueda tener un dispositivo, sin que esto signifique que dicha resistencia no interviene en el consumo de energía y potencia.

Por el contrario, el consumo energético de un dispositivo se relaciona tanto con el voltaje V aplicado, como con la corriente I que circula a través de él, pero además se considera la resistencia R de dicho dispositivo.

De acuerdo con la ecuación 1.12, la potencia P absorbida por un resistor R al que se le aplica un voltaje V, considerando que por él circula una intensidad de corriente I, será: $P = VI$.

Pero, por la ecuación 2.6 sabes que $V = IR$; entonces, al sustituir la ecuación 2.6 en la ecuación 1.12, se tiene, para la potencia en un resistor:

$$P = (IR)I = I^2R \qquad \text{(ecuación 2.10)}$$

o bien

$$P = V\left(\frac{V}{R}\right) = \frac{V^2}{R} \qquad \text{(ecuación 2.11)}$$

Con la ecuación 2.10 se calcula la energía que consume un resistor.

$$E = P \cdot t \qquad \text{(ecuación 2.12)}$$

Donde E = energía en joules.
P = potencia en watts
t = tiempo en segundos.
} (watt) (s) = joule.

Para ello es preciso conocer el valor del tiempo, t, durante el cual se ha desarrollado la potencia considerada.

EJEMPLO 2.10

¿Cuál será la potencia absorbida y la energía consumida durante 90 s por el resistor del ejemplo 2.8?

COMPETENCIAS:
- Comprender las técnicas para la reducción de arreglos resistivos a circuitos equivalentes. [1]
- Desarrollar la capacidad para calcular la resistencia equivalente en arreglos resistivos. [2]

Solución

Datos:

$V = 4.8$ V
$I = 8$ mA
$R = 600\ \Omega$
$t = 90\ s$

Desarrollo:

Puesto que para este caso se conocen los valores de las variables, puede utilizarse cualquiera de las expresiones para la potencia. Con la aplicación de las ecuaciones 1.12 y 2.11:

$$P = (4.8\text{ V})\,(0.008\text{ A}) = 38.4\text{ mW}$$

La energía consumida durante $t = 90\ s$ será

$$E = (0.0384\text{ W})\,(90\text{ s}) = 3.456\text{ joules.}$$

Resultado:

$$P = 38.4\text{ mW}, \qquad E = 3.456\text{ joules.}$$

2.8 Arreglos de resistores en serie

Se le da el nombre de *arreglo resistivo* a un grupo de dos o más resistores conectados entre sí para un propósito determinado, y puede ser parte de una red o un arreglo mayor, o bien conformar toda una red completa. Un arreglo resistivo tiene la característica de que el efecto individual de cada uno de los resistores influye en el resto de los resistores del grupo, de modo que al conectarse a una o más fuentes de alimentación, el voltaje total, la corriente total y, en consecuencia, la energía y la potencia total se distribuyen en todo el sistema. En esta sección y las dos siguientes se tratan las técnicas para el cálculo y medición de los diferentes tipos de arreglos resistivos.

Los arreglos resistivos pueden ser tipo *serie*, tipo *paralelo*, o una combinación de estos dos, también llamados *mixtos.*[5]

2.8.1 Resistores conectados en serie

> Dos o más resistores están conectados en serie cuando a través de ellos circula la misma intensidad de corriente, sin importar la diferencia de potencial que pueda haber en cada uno.

Este tipo de arreglo forma realmente una *serie*, ya que una terminal del segundo resistor se conecta con una terminal del primero, mientras que una terminal del tercer resistor se conecta con la terminal libre del segundo resistor, y así con las siguientes. En la serie siempre habrá sólo dos terminales disponibles, una del primer resistor y otra del último. La figura 2.16 muestra un arreglo de 4 resistores R_1, R_2, R_3 y R_4 conectados en serie. Las terminales de la serie están en los puntos *A* y *E*.

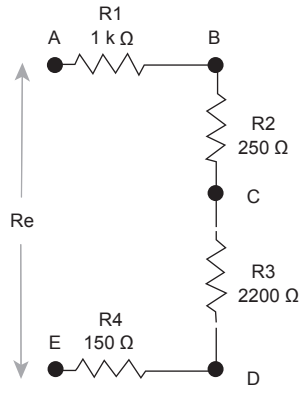


Figura 2.16 Arreglo resistivo tipo serie

Al conectar este arreglo a una fuente de alimentación en los puntos *A* y *E*, que son las terminales libres, se cerrará el circuito y circulará la corriente a través de los 4 resistores (y de la fuente). Esta corriente será la misma para todos. El objetivo de este arreglo es provocar un efecto total de *resistencia* al paso de la corriente, como si se tratara de una sola *resistencia equivalente*, o también, dividir al voltaje total en fracciones (divisores de voltaje), que puede medirse entre un extremo y algún punto intermedio *B, C, D* del arreglo.

El valor de la resistencia equivalente R_e de *n* resistores conectados en serie se obtiene sumando los valores individuales de cada uno de los resistores del arreglo. Así:

$$R_e = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \ldots + R_n \qquad \text{(ecuación 2.13)}$$

Lo anterior significa que el valor que se calcule a través de la ecuación 2.12 para R_e en el arreglo de la figura 2.16, será el mismo[6] que mida un óhmetro que se conecte entre las terminales *A* y *E*. Esto se puede comprobar en la práctica, mediante una medición con un óhmetro, o también mediante la simulación del circuito, como muestra la figura 2.17.

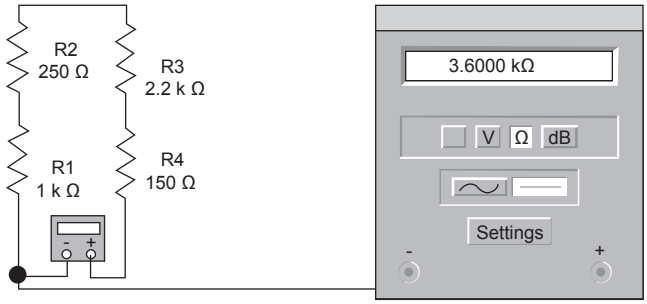


Figura 2.17 Simulación por computadora de un arreglo de 4 resistores en serie y la medición de la resistencia equivalente, R_e, mediante un óhmetro virtual.

[5] En Ingeniería Eléctrica se utilizan también arreglos resistivos tipo Estrella y tipo Delta.

[6] Deberá tenerse en cuenta el error que pueda introducirse en el proceso de medición, debido a diferentes causas.

EJEMPLO 2.11

Calcula el valor de la resistencia equivalente *Re* para el arreglo de la figura 2.16.

Solución

Datos:

$R_1 = 1\ \text{k}\Omega$
$R_2 = 250\ \Omega$
$R_3 = 2.2\ \text{k}\Omega$
$R_4 = 150\ \Omega$

Desarrollo:

Puesto que se trata de un arreglo de resistores en serie, se aplica la ecuación 2.12:

$$R_e = 1000\ \Omega + 250\ \Omega + 2200\ \Omega + 150\ \Omega$$

Resultado:

$$R_e = 3600\ \Omega$$

En la figura 2.17 se observa la lectura que proporciona un óhmetro virtual al conectarse entre las terminales que corresponden a los puntos *A* y *E* del arreglo resistivo en serie de la figura 2.16. Ésta es de 3600 kΩ, que equivale al resultado teórico calculado en el ejemplo 2.10 mediante la ecuación 2.12. En este caso el simulador arroja un error de 0% respecto al valor teórico calculado.

2.9 Arreglos de resistores en paralelo

Otra manera de lograr arreglos de resistores es conectarlos entre sí de manera que todos tengan conectada una de sus terminales a un mismo punto, llamado *nodo*, y en otro *nodo* se conecta la terminal restante de todos los resistores. Sin importar la intensidad de corriente que circule por cada una de ellas, la diferencia de potencial o voltaje entre sus terminales es la misma para todas.

2.9.1 Resistores conectados en paralelo

> Dos o más resistores están conectados en paralelo cuando por uno de sus extremos se conectan todos al mismo punto o nodo, mientras que por el otro extremo se conectan todos a otro nodo común. Existe el mismo voltaje entre sus terminales, independiente de la intensidad de corriente que circule por cada uno de ellos.

La figura 2.18 muestra un arreglo de 4 resistores R_1, R_2, R_3 y R_4 conectados en paralelo. Al momento de conectar este arreglo a una fuente de alimentación en los puntos *A* y *B*, que son las terminales libres, habrá la

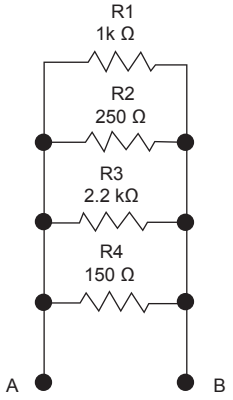


Figura 2.18 Arreglo de 4 resistores en paralelo. El valor de la resistencia equivalente entre los puntos *A* y *B* es 82.5 Ω.

misma diferencia de potencial en los 4 resistores, que será el de la fuente. Igual que los arreglos en serie, el objetivo de este tipo es provocar un efecto total de *resistencia* al paso de la corriente, como si se tratara de una sola *resistencia equivalente*, y también generar desvíos para el paso de la corriente hacia distintas ramas (divisores de corriente).

El valor de la resistencia equivalente R_e de n resistores conectados en paralelo se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{1}{Re} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \cdots + \frac{1}{R_n} \qquad \text{(ecuación 2.14)}$$

Esto significa que el valor que se calcule mediante la ecuación 2.14 para R_e en el arreglo de la figura 2.18 será el mismo[6] que mida un óhmetro que se conecte entre las terminales A y B. Esto se comprueba con la medición en laboratorio, o también mediante la simulación del circuito, como muestra la figura 2.19.

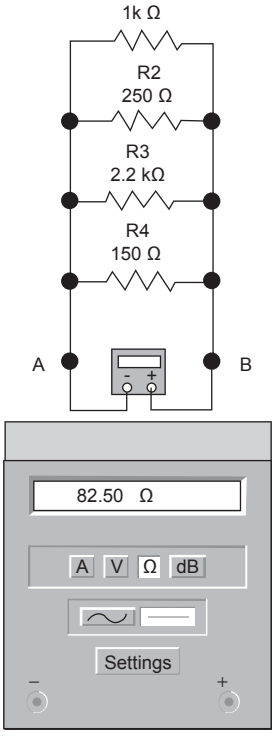


Figura 2.19 Simulación por computadora, de un arreglo de cuatro resistores en paralelo y la medición de la resistencia equivalente, R_e, mediante un óhmetro virtual.

EJEMPLO 2.12

Calcula el valor de la resistencia equivalente R_e para el arreglo de la figura 2.18.

Solución

Datos:

$R_1 = 1\ \text{k}\ \Omega$
$R_2 = 250\ \Omega$
$R_3 = 2.2\ \text{k}\Omega$
$R_4 = 150\ \Omega$

Desarrollo:

Puesto que se trata de un arreglo de resistencias en paralelo, se aplica la ecuación 2.13:

$$\frac{1}{Re} = \frac{1}{1000\ \Omega} + \frac{1}{250\ \Omega} + \frac{1}{2200\ \Omega} + \frac{1}{150\ \Omega}$$

Resultado:

$$\therefore\ R_e = 82.5\ \Omega$$

En la figura 2.19 se observa la lectura que proporciona un *óhmetro virtual* al conectarse entre las terminales que corresponden a los puntos A y B del arreglo resistivo en serie de la figura 2.18: 82.5 Ω, que equivale al resultado teórico que se calculó en el ejemplo 2.11 mediante la ecuación 2.13. En este caso el simulador arroja un error del 0% respecto al valor teórico calculado.

2.10 Cálculo, simulación y medición de diversos arreglos resistivos

COMPETENCIA:
Comprender la importancia de la simulación en el análisis y diseño de circuitos resistivos. [1]

En la práctica los arreglos resistivos son en su mayoría de tipo serie, paralelo, o una combinación de ambos. Aunque en algunos puede no

ser clara la configuración de los elementos, hasta los arreglos más complejos pueden simplificarse, bastará con observar las condiciones que se describen en las dos secciones anteriores para identificar el tipo de arreglo resistivo que se forma.

Al analizar una red resistiva para conocer su resistencia total equivalente, R_T se puede proceder por partes o secciones, y de cada sección se puede obtener una resistencia equivalente parcial, la que a su vez deberá definir la forma de conectarse con otras secciones de la misma red, y así hasta encontrar el valor de R_T buscado. A continuación se verá una técnica de reducción de resistencias, que consiste en aplicar de manera sucesiva las ecuaciones 2.12 y 2.13.

2.10.1 Cálculo de una resistencia equivalente por reducciones sucesivas

Consideremos el caso de una red resistiva formada por 6 resistores, como se muestra en la figura 2.20*a*. Se desea conocer el valor de la resistencia total entre los puntos *A* y *F*. Un procedimiento recomendable para calcular el valor de R_T de una red resistiva dada, consiste en lo siguiente:

- Identificar los puntos entre los cuales se encuentra la red considerada. En este caso se dieron como puntos de referencia *A* y *F* (figura 2.20*a*). Cualquier resistor tiene dos terminales (se habla de resistores de valor fijo). La resistencia equivalente parcial de una sección o de una red completa también tiene dos terminales.
- "Conectar" las puntas de un medidor imaginario en las dos terminales de la red que se analiza (figura 2.20*a*). Entre esos puntos estará la resistencia total equivalente, R_T, buscada. En este caso son los puntos *A* y *F*.
- Iniciar el análisis resistivo a partir del extremo opuesto (puntos *C-D*) a donde se colocó el medidor imaginario, como sigue.
- Identificar la sección de resistores que está más alejada del medidor imaginario y de las conexiones que pueda haber en esa sección (serie o paralelo). Se procede como se indica en las secciones respectivas para obtener la resistencia parcial equivalente a esa sección. Esa resistencia parcial equivalente se considera como una sola que sustituye a los resistores individuales que conforman a la sección que se ha analizado, y se procede a identificar la manera en que estará conectada a otra sección. En la figura 2.20*a* se aprecia una sección en la trayectoria $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$, donde hay tres resistores conectados en serie, que son R_3, R_4 y R_5, por tanto se puede tener una resistencia equivalente de esos tres resistores, a la que se puede llamar R_{345}:

$$R_{345} = \mathrm{R}_3 + R_4 + \mathrm{R}_5 = 2200\ \Omega + 150\ \Omega + 100\ \Omega = 2450\ \Omega$$

- Al sustituir la resistencia parcial equivalente R_{345} se obtiene la red de la figura 2.20*b*. Cada vez que se logra una nueva resistencia equivalente por cada sección de la red resistiva, se reduce el

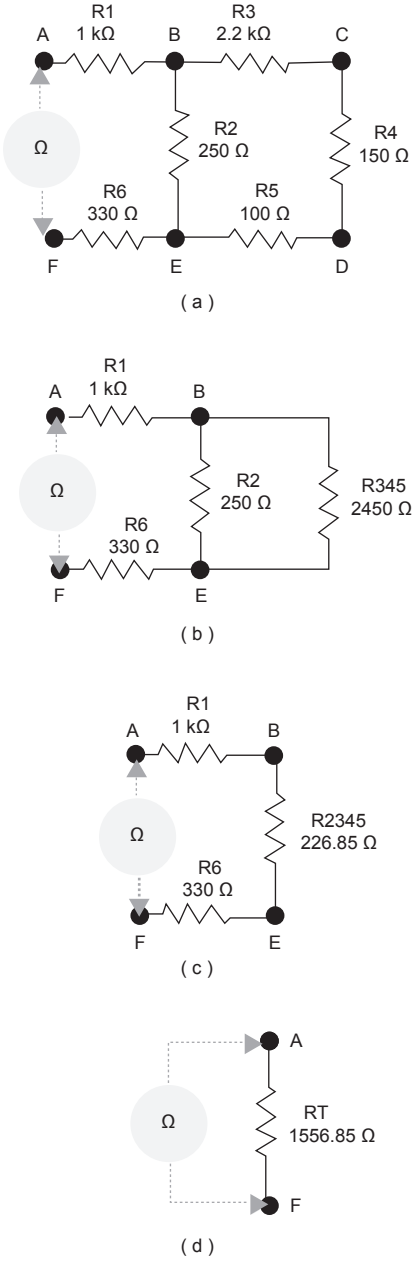


Figura 2.20 Reducción de un arreglo de 6 resistencias, de tipo mixto, hasta una sola resistencia equivalente, R_T, entre los puntos A y F.

número de resistores, al mismo tiempo que el análisis se acerca al medidor imaginario, hasta que finalmente quedará una sola resistencia total equivalente, a la que se puede llamar R_T. Es equivalente porque esta resistencia, que es una sola, produce un efecto, que *equivale* al efecto que producen el total de las resistencias de la red en su conjunto.

- En la figura 2.20*b* se observa que R_2 está conectada en paralelo con R_{345}, por tanto, se simplifican para tener una nueva resistencia equivalente de esa sección, a la que se le puede llamar R_{2345}

$$\frac{1}{R_{2345}} = \frac{1}{250\,\Omega} + \frac{1}{2450\,\Omega} \rightarrow R_{2345} = 226.85\,\Omega$$

- El paso anterior da como resultado la red de la figura 2.20*c*, en la que finalmente se puede distinguir una sola trayectoria $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F$ formada por los resistores R_1, R_{2345} y R_6, conectados en serie. Por tanto, se ahora puede calcular el valor de la resistencia total equivalente R_T:

$$R_T = R_1 + R_{2345} + R_6 = 1000\,\Omega + 226.85\,\Omega + 330\,\Omega$$

$$R_T = 1556.85\,\Omega$$

La figura 2.20*d* muestra el resultado del análisis teórico de la red resistiva para obtener su resistencia equivalente R_T entre los puntos A y F.

2.10.2 Simulación de un circuito resistivo

COMPETENCIA:
Desarrollar la capacidad para usar simuladores por computadora como herramientas de apoyo para el análisis y diseño de circuitos resistivos. [2]

Existen a la disposición del experimentador varios programas de simulación o software para computadoras personales que se han convertido en herramientas de gran potencial para el análisis y el diseño de los circuitos electrónicos y para el trabajo de laboratorio en general; tanto por su facilidad de manejo, como por su versatilidad y confiabilidad, además de que son de comprensión internacional (Electronics Workbench, PSpice, Circuit Maker, y otros).

Como se mencionó en el capítulo 1, la simulación es una técnica que consiste en realizar experimentación y observación sobre una representación de un objeto o sistema real. El simulador es en esencia un *laboratorio virtual*, en el cual el experimentador realiza pruebas y mediciones en circuitos representados, sin ningún riesgo.

Es totalmente recomendable, y en muchas situaciones se torna indispensable, que el experimentador integre a su metodología de trabajo la etapa de *simulación de circuitos*. La simulación se ha convertido ya en una etapa intermedia entre la teoría y la práctica en el trabajo de investigación. Permite hacer comparaciones entre los cálculos teóricos realizados en el papel y lo que se espera obtener en el terreno experimental. Además, te familiariza y da a conocer a fondo cada circuito o sistema, para que al llegar laboratorio, tengas muy claro lo que realizarás experimentalmente, tanto con respecto a los objetivos como en las consideraciones teóricas y, desde luego, en relación con los equipos y

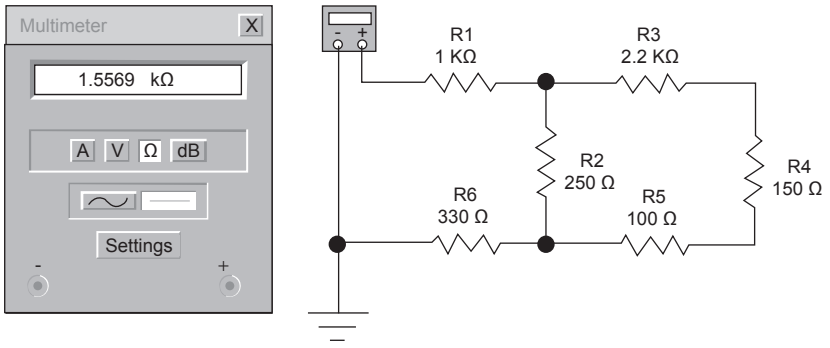


Figura 2.21 Simulación por computadora de un arreglo mixto de 6 resistores y la medición de su resistencia equivalente, R_{AF}, mediante un óhmetro virtual. Esta red corresponde al caso de la figura 2.20.

materiales que utilizarás, así como el orden lógico en el que deberán realizarse cada una de las operaciones, para tener éxito de manera más económica en cuanto a tiempo y recursos. Todo esto eleva el nivel de eficiencia y de eficacia del trabajo experimental.

Al hacer la simulación de la red resistiva de la figura 2.20 y la medición de este arreglo de resistores se obtiene el resultado que muestra la figura 2.21.

Los resultados son prácticamente los mismos; sin embargo, se aprecia una pequeña diferencia entre ambos; es decir, existe un *error* o *desviación de un resultado respecto del otro*. Es aquí donde será necesario determinar el valor numérico de ese error para establecer el nivel de confiabilidad, ya sea del proceso teórico respecto del proceso de simulación, o al contrario, la confiabilidad del proceso de simulación respecto del proceso teórico. Corresponde al experimentador establecer el parámetro de comparación para cada caso. Si se trata del error absoluto el resultado se expresará en *ohms*, mientras que si se habla del error relativo, éste deberá expresarse en términos porcentuales (%).

EJEMPLO 2.13

¿Cuál será el porcentaje de confiabilidad del resultado obtenido para R_T mediante el cálculo teórico, respecto de la lectura que proporciona el óhmetro virtual en la simulación, para el circuito resistivo de la figura 2.20?

Solución

Datos:

$$R_{T\,\text{calculada}} = 1556.85\ \Omega$$
$$R_{T\,\text{simulador}} = 1556.9\ \Omega$$

Desarrollo:

% de confiabilidad del proceso teórico está dado por:

$$\text{Confiabilidad (\%)} = [100\,\% - \text{Error Relativo (\%)}]$$

De ahí que será necesario determinar primeramente el error relativo correspondiente. Se puede iniciar por calcular el error absoluto:

Error absoluto (expresado en *ohms*):

$$E.A. = |1556.85\,\Omega - 1556.9\,\Omega| = 0.05\,\Omega$$

Error relativo (expresado en porcentaje):

$$E.R.(\%) = \frac{|\text{Valor de } R_T \text{ calculado} - \text{Valor de } R_T \text{ simulado}|}{\text{Valor de } R_T \text{ simulado}} \times 100$$

$$E.R.(\%) = \frac{|1556.85\,\Omega - 1556.9\,\Omega|}{1556.9\,\Omega} \times 100 = 0.003\%$$

Entonces el porcentaje de confiabilidad del proceso teórico respecto del resultado obtenido por el óhmetro virtual será:

$$\text{Confiabilidad } (\%) = [100\,\% - 0.003\,\%] = 99.997\,\%$$

El error relativo que se introdujo en el resultado calculado para R_T es prácticamente despreciable. Es común que este tipo de errores se presente por no considerar gran número de cifras decimales en los cálculos.

El lector realizará el ejercicio de encontrar el nivel de confiabilidad que pueda tener el resultado del óhmetro virtual de la figura 2.21 respecto del valor teórico calculado, comparar resultados y obtener sus conclusiones.

En este ejercicio el lector podrá observar la importancia de establecer los parámetros de referencia en todo proceso experimental; ya que se puede hablar de la confiabilidad de un cálculo con respecto a una medición, o de una medición con respecto a un cálculo, o de una medición con respecto a otra medición hecha con otro instrumento; o la confiabilidad de varios instrumentos de medición con respecto a un cálculo teórico, o con respecto a algún valor dado por norma o por decreto técnico.

Actividades para la evaluación de competencias

Resistencia y resistividad

COMPETENCIA:
Desarrollar la capacidad para *autoevaluar* su trabajo. [3]

2.1 Explica el concepto de *resistencia eléctrica*. [1]
2.2 ¿Qué es la *resistividad* en los materiales? [1]
2.3 Encuentra la relación que existe entre la *resistividad* y la *resistencia.* [2]
2.4 ¿Cuál será el valor de la *resistencia* de un tramo de alambre de hierro de 1.5 m de longitud, con un área de 1 mm en su sección transversal? [2]
2.5 Determina la resistencia total de un tramo de alambre de aluminio de 1.95 m de longitud con una sección transversal circular cuyo diámetro es 0.8 mm. [2]

2.6 Si la resistencia total de un tramo de alambre nicromel es 12.4 Ω, y su longitud es de 55 m ¿cuál será el diámetro de este alambre? [2]

Resistencia y temperatura

2.7 Si el conductor de la actividad 2.6 se encuentra a una temperatura de 25 ºC, y se viera sometido a un incremento de temperatura de hasta 55 ºC, ¿esto influiría de alguna manera en el valor de su *resistencia* total? Explica y justifica tu respuesta. [2]

2.8 Un alambre de aluminio de 20 m de longitud y 1.5 mm de diámetro incrementó su resistencia en 8% por efecto del cambio en la temperatura. Si originalmente el conductor se encontraba a 20 ºC. ¿A qué temperatura se encontrará después del cambio en el valor de su resistencia? [3]

2.9 Analiza los resultados de las actividades 2.7 y 2.8 presenta una explicación o justificación del fenómeno de variación en la resistencia de los conductores por efecto de cambios en la temperatura. [3]

Tipos comunes de resistores

2.10 ¿Cuál será el rango de valores para un resistor de carbón cuyas franjas de colores, de izquierda a derecha son: amarillo, rojo, rojo, dorado? [2]

2.11 Al medir con el óhmetro un resistor de carbón con franjas rojo, rojo, café, plata, se encontró un valor de 180 Ω. ¿Puede usarse ese resistor con confianza? Justifica tu respuesta. [3]

2.12 Al medir la resistencia entre un extremo y la terminal central de un potenciómetro se encontró una lectura de 2300 Ω. Si el potenciómetro es de 10 *k*Ω, ¿qué valor resistivo se espera que tenga entre el centro y la terminal del extremo opuesto? [2]

2.13 Explica en qué consiste una década de resistores, y qué uso se le puede dar en el laboratorio de electrónica. [2]

Medición de resistores

2.14 Selecciona cinco resistores de carbón (1 watt) de distintos valores. Enseguida procede a medir cada uno con el óhmetro analógico. Elabora un cuadro de datos para registrar los resultados teóricos (según código de colores), valor analógico. Determina la desviación (%) respecto del valor que el fabricante establece para cada resistencia. [2]

2.15 Con los resistores del problema 2.14 realiza la medición de cada una de ellos con óhmetro digital. Determina la desviación (%) respecto del valor que el fabricante establece para cada resistor. [2]

2.16 A partir de los resultados obtenidos en las actividades 2.14 y 2.15 presenta algunas conclusiones. [3]

Ley de Ohm

2.17 Un resistor se conecta a una fuente de alimentación de 6 Vcd, si por él circula una corriente de 200 mA ¿cuál será el valor del resistor? [2]

2.18 Elabora el circuito correspondiente al problema 2.17 en el simulador de circuitos. Compara el resultado *virtual* con el resultado teórico calculado. [3]
2.19 A través de un resistor de 1.2 MΩ circula una corriente de 600 μA ¿cuál será la diferencia de potencial entre sus terminales? Haz la simulación de este circuito y compara tu resultado teórico con el que presenta el simulador. [2]

Conductancia y conductividad

2.20 Con base en la información de la tabla 2.1 determina el valor de la conductividad para el aluminio, fierro y nicromel. [2]
2.21 Si a través de una conductancia de 3 mS existe una diferencia de potencial de 5 V, ¿cuál será la corriente que circula por ella? [2]
2.22 Explica los conceptos de conductividad y conductancia. [1]
2.23 Explica los conceptos de resistividad y resistencia. [1]

Potencia y energía eléctrica en los resistores

2.24 Calcula la potencia absorbida por el resistor de la actividad 2.17. [2]
2.25 Calcula la potencia absorbida por la fuente de la actividad 2.17. [2]
2.26 ¿Cuál será la energía en *joules* que consume el resistor de la actividad 2.19? [2]
2.27 Encuentra la potencia absorbida y la energía consumida por la conductancia de la actividad 2.21. Justifica tus respuestas. [3]

Arreglos de resistores en serie

2.28 Encuentra la resistencia equivalente para 3 resistores que se conectan en serie, cuyos valores son $R_1 = 1.2\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 500\ \Omega$ y $R_3 = 150\ \Omega$. [2]
2.29 Desarrolla la simulación correspondiente a la actividad 2.28 y compara el resultado teórico con el que arroja el simulador. [2]
2.30 Con los mismos valores de resistencias de la actividad 2.28, realiza la práctica en el laboratorio, mide con un óhmetro digital y enseguida con un óhmetro analógico. Compara los resultados (teórico, de simulación, con medidor analógico y con medidor digital) mediante un cuadro de datos. [2]
2.31 Determina el porcentaje de desviación que existe entre los resultados de la actividad 2.30 y las actividades 2.28 y 2.29. Comenta con tus compañeros y obtén tus conclusiones. [2]

Arreglos de resistores en paralelo

2.32 Realiza las cuatro actividades anteriores (2.28, 2.29, 2.30 y 2.31) sólo que en lugar de conectar en serie los resistores, conéctalos en paralelo.
Justifica tus resultados. [2]
2.33 Al comparar los resultados obtenidos a lo largo de las actividades 2.28 a la 2.32, ¿qué conclusiones obtienes? [3]

Cálculo, simulación y medición de arreglos resistivos diversos

2.34 Para la red de la figura 2.20 calcula el valor de la resistencia equivalente para los siguientes pares de puntos: *A-C, C-D, C-E y A-E*. [2]

2.35 Desarrolla una simulación para la actividad 2.34. Compara tus resultados teóricos con los del simulador. [2]

2.36 Realiza la actividad 2.34 ensamblando el circuito correspondiente en un protoboard. Mide con el óhmetro digital. Compara tus resultados teóricos con los del simulador y con los obtenidos en el laboratorio. Anota tus conclusiones. [2]

Notas:

[1] Competencias de la dimensión Instrumental.
[2] Competencias de la dimensión Sistémica.
[3] Competencias de la dimensión Interpersonal.

Capítulo 3

Análisis de circuitos resistivos

Estructura

Temas	CONTENIDOS	
	Conceptuales	
3.1 Arreglos resistivos alimentados por fuentes de voltaje de cd	• Conceptos de *Fuente de alimentación* y *resistencia de carga*.	
3.2 Ley de voltajes de Kirchhoff 3.2.1 Análisis de circuitos resistivos de una malla o lazo. 3.2.2 Análisis de circuitos resistivos de más de una malla o lazo. Método de mallas.	• Concepto de *malla* o *lazo* y su aplicación en el análisis de circuitos. • Interpretación de la ley de voltajes en una malla o lazo, enunciada por Gustav Robert Kirchhoff.	
3.3 Ley de corrientes de Kirchhoff 3.3.1 Análisis de circuitos resistivos con dos nodos. 3.3.2 Análisis de circuitos resistivos con más de dos nodos.	• Concepto de *nodo* en un circuito y su aplicación en el análisis de circuitos. • Interpretación de la ley de corrientes en un nodo, enunciada por Gustav Robert Kirchhoff.	
3.4 Divisor de voltaje **3.5 Divisor de corriente**	• Conceptos de *divisor de voltaje y divisor de corriente* desarrollados a partir de la ley de Ohm.	
3.6 Equivalencia entre fuentes de alimentación 3.6.1 Fuente real de voltaje. 3.6.2 Fuente real de corriente. 3.6.3 Fuentes equivalentes. 3.6.4 Principio de superposición.	• Concepto de *equivalencia* entre fuentes. • Conceptos de fuente *ideal* y fuente *real*. • Conceptos de elemento lineal y *red lineal*. • Interpretación del principio de superposición en circuitos resistivos.	
3.7 Teoremas de Thévenin y de Norton. 3.7.1 Teorema de Thévenin. 3.7.2 Teorema de Norton.	• Descripción de los teoremas de Thévenin y de Norton.	
Actividades para la evaluación de competencias.		

	temática
	CONTENIDOS

	Procedimentales	Actitudinales
	• Procedimiento para el análisis de un circuito aplicando la ley de Ohm. • Procedimiento para la comprobación teórica de resultados en el análisis de circuitos resistivos simples.	• Argumentos técnicos para propiciar el desarrollo de la capacidad para la autoevaluación.
	• Técnica para la identificación de lazos en un circuito resistivo. • Procedimiento para el análisis de un circuito resistivo por el método de mallas.	• Argumentos que permiten valorar la importancia de los trabajos de Kirchhoff en el desarrollo de sistemas eléctricos. • Información que muestra la importancia de conocer, interpretar y aplicar las leyes como base para la resolución de problemas y toma de decisiones. • Argumentos enfocados hacia la evaluación y la autoevaluación en el trabajo.
	• Técnica para la identificación de la corriente eléctrica en un nodo. • Procedimiento para el análisis de un circuito resistivo por el método de nodos.	
	• Procedimiento para obtener las expresiones matemáticas que modelan al divisor de voltaje y al divisor de corriente.	• Información que permite enriquecer la capacidad del estudiante para decidir formas de trabajo frente a la realidad.
	• Aplicación de los conceptos de fuentes ideales y reales en el análisis de circuitos resistivos. • Proceso de análisis de circuitos resistivos con más de una fuente de alimentación aplicando el principio de superposición.	• Información que induce al estudiante al intercambio de ideas con sus compañeros y a la búsqueda de formas de comprobación de su trabajo.
	• Aplicación de los teoremas citados, en la solución de problemas de análisis de circuitos de cd.	• Argumentos técnicos para propiciar el desarrollo de la capacidad para la autoevaluación, bajo el enfoque de los dos teoremas enlistados.

Orientación general

Desarrollar en el estudiante la capacidad de análisis de circuitos resistivos alimentados por fuentes de voltaje de corriente directa, mediante la comprensión y aplicación correcta de técnicas sustentadas en leyes, principios y teoremas fundamentales de la electricidad.

Competencias

Dimensión Instrumental [1]	Dimensión Sistémica [2]	Dimensión Interpersonal [3]
Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:
1.1 Comprender el concepto de *análisis* en los circuitos eléctricos. 1.2 Comprender las leyes de Kirchhoff y su correcta aplicación en el análisis de circuitos. 1.3 Comprender el concepto de *divisor de voltaje* desarrollado a partir de la ley de Ohm 1.4 Comprender el concepto de *divisor de corriente* desarrollado a partir de la ley de Ohm 1.5 Comprender el concepto de *equivalencia* entre fuentes de alimentación. 1.6 Comprender el principio de superposición en circuitos lineales. 1.7 Comprender el teorema de Thévenin. 1.8 Comprender el teorema de Norton.	2.1 Analizar circuitos resistivos alimentados por una fuente de voltaje de corriente directa, para encontrar el valor del voltaje y de la corriente asociados a cada uno de sus elementos, aplicando la ley de Ohm. 2.2 Analizar circuitos resistivos alimentados por fuente de voltaje de cd, de un solo lazo aplicando el método de mallas. 2.3 Analizar circuitos de más de un lazo alimentados por fuentes de voltaje de cd, aplicando el método de mallas. 2.4 Analizar circuitos resistivos alimentados por fuente de corriente en cd con un par de nodos aplicando la ley de Kirchhoff de corrientes. 2.5 Analizar circuitos alimentados por fuente de corriente en cd con más de dos nodos aplicando la ley de Kirchhoff de corrientes 2.6 Aplicar el divisor de voltaje en el análisis de circuitos resistivos. 2.7 Aplicar el divisor de corriente en el análisis de circuitos resistivos. 2.8 Transformar fuentes de voltaje reales en fuentes de corriente reales equivalentes y viceversa, como técnica en el análisis de circuitos en cd. 2.9 Aplicar el principio de superposición en el análisis de circuitos resistivos alimentados por dos o más fuentes. 2.10 Calcular el circuito equivalente de Thévenin para un circuito resistivo en cd. 2.11 Calcular el circuito equivalente de Norton para un circuito resistivo en cd.	3.1 Valorar la importancia de comprender el comportamiento de los elementos de un circuito al aplicarles energía eléctrica. 3.2 Valorar la importancia que tienen las leyes de Kirchhoff como base para el desarrollo de la tecnología eléctrica y electrónica. 3.3 Valorar la importancia que tienen los trabajos realizados por Leon Charles Thévenin y su aportación a través del teorema que lleva su nombre. 3.4 Valorar la importancia que tienen los trabajos de Eduard Lawry Norton y su aportación a través del teorema que lleva su nombre.

Introducción

COMPETENCIAS:
- Comprender el concepto de *análisis* en los circuitos eléctricos. [1]
- Valorar la importancia de comprender el comportamiento de los elementos de un circuito al aplicarles energía eléctrica. [3]

En el estudio de los circuitos se distinguen dos procesos básicos: el *análisis* y el *diseño* o síntesis. En este capítulo nos ocupamos del *análisis* de circuitos; inicia con los de tipo resistivo que son alimentados por fuentes de corriente directa, ya que entre los distintos tipos de circuitos, éstos son básicos, y a la vez, los más sencillos de estudiar, toda vez que sus elementos son de comportamiento lineal.

El análisis se fundamenta en las leyes básicas que determinan el comportamiento de las cargas eléctricas y su relación con los potenciales eléctricos en distintos puntos del sistema *circuito*. Se trata de las *leyes de Kirchhoff*, que son dos, la primera está relacionada con los *voltajes* y la segunda aborda las *corrientes* eléctricas. Éstas, junto con la *ley de Ohm* conforman un marco básico para el estudio del comportamiento de los circuitos, tanto para el *análisis* como para el *diseño*.

Conforme apliquemos estas leyes básicas en el análisis de circuitos resistivos alimentados por fuentes independientes de corriente directa (cd), presentaremos métodos y técnicas útiles para entender y comprender el contenido de dichas leyes, para, en capítulos posteriores, pasar al análisis de circuitos más complejos y con otro tipo de fuentes. Esta secuencia que inicia con el análisis y la simplificación de los circuitos básicos permitirá comprender, después, circuitos más elaborados que se utilizan en los sistemas de control, de comunicación, en motores, generadores, en sistemas computarizados y más.

Los distintos temas teóricos que se tratan en este capítulo se comprueban experimentalmente con actividades prácticas de aprendizaje a desarrollar en el laboratorio. Al igual que en el resto de los capítulos, se procura orientar al estudiante para que aplique la metodología científica al realizar estas actividades, considerando principalmente las etapas de *a*) cálculos y diseño, *b*) simulación de circuitos y *c*) elaboración de circuitos en el laboratorio, a partir de un problema dado y del cual se busca obtener una solución, como ya se citó en el capítulo 1.

3.1 Arreglos resistivos alimentados por fuentes de voltaje de cd

COMPETENCIA:
Analizar *circuitos resistivos alimentados por una fuente de voltaje de corriente directa*, para encontrar el valor del voltaje y de la corriente asociados a cada uno de sus elementos, aplicando la ley de Ohm. [2]

Un circuito resistivo se forma con elementos pasivos, llamados *resistores*, o más comúnmente conocidos como *resistencias*. Estos elementos se conectan entre sí, de diferentes maneras para establecer trayectorias a través de las cuales fluirán, de manera controlada, las cargas eléctricas provenientes de una o más *fuentes de alimentación*, que pueden ser de voltaje o de corriente, como muestra la figura 3.1. En ésta, el sistema resistivo se representa mediante un bloque rectangular, cuyo contenido no se especifica, aunque lo pueden conformar varios resistores conectados entre sí de diversas maneras, como en la figura 3.2, por ejemplo, o un solo resistor, como en la figura 3.3. Lo importante en esta representación es que existe un sistema resistivo que recibe energía y potencia a

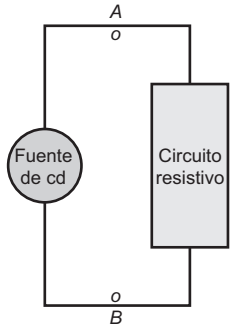


Figura 3.1 Arreglo de una fuente de alimentación (que puede ser de voltaje o de corriente) y un sistema resistivo.

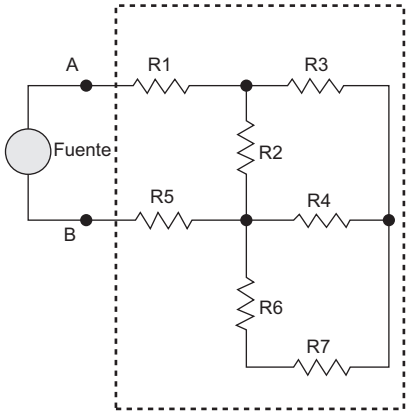


Figura 3.2 Arreglo de siete resistores conectados a una fuente de alimentación.

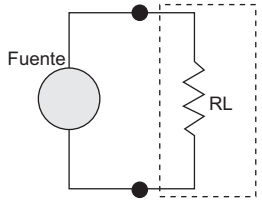


Figura 3.3 Circuito formado por una fuente independiente de voltaje (V_s) y un resistor (R_L).

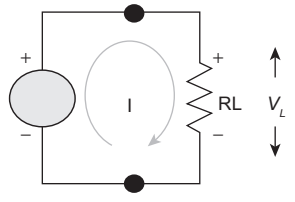


Figura 3.4 Análisis del circuito formado por una fuente independiente de voltaje (cd) y una resistencia (R_L) para el ejemplo 3.1.

partir de una fuente independiente de cd que lo alimenta, a la cual está conectado en los puntos *A* y *B*.

Un arreglo resistivo puede estar alimentado por una o más fuentes, ya sea de voltaje, de corriente, o de ambas, y la energía y potencia que ésta proporcione será consumida y absorbida por el arreglo resistivo; de manera que la suma total de las potencias en el sistema completo será igual a cero. Es decir, toda la potencia que suministran las fuentes presentes en el circuito, es absorbida por el arreglo resistivo al cual alimentan.

Iniciaremos el análisis de circuitos con el arreglo resistivo simple que muestra la figura 3.3, formado por una fuente independiente de voltaje, de *cd* a la cual se le puede llamar V_S[1] y un resistor que se puede representar por R_L.[2] La fuente V_S se considera *ideal* (resistencia interna igual a cero); es decir, no presenta ninguna resistencia al paso de las cargas; de manera que la resistencia total del sistema será la debida únicamente a R_L.

El análisis de un circuito es un proceso cuyo objetivo es *determinar el voltaje y la corriente asociados a cada elemento* de los que integran a dicho circuito. Para el caso que nos ocupa, puede determinarse el valor, tanto del voltaje como de la corriente por aplicación de la ley de Ohm, como se muestra en el ejemplo 3.1.

EJEMPLO 3.1

Desarrolla un análisis del circuito mostrado en la figura 3.3.

Solución

Datos:

Voltaje de la fuente = V_S
Valor de la resistencia de carga = R_L
$I_S = ?$
$I_L =$
$\mathbf{V}_L = ?$

Planteamiento:

Método:

Aplicación de la ley de Ohm.

Puesto que R_L está conectada en paralelo con la fuente V_S, el voltaje que existe en las terminales de la resistencia será

$$V_L = V_S$$

Desarrollo:

1. Dada la polaridad de la fuente de alimentación y tomando en cuenta el sentido convencional de la corriente (+ → –) traza el sentido en el cual circulará. En la figura 3.4 se representa mediante una flecha y se simboliza por la letra *I*.

[1] Se utiliza el subíndice *S*, letra inicial de la palabra en inglés *source* que significa *fuente*.

[2] Se utiliza el subíndice *L,* inicial de la palabra en inglés *load*, que significa *carga*, designa a un elemento que es alimentado por algún dispositivo o sistema de alimentación.

2. La corriente a través de R_L circulará de arriba hacia abajo (según el diagrama de la figura 3.4), lo cual indica que deberá haber una diferencia de potencial entre las terminales de la resistencia, cuya polaridad es: positivo en la terminal superior y negativo en la inferior.
3. Puesto que R_L está conectada en paralelo con la fuente de alimentación, entonces el voltaje en la resistencia será igual en magnitud y en polaridad al voltaje de la fuente: $V_L = V_S$.
4. Aplica de la ley de Ohm para determinar la intensidad de corriente que circula a través de la R_L, de la siguiente manera:

$$I_L = \frac{V_S}{R_L}$$

5. Puesto que se trata de un circuito que contiene una sola trayectoria, a la cual se le denomina *lazo* o *malla*, la corriente que circula a través de la resistencia de carga será la misma que circula a través de la fuente de alimentación, por tanto:

$$I_S = I_L$$

Al resumir el análisis del circuito, tabla 3.1 se tiene lo siguiente:

Tabla 3.1 Resumen del análisis del circuito para el ejemplo 3.1.

Elemento	Voltaje	Corriente	Potencia
Fuente	V_S	$-I_S$	$P = -I_S V_S$
R_L	V_S	I_L	$P = I_L V_S$

$$I_L = \frac{5\text{ V}}{1200\ \Omega} = 4.166\text{ mA}$$

EJEMPLO 3.2

Desarrolla el análisis del circuito de la figura 3.4, considera que la fuente de alimentación es $V_S = 5$ V y $R_L = 1200\ \Omega$. Calcula la potencia que absorbe cada elemento.

Solución

Datos:

$V_S = 5$ V
$R_L = 1200\ \Omega$
$I_L = ?$
$I_S = ?$
$P_L = ?$
$P_S = ?$

Planteamiento:

De acuerdo con la secuencia metodológica recomendada para la solución de los problemas, se desarrollarán dos etapas:

a) Desarrollo teórico.
b) Simulación del circuito.

Método: Aplicación de la ley de Ohm.

COMENTARIO AL ANÁLISIS:

Puesto que la intensidad de corriente en el circuito es la variable dependiente del voltaje, a ésta se le puede asignar un signo positivo o uno negativo.

El signo que se le otorga, es el que corresponde a la polaridad del voltaje en cada elemento, según la terminal por la cual *entra* la corriente al elemento.

Observa en la figura 3.4 que la corriente *entra* al resistor por la terminal cuyo potencial es *positivo*, en tanto que en la fuente, la corriente *entra* por la terminal de potencial *negativo*.

De acuerdo con la regla de los signos en la multiplicación se podrá tener entonces *potencia absorbida positiva* o *potencia absorbida negativa*.

Desarrollo:

a) Desarrollo teórico:

1. Sigue el mismo procedimiento que en el ejemplo 3.1 para determinar la polaridad de los voltajes en la fuente y en el resistor, así como el sentido de la corriente a través de la malla. Consulta el ejemplo 3.1.

2. El voltaje en R_L será el mismo que en V_S, por tanto:

$$V_L = V_S = 5 \text{ V}$$

3. Mediante la ley de Ohm determina la magnitud de la intensidad de corriente en la malla. La corriente es la misma tanto para el resistor como para la fuente de alimentación.
4. Aplica la ecuación 1.12 para calcular la potencia absorbida en cada elemento.

La potencia absorbida por la resistencia de carga es:

$$P_L = V_L I_L$$

$$P_L = (5 \text{ V})\,(0.004166 \text{ A}) = 20.83 \times 10^{-3} \text{ W}$$

La potencia absorbida por la fuente de alimentación es:

$$P_S = V_S I_S$$

$$P_S = (5 \text{ V})\,(-0.004166 \text{ A}) = -20.83 \times 10^{-3} \text{ W}$$

La interpretación física que debes dar a una potencia *absorbida positiva* es que el elemento *realmente está absorbiendo* potencia, mientras que la potencia *absorbida negativa* en la fuente significa que ésta no *absorbe* potencia, sino que la *entrega*.

A manera de resumen, con los resultados se elabora un cuadro de datos para el circuito de la figura 3.4, como el que muestra la tabla 3.2.

Tabla 3.2 Concentración de datos para el ejemplo 3.2.

Elemento	Voltaje	Corriente	potencia
Fuente	5 V	4.166 mA	20.83 mW
Resistencia	5 V	+4.166 mA	+20.83 mW
Suma de potencias en el sistema			✔ 0 W

En la tabla 3.2 se aprecia que la suma total de potencias en el sistema es cero. Encontrar la suma total de potencias en el circuito es una técnica para comprobar la veracidad del análisis del circuito, ya que en todo sistema cerrado la suma de potencias deberá ser cero. O dicho de otra manera, la potencia total *entregada* por los elementos activos es *absorbida* por los elementos pasivos del sistema.

b) Simulación del circuito:
Con un software haz la simulación del circuito, asigna los valores a cada uno de los elementos del sistema y obtén la respuesta mediante este "laboratorio virtual", como se muestra en la figura 3.5.

La figura 3.5 muestra el resultado de simular el circuito correspondiente al ejemplo 3.2. En ella observa no sólo el circuito en análisis, sino también que se han "conectado" dos medidores virtuales: un amperímetro de cd en serie, que toma la lectura de la corriente, y un voltímetro de cd que reporta la lectura del voltaje en las terminales de la resistencia de carga.

Como puedes ver, el *laboratorio virtual* produce los mismos resultados que los cálculos teóricos. De esta manera, el experimentador autoevalúa su cálculo, al mismo tiempo que obtiene una mejor idea de cómo ha de ensamblarse el circuito físicamente para las mediciones en el laboratorio.

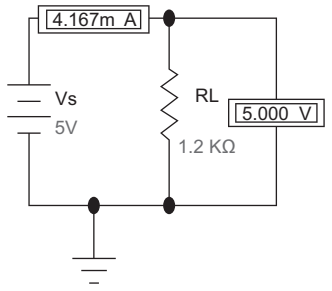


Figura 3.5 Simulación para el circuito del ejemplo 3.2.

3.2 Ley de voltajes de Kirchhoff

La ley de Kirchhoff que el físico alemán obtuvo después de realizar numerosas investigaciones, figura 3.6; ley de voltajes (*LKV*) establece que:

> En una trayectoria cerrada o lazo de una red la suma total de los voltajes, en los elementos contenidos en el lazo, es igual a cero.

También se puede decir que *la suma de caídas de voltaje en un lazo de un circuito es igual a la suma de subidas de voltaje*.

Esta ley, junto con la ley de Ohm, es fundamental para el análisis de los circuitos eléctricos y electrónicos. A continuación se verá su aplicación.

Regresa al ejemplo 3.2, en el que se desarrolló el análisis del circuito de la figura 3.4 aplicando directamente la ley de Ohm para obtener la intensidad de corriente y el voltaje en cada elemento. De nuevo realizaremos el análisis, pero ahora aplicando la ley de Kirchhoff de voltajes (*LKV*), para lo cual se procederá de la siguiente manera:

1. El análisis inicia con el señalamiento del sentido de la corriente en el lazo (también se le llama *malla*), según lo indique la polaridad de la fuente de alimentación, y se representa mediante una flecha curva, como se muestra en la figura 3.7. El sentido de la corriente ayudará a encontrar la polaridad del voltaje en los elementos del circuito.
2. Se identifica la polaridad del voltaje en cada elemento, colocando signos positivo (+) o negativo (–) en sus terminales, igual que en el ejemplo 3.2. La polaridad de la fuente ya está dada: positivo en la terminal superior, negativo en la terminal inferior; mientras que la polaridad de la caída de voltaje en la resistencia de carga (V_L) está determinada por el sentido de la corriente en ella. Como ésta fluye de *arriba hacia abajo* y se sabe que va de *más* a *menos*, se deduce



Figura 3.6 Kirchhoff, Gustav Robert (1824-1887).

Físico alemán, nació en Königsberg (actualmente Kaliningrado, Rusia) y estudió en la universidad de esa ciudad. Fue profesor de física en las universidades de Breslau, Heidelberg y Berlín. Con el químico alemán Robert Wilhelm Bunsen, desarrolló el espectroscopio moderno para el análisis químico. En 1860 los dos científicos descubrieron el cesio y el rubidio mediante la espectroscopia. Kirchhoff dirigió importantes investigaciones relacionadas con la transferencia de calor y también expuso dos reglas, actualmente conocidas como leyes de Kirchhoff, respecto a la distribución de corriente en los circuitos eléctricos.

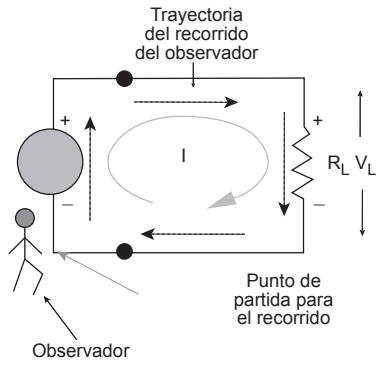
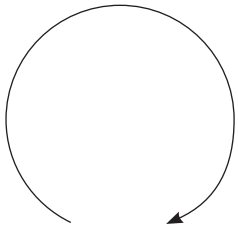
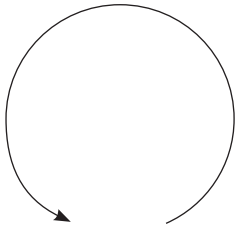


Figura 3.7 Aplicación de la ley de Kirchhoff de voltajes para el análisis de un circuito resistivo simple.



Desplazamiento en sentido dextrógiro (el de las manecillas de un reloj).



Desplazamiento en sentido levógiro (contrario al de las manecillas de un reloj).

Figura 3.8 El recorrido de un observador a lo largo de un lazo, en un circuito, puede ser indistinto, el resultado será el mismo.

que, en el diagrama eléctrico, el positivo del potencial quedará en la terminal superior de la resistencia, mientras que el negativo en la inferior.

3. Una vez determinada la polaridad de los voltajes en todos los elementos del lazo, nos olvidaremos por un momento de la flecha que representa a la corriente para atender a los voltajes y a su polaridad. Para ello, el observador hará un recorrido a lo largo del lazo, a partir de cualquier punto (puede ser del punto inferior a la izquierda del diagrama, por ejemplo, figura 3.7).
4. Se plantea la *ecuación de voltajes o ecuación de malla*.

El conjunto de todos los voltajes en la malla o lazo se describe o modela matemáticamente con una ecuación, a la cual se le da el nombre de *ecuación de voltajes* o *ecuación de malla*. Esta ecuación se va planteando conforme el observador hace su recorrido a través del lazo, de la siguiente manera: al llegar a cada elemento, ya sea activo o pasivo, se toma nota del voltaje que existe en ese elemento y el signo por el cual se está *llegando* a éste, que puede ser positivo (+) o negativo (–). Después del signo se anota la magnitud de ese voltaje; ya sea que tenga valor numérico o pueda representarse mediante algún símbolo o algún modelo matemático. Entonces, a partir de cada elemento del circuito se tendrá un término de la ecuación que se está modelando. El recorrido continúa a través del lazo, pasa por todos los elementos que forman al circuito hasta llegar al punto donde se inició; es decir, hasta cerrar el lazo. El número de elementos del circuito será el número de términos que tendrá la ecuación de malla.

Así entonces, si se inicia el recorrido en el punto inferior a la izquierda del diagrama eléctrico y en el sentido de las manecillas del reloj (sentido dextrógiro),[3] se tiene que el primer elemento que se encuentra en el recorrido es la fuente de alimentación y el observador *entra* a esa diferencia de potencial a través del signo negativo (–) cuya magnitud se simboliza por V_S, por tanto, se tendrá el primer término de la ecuación de malla, correspondiente a la fuente:

$$-V_S \leftarrow \text{Primer término de la ecuación de malla.}$$

Al continuar el recorrido en el mismo sentido, el observador encontrará que el siguiente voltaje o diferencia de potencial, corresponde a la resistencia de carga, e *ingresará* a ella a través del signo (+), cuya magnitud se simboliza por V_L, por tanto, se escribirá el segundo término de la ecuación:

Primer término de la ecuación de malla

$$-V_S + V_L$$

Segundo término de la ecuación de malla

[3] Levogiro del latín *laevus*, izquierdo y *gyrare*, girar. Que gira a la izquierda. Contrario dextrógiro: que gira a la derecha.

El recorrido continúa y como ya no existe otro elemento en el circuito; es decir, ya no hay otra diferencia de potencial, se llegará al mismo punto donde se partió. Es decir, se ha cerrado el lazo. Esto se representa matemáticamente en la ecuación que se está planteando, como una igualación a cero, para que la ecuación completa quede de la siguiente manera:

$$-V_S + V_L = 0 \qquad \text{(ecuación 3.1)}$$

La ecuación 3.1 corresponde a la *ecuación de malla* o *ecuación de voltajes* del circuito de la figura 3.7. Se denomina así porque cada uno de sus términos matemáticos corresponde a una expresión de voltaje (magnitud medida en volts).

A partir de la ecuación 3.1 se puede observar que

$$V_S = V_L \qquad \text{(ecuación 3.2)}$$

También se sabe que, al aplicar la ley de Ohm:

$$V_L = I_L R_L \qquad \text{(ecuación 3.3)}$$

De ahí que, al sustituir la ecuación 3.3 en la ecuación de malla 3.1, ésta se transforma en:

$$-V_S + I_L R_L = 0 \qquad \text{(ecuación 3.4)}$$

De acuerdo con los datos de este ejercicio, se sabe que

$V_S = 5$ V, y que $R_L = 1200\ \Omega$. Las incógnitas del problema son:

$$I_L = ?\ , \qquad P_L = ?\ , \qquad I_S = ?\ , \qquad P_S = ?$$

5. Una vez planteada la ecuación de voltajes o ecuación de malla, se identifican las variables cuyo valor conocido y también aquellas que son desconocidas hasta ahora. Una forma recomendable es colocar un signo ✓ para las variables conocidas y una ✗ para las incógnitas, de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} \checkmark\ \times\ \checkmark \\ -V_S + I_L R_L = 0 \end{matrix}$$

6. Ahora se tiene una ecuación de primer grado con una sola incógnita, que es la I_L. Entonces se procede a despejarla, para tener:

$$I_L = \frac{V_S}{R_L} \qquad \text{(ecuación 3.5)}$$

que es la expresión para ley de Ohm (ecuación 2.6, del capítulo 2). Se ha llegado a una expresión igual a la que se utilizó para resolver el ejemplo 3.2.

De ahí que, al sustituir los valores conocidos se obtiene el valor para la corriente en la malla:

$$I_L = \frac{5\ \text{V}}{1200\ \Omega} = 4.166\ \text{mA}$$

7. A partir de este resultado se procede de la misma manera que en el ejemplo 3.2 y se tendrán los mismos resultados para las potencias en cada elemento y en el sistema completo.

3.2.1 Análisis de circuitos resistivos de una malla o lazo

COMPETENCIA:
Analizar *circuitos resistivos alimentados por fuente de voltaje de cd de un solo lazo* aplicando el método de mallas. [2]

Un circuito de una malla o lazo contiene sólo una trayectoria cerrada a través de la cual podrá circular la corriente. Por tanto, habrá una sola corriente *I* circulando en el circuito, y será la misma para todos los elementos que constituyen el lazo. Visto de otra manera, todos los componentes del lazo están conectados en serie, figura 3.9.

En el ejemplo 3.2 se ha hecho el análisis de un circuito resistivo de un solo lazo, con solo un resistor. Pero no todos los circuitos de un solo lazo contienen un resistor; sino que puede haberlos de *n* resistores. Para su análisis se emplea el mismo método que se utilizó en el ejemplo 3.2: *Aplicación de la ley de Kirchhoff de voltajes y de la ley de Ohm*.

Consideremos el caso de un circuito resistivo de una malla o lazo, con 4 resistores conectados en serie con una fuente independiente de voltaje, como muestra la figura 3.9. Para su solución, mediante la ley de Kirchhoff de voltajes, se seguirán los mismos pasos que para el caso de un solo resistor y una fuente:

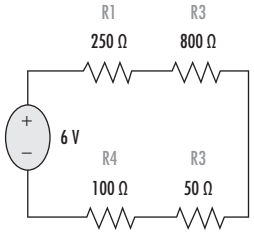


Figura 3.9 Circuito de un solo lazo formado por una fuente de alimentación y 4 resistores.

1. Determina la polaridad de la fuente de alimentación.
2. De acuerdo con la polaridad de la fuente establece el sentido (convencional) de la corriente en la malla.
3. Con base en el sentido de la corriente identifica la polaridad de la caída de voltaje en cada uno de los elementos pasivos.
4. Aplica la ley de Kirchhoff de voltajes alrededor del lazo para obtener la ecuación de voltajes, que será una ecuación de primer grado. Para esto, como observador harás un recorrido por todo el lazo. El recorrido puede ser, indistinto, en sentido de las manecillas del reloj (dextrógiro) o en sentido contrario a éstas (levógiro), el resultado siempre será el mismo. Observa la figura 3.8.
5. Identifica en la ecuación de malla las variables conocidas y las desconocidas.
6. Resuelve la ecuación de malla para la variable desconocida o incógnita.
7. A partir de que conoces la corriente (única, ya que se trata de un circuito de un solo lazo) y los voltajes en cada elemento calcula la potencia absorbida en cada uno de ellos y la potencia total absorbida en el sistema.

EJEMPLO 3.3

Aplica la ley de Kirchhoff de voltajes y desarrolla el análisis del circuito mostrado en la figura 3.9. Comprueba el resultado *a*) mediante el cálculo de las potencias absorbidas en cada elemento y en el sistema completo, *b*) por simulación del circuito.

Solución

Datos:

$V_S = 6$ V $\quad P_S = ?$
$R_1 = 250\ \Omega \quad P_1 = ?$
$R_2 = 800\ \Omega \quad P_2 = ?$
$R_3 = 50\ \Omega \quad P_3 = ?$
$R_4 = 100\ \Omega \quad P_4 = ?$
$I = ?$

Planteamiento:

Método: aplicación de LKV y de la ley de Ohm.

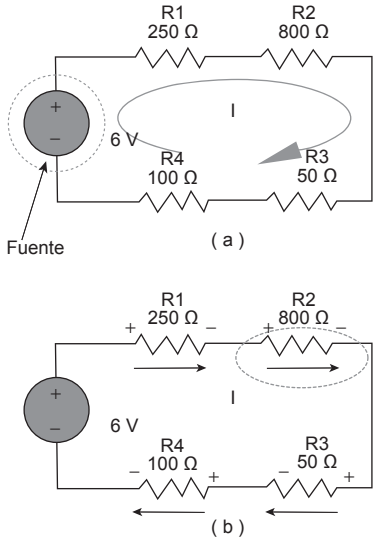


Figura 3.10 Al aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes para el análisis de un circuito resistivo de un solo lazo:

a) Se identifica la polaridad de la fuente y se asigna el sentido de la corriente.
b) Se identifica la polaridad de la caída de voltaje en cada resistor.

Desarrollo:

1. Identifica la polaridad del voltaje en la fuente de alimentación (figura 3.10*a*).
2. Establece el sentido (convencional) en el que circulará la corriente en el lazo, por efecto de la fuente de alimentación (figura 3.10*a*).
3. Identifica la polaridad en la caída de voltaje de cada resistencia, según el sentido de la corriente (figura 3.10*b*).
4. Aplica la ecuación de voltajes en la malla, de la siguiente manera:

$$-V_S + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0 \qquad \text{(ecuación 3.6)}$$

Pero, el voltaje para cada una de las resistencias puede sustituirse por la expresión equivalente, aplicando la ley de Ohm, en cada caso, para obtener:

$$-V_S + IR_1 + IR_2 + IR_3 + IR_4 = 0 \qquad \text{(ecuación 3.7)}$$

Ecuación de malla

5. En la ecuación de malla resultante (3.7) se puede tomar a la (I) como factor común

$$-V_S + I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = 0 \qquad \text{(ecuación 3.8)}$$

Y ahora identifica a las variables conocidas y a las incógnitas:

✓ ✗ ✓ ✓ ✓ ✓

$$-V_S + I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = 0$$

6. Como puedes apreciar se trata de una ecuación de primer grado con una sola incógnita (*I*), la cual se puede resolver despejando a la incógnita *I*, para tener la expresión:

Al sustituir en la ecuación 3.7 los resultados obtenidos para los voltajes en las resistencias, se satisface la igualdad. O bien, al sustituir estos valores de voltajes en la ecuación 3.6, se observa que se cumple la ley de Kirchhoff de voltajes.

$$I = \frac{V_S}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \qquad \text{(ecuación 3.9)}$$

Observa que la ecuación 3.9 tiene la forma de la expresión para la ley de Ohm. En el numerador aparece el valor del voltaje de la fuente de alimentación, mientras que en el denominador se tiene la suma de tres resistencias conectadas en serie, lo que es igual a una resistencia total equivalente. Al sustituir los valores tendrás:

$$I = \frac{6\text{V}}{250\,\Omega + 800\,\Omega + 50\,\Omega + 100\,\Omega} = \frac{6\text{ V}}{1200\,\Omega}$$
$$I = 5\text{ mA}$$

que es el valor de la intensidad de corriente que circula a través de todos los elementos del lazo que se analiza. A partir de esto puedes calcular la caída de voltaje en cada resistencia, con solo aplicar nuevamente la ley de Ohm en cada caso:

El voltaje en R_1 será → $V_1 = IR_1 = (0.005\text{ A})\ (250\ \Omega)$
$V_1 = 1.25\text{ V}$
El voltaje en R_2 será → $V_2 = IR_2 = (0.005\text{ A})\ (800\ \Omega)$
$V_2 = 4\text{ V}$
El voltaje en R_3 será → $V_3 = IR_3 = (0.005\text{ A})(50\ \Omega)$
$V_3 = 0.25\text{ V}$
El voltaje en R_4 será → $V_4 = IR_4 = (0.005\text{ A})(100\ \Omega)$
$V_4 = 0.5\text{ V}$

Comprobación

a) Teórica

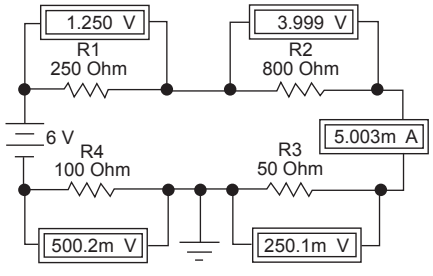


Figura 3.11 Simulación para el circuito del ejemplo 3.3.

Tabla 3.3 Resumen de datos para el análisis del circuito mostrado en la figura 3.9.

Elemento	Voltaje	Corriente	Potencia
Fuente	6 V	–0.005 A	–0.03 W
R_1	1.25 V	+0.005 A	+0.00625 W
R_2	4 V	+0.005 A	+0.02 W
R_3	0.25 V	+0.005 A	+0.00125 W
R_4	0.5 V	+0.005 A	+0.0025 W
		✔ Suma de potencias = 0 W	

b) Por simulación. Con un simulador se obtiene la figura 3.11. En el resultado del simulador se aprecia que arroja prácticamente los mismos datos que los obtenidos en cálculos teóricos aplicando la

ley de Kirchhoff de voltajes y la ley de Ohm; tanto en intensidad de corriente (dada por el amperímetro), como en caída de voltaje (detectada por los voltímetros) en cada uno de los resistores. Esto permite construir una concentración de datos similar a la que presenta la tabla 3.2.

Una vez más, la técnica de simulación de circuitos nos ha auxiliado para comprobar los cálculos teóricos, al mismo tiempo que permite al experimentador ensayar la manera de ensamblar el circuito en el laboratorio.

En la figura 3.11 se incluyen de una sola vez cuatro voltímetros y un amperímetro, para medir simultáneamente el voltaje en los cuatro resistores y la intensidad de corriente en el lazo; sin embargo, también se logran los mismos resultados si se va conectando un solo medidor a la vez, para realizar mediciones una en una, tanto para voltajes como para la intensidad de corriente.

3.2.2 Análisis de circuitos resistivos con más de una malla o lazo. Método de mallas

COMPETENCIA:
Analizar *circuitos de más de un lazo alimentados por fuentes de voltaje de cd* aplicando el método de mallas. [2]

Encontrar el voltaje y la corriente asociados a cada elemento en un circuito, cuando éste consta de más de una malla o lazo, es un procedimiento similar al que se aplica para el análisis de circuitos con un solo lazo; es el mismo método, se aplican la ley de Kirchhoff de voltajes y la ley de Ohm, a reserva de hacer algunas consideraciones, como verás a continuación.

Consideremos el circuito mostrado en la figura 3.12. Es un circuito con una fuente de voltaje de cd y 6 resistores, en el que se forman dos mallas, a las que les podemos llamar *malla 1*, la que forman la fuente de *cd*, R_1, R_2 y R_3 y *malla 2* formada por R_2, R_4, R_5 y R_6. Observa que R_2 está presente en ambas mallas. Para su análisis procede como se explica a continuación:

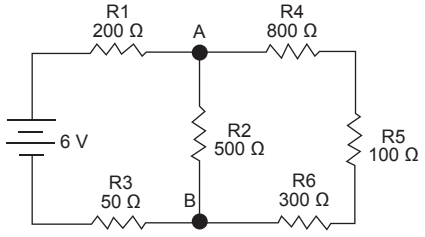


Figura 3.12 Circuito resistivo de dos mallas y una fuente de alimentación.

1. Identifica la polaridad de la fuente de voltaje de *cd*.
2. Asigna a cada malla una intensidad de corriente *hipotética*. Las puedes identificar con dos flechas curvas y nombrarlas I_1 e I_2. El sentido de estas corrientes es arbitrario; cualquiera que elijas conducirá al mismo resultado, figura 3.13
3. En congruencia con el sentido asignado a la corriente en cada malla establece la polaridad a la caída de voltaje en cada resistencia, recuerda que la corriente fluye de (+) a (–).
4. Como ya se hizo notar, en el circuito existe una rama que es común a las dos mallas; es la que contiene a la R_2. Por tanto, a través de esta rama circula I_1 en un sentido e I_2 en el sentido contrario. Asigna a R_2 una caída de voltaje debida a cada una de estas corrientes. Es evidente que serán caídas de voltaje con polaridades contrarias.[4]

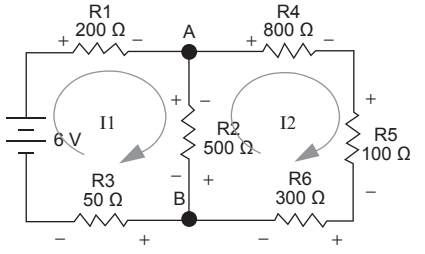


Figura 3.13 Identificación de las corrientes de malla I_1 e I_2.

[4] Hablar de *dos corrientes* o de *polaridades contrarias* a través del resistor R_2 es resultado de haber establecido sentidos hipotéticos a las corrientes. Es parte del proceso de análisis utilizando el Método de Mallas. Definitivamente en este resistor habrá una sola diferencia de potencial y una sola corriente (neta), fluyendo de más a menos.

5. Aplica la ley de Kirchhoff de voltajes, haciendo un recorrido a lo largo del lazo que configura a la *malla 1* para obtener la ecuación de voltajes de dicha malla. La puedes identificar como *ecuación 1*.
6. Aplica la ley de Kirchhoff de voltajes a la *malla 2*, para obtener su ecuación de voltajes. Identifícala como *ecuación 2*. Ahora tienes un sistema de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas de primer grado, I_1 e I_2.
7. Resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas para I_1 e I_2. Los valores de éstas pueden resultar positivos o negativos. Si el resultado fuera *positivo*, significa que el sentido *hipotético* que asignaste a esa corriente, al inicio del desarrollo, *es correcto*. Si el resultado fuera *negativo*, significa que el sentido asignado inicialmente a esa corriente está *invertido* y deberás cambiarlo. También deberás cambiar el signo (de negativo a positivo) del resultado matemático obtenido para la misma.
8. Observa que la *corriente neta* en la rama que es común a las dos mallas resulta de dos corrientes que van en sentido contrario; es la suma algebraica de éstas, y el sentido de esta corriente neta será el sentido que tenga la corriente de mayor magnitud.
9. Cuando ya se tienen los valores de la intensidad de corriente y su sentido en cada resistencia, por medio de la ley de Ohm obtén las caídas de voltaje en cada una de ellas. La suma total de voltajes a lo largo de un lazo deberá ser cero.

EJEMPLO 3.4

Desarrolla el análisis del circuito mostrado en la figura 3.12. Comprueba el resultado *a*) mediante el cálculo de potencias, *b*) por simulación del circuito.

Solución

Datos:

$V_S = 6$ volts $\quad R_2 = 500\ \Omega \quad R_4 = 800\ \Omega$
$R_1 = 200\ \Omega \quad R_3 = 50\ \Omega \quad R_5 = 100\ \Omega$
$R_6 = 300\ \Omega$

Planteamiento:

Se trata de un circuito resistivo de dos mallas, alimentado por una fuente independiente de voltaje.

Método: Análisis por mallas

Desarrollo:

Siguiendo el procedimiento.
1. Identifica la polaridad de la fuente, figura 3.13.

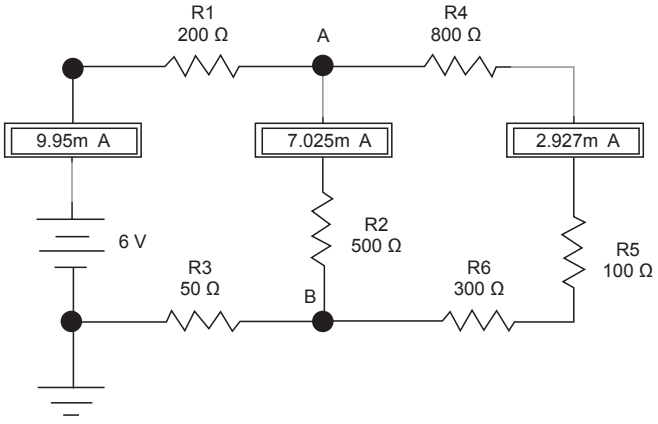


Figura 3.14 Simulación del circuito del ejemplo 3.4.

2. Asigna un sentido hipotético a las corrientes de mallas I_1 e I_2, identifícalo con una flecha curva en cada caso.
3. Con base en el sentido que asignaste a la corriente en cada malla, identifica las polaridades de las caídas de voltaje en cada resistor (también son hipotéticas). En la figura 3.13 se identifican el positivo y el negativo.

Análisis de la malla 1:

4. Al hacer el recorrido de observador en sentido dextrógiro a lo largo de la malla 1, iniciando en el punto localizado en el ángulo inferior izquierdo del diagrama de la figura 3.13, obtienes la siguiente ecuación de voltajes.

$$-V_S + V_1 + V_2 + V_3 = 0 \quad \text{(ecuación de malla 1)}$$

La expresión de voltaje en cada resistencia se sustituye por su equivalente mediante la ley de Ohm, con la observación de que a través de R_2 circulan *dos corrientes* en sentidos contrarios: I_1 en sentido *de arriba hacia abajo* e I_2 *de abajo hacia arriba*. Como estás analizando la malla 1, entonces toma como corriente de referencia a la $I_{1;}$ así que el voltaje en R_2 será:

$$V_2 = R_2 (I_1 - I_2)$$

La corriente I_2 se considera negativa por ser la que *circula en sentido contrario* a la corriente de referencia, que es la malla 1.

Entonces, la ecuación de voltajes de la malla 1 se transforma en:

$$-V_S + I_1R_1 + R_2 (I_1 - I_2) + I_1R_3 = 0$$

Al organizar los términos esta ecuación queda de la siguiente manera:

$$I_1 (R_1 + R_2 + R_3) - I_2R_2 = V_S \quad \leftarrow \text{(ecuación de malla 1)}$$

Análisis de la malla 2:

5. Al hacer el recorrido en sentido dextrógiro a lo largo de la malla 2, iniciando en el punto *B* del diagrama de la figura 3.13, obtienes la siguiente ecuación de voltajes.

$$V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = 0 \qquad \text{(ecuación de malla 2)}$$

El voltaje que corresponde a la R_2 se expresa de la siguiente manera:

$$V_2 = R_2 (I_2 - I_1)$$

Como ahora analizas la malla 2, la *corriente de referencia* es la I_2, que corresponde a esa malla, entonces se considera que la I_1 circula *en sentido contrario*, por tanto, a ésta se le asigna signo negativo. Entonces la ecuación de voltajes de la malla 2 quedará de la siguiente manera:

$$R_2 (I_2 - I_1) + I_2 R_4 + I_2 R_5 + I_2 R_6 = 0$$

Al organizar los términos se transforma en la siguiente expresión:

$$-I_1 R_2 + I_2 (R_2 + R_4 + R_5 + R_6) = 0 \quad \leftarrow \text{(ecuación de malla 2)}$$

6. Ahora tienes un sistema de dos ecuaciones simultáneas de primer grado, con dos incógnitas. Identifica a las variables, cuyos valores se conocen, y a las incógnitas, de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} \text{✗} & \text{✓} & \text{✓} & \text{✓} & \text{✗} & \text{✓} & \text{✓} \\ I_1 (R_1 + R_2 + R_3) & & & & - I_2 R_2 & & = V_S \end{matrix} \quad \leftarrow \text{(ecuación 1)}$$

$$\begin{matrix} \text{✗} & & \text{✗} & \text{✓} & \text{✓} & \text{✓} & \text{✓} \\ -I_1 R_2 & & + I_2 (R_2 & + R_4 & + R_5 & + R_6) & = 0 \end{matrix} \quad \leftarrow \text{(ecuación 2)}$$

Al sustituir valores, según los datos que tienes:

$$I_1 (200\ \Omega + 500\ \Omega + 50\ \Omega) - I_2\ 500\ \Omega = 6\ \text{V}$$

$$-I_1\ 500\ \Omega + I_2 (500\ \Omega + 800\ \Omega + 100\ \Omega + 300\ \Omega) = 0$$

El sistema se puede sintetizar así:

$$750\ I_1 - 500\ I_2 = 6 \qquad \leftarrow 1$$

$$-500\ I_1 + 1700\ I_2 = 0 \qquad \leftarrow 2$$

Al resolver el sistema para I_1 e I_2 se tiene que

$$I_1 = 9.94\ \text{mA}$$

$$I_2 = 2.92\ \text{mA}$$

7. Puesto que el resultado para ambas corrientes resultó con signo positivo, se afirma que el sentido hipotético que le asignaste a ambas corrientes, al inicio del desarrollo del problema, dextrógiro, es correcto. Por

tanto, también serán correctos los signos asignados en la polaridad para cada uno de los voltajes en las resistencias, cuya magnitud se obtiene, aplicando la ley de Ohm en cada caso:

$$V_1 = I_1 R_1 = (0.00994 \text{ A})(200\ \Omega) = 1.988 \text{ volts}$$
$$V_2 = (I_1 - I_2) R_2 = (0.00994 \text{ A} - 0.00292 \text{ A})(500\ \Omega) = 3.51 \text{ volts}$$
$$V_3 = I_1 R_3 = (0.00994 \text{ A})(50\ \Omega) = 0.497 \text{ volts}$$
$$V_4 = I_2 R_4 = (0.00292 \text{ A})(800\ \Omega) = 2.336 \text{ volts}$$
$$V_5 = I_2 R_5 = (0.00292 \text{ A})(100\ \Omega) = 0.292 \text{ volts}$$
$$V_6 = I_2 R_6 = (0.00292 \text{ A})(300\ \Omega) = 0.876 \text{ volts}$$

a) Comprobación mediante el cálculo de potencias en el circuito. Para comprobar el resultado global calcula la potencia absorbida en cada elemento del circuito, obtendrás un cuadro de datos como el que se muestra en la tabla 3.4.

Tabla 3.4 Concentración de datos para el circuito del ejemplo 3.4.

Elemento	Voltaje	Corriente	Potencia
Fuente	6 V	–0.00994 A	–59.64 mW
R_1	1.988 V	0.00994 A	19.760 mW
R_2	3.51 V	0.00702 A	24.640 mW
R_3	0.497 V	0.00994 A	4.940 mW
R_4	2.336 V	0.00292 A	6.821 mW
R_5	.292 V	0.00292 A	0.852 mW
R_6	.876 V	0.00292 A	2.557 mW
	Suma total de potencias =		–0.07 mW

Observa que la suma total de potencias en el sistema no es igual a cero. La diferencia obtenida indica que es mayor la potencia suministrada por la fuente que la absorbida por las resistencias. La explicación es que durante el proceso del cálculo de las corrientes y voltajes se han recortado fracciones decimales en los resultados parciales, lo cual introduce un error de apreciación.

La acumulación de pequeños errores en resultados parciales repercute en un error final como el que ahora se observa, una pequeña diferencia respecto de lo que debería ser la suma total de potencias, igual a cero. Al calcular la magnitud de este error en términos porcentuales se obtiene que éste es de 0.11%, lo que significa un error prácticamente despreciable.

b) Comprobación del resultado mediante la simulación del circuito: Con un simulador traza el circuito resistivo del problema y conecta los medidores virtuales, para obtener el resultado que muestra la figura 3.14.

Los resultados del simulador también presentan algunas diferencias entre éstos y los obtenidos mediante el cálculo teórico. Recuerda que el simulador hace una representación muy aproximada de lo que el sistema físico podría ser en la realidad. Cabe comentar de nuevo la importancia de *considerar el mayor número de decimales* en los resultados parciales de los cálculos teóricos para evitar que se acumule un error considerable en el resultado final.

$$E_R\,(\%) = \left|\frac{9.95\,\text{mA} - 9.94\,\text{mA}}{9.95\,\text{mA}}\right| \times 100 = 0.1\%$$

Así se puede determinar el error introducido en los cálculos al omitir cierto número de decimales, comparándolos con el resultado *ideal* del simulador.

Error introducido en el cálculo de I_1:

En este cálculo del porcentaje de error se ha tomado como referente al valor dado por el simulador virtual, cuyos valores aparecen en el denominador de la operación. Se dice entonces que se ha determinado el error o desviación del valor teórico calculado, respecto de los valores dados por el simulador.

Error introducido en el cálculo de I_2:

EJEMPLO 3.5

Realiza el análisis del circuito representado en la figura 3.15. Comprueba los resultados: *a*) Mediante el cálculo de potencias. *b*) Utilizando la simulación.

Solución

Datos:

$V_{S1} = 5$ V
$V_{S2} = 6$ V
$R_1 = 100\ \Omega$
$R_1 = 200\ \Omega$
$R_3 = 300\ \Omega$
$R_4 = 400\ \Omega$
$R_5 = 500\ \Omega$
$R_6 = 600\ \Omega$

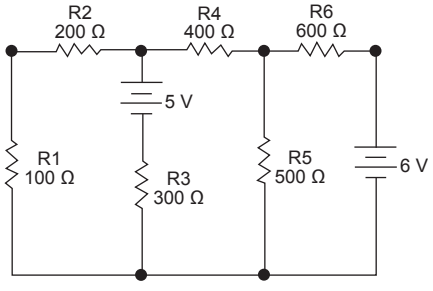


Figura 3.15 Circuito resistivo de 3 mallas con dos fuentes de alimentación. Ejemplo 3.5.

Planteamiento:

Método: *Análisis por mallas*

1. Se trata de un circuito de tres mallas.
2. Se pueden asignar sentidos hipotéticos para la corriente en cada malla, polaridad hipotética para el voltaje en cada elemento, y plantear tres ecuaciones de voltajes mediante la aplicación de la Ley de Kirchhoff de voltajes, para formar un sistema de ecuaciones simultáneas.
3. Al resolver el sistema de ecuaciones puedes obtener los valores de las corrientes.
4. Aplica la ley de Ohm para determinar los voltajes en cada resistencia.

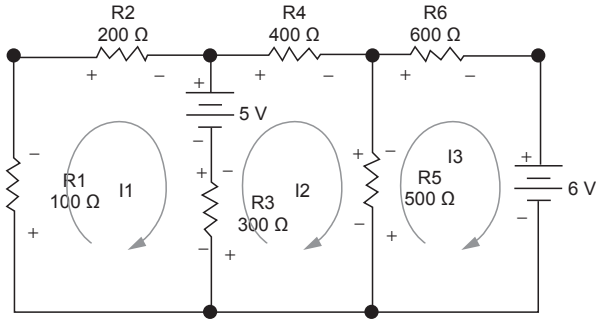


Figura 3.16 Diagrama que muestra el sentido de corriente en cada malla y la polaridad de caídas de voltaje, hipotéticos, para el ejemplo 3.5. (La polaridad de las fuentes de voltaje no es hipotética).

Desarrollo:

Si asignas como sentido hipotético de la corriente en cada malla (I_1, I_2, I_3), el de las manecillas del reloj (dextrógiro), y además fija la polaridad de la caída de voltaje en cada resistor resulta el diagrama que muestra la figura 3.16.

Al aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes al hacer el recorrido de observador en sentido dextrógiro en cada malla, obtienes las ecuaciones siguientes:

Malla 1:

$$100\,I_1 + 200\,I_1 + 5\text{ V} + 300\,I_1 - 300\,I_2 = 0$$

Al reorganizar términos:

$$600\,I_1 - 300\,I_2 = -5\text{ V} \qquad \leftarrow \text{(ecuación de malla 1)}$$

Malla 2:

$$-300\,I_1 + 1200\,I_2 - 500\,I_3 = 5\text{ V}$$

Al reorganizar términos:

$$-300\,I_1 + 1200\,I_2 - 500\,I_3 = 5\text{ V} \qquad \leftarrow \text{(ecuación de malla 2)}$$

Malla 3:

$$-500\,I_2 + 1100\,I_3 = -6\text{ V} \qquad \leftarrow \text{(ecuación de malla 3)}$$

A partir de las ecuaciones de mallas se establece un sistema de ecuaciones simultáneas de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned} 600\,I_1 - 300\,I_2 &= -5 \\ -300\,I_1 + 1200\,I_2 - 500\,I_3 &= 5 \\ -500\,I_2 + 1100\,I_3 &= -6 \end{aligned}\right\}$$

Sistema de ecuaciones simultáneas

El sistema tiene por resultado, para I_1, I_2, e I_3:

$$I_1 = -8.471\text{ mA} \qquad I_2 = -0.276\text{ mA} \qquad I_3 = -5.58\text{ mA}$$

Los tres valores resultaron con signo negativo; lo que indica que el sentido hipotético asignado inicialmente a la corriente de cada una de las tres mallas (dextrógiro), *debe ser cambiado* (a levógiro). Al cambiar el sentido de cada corriente, también deberás cambiar el signo matemático en el valor de esa corriente.

La figura 3.17 muestra el sentido correcto de la corriente en cada malla y la polaridad correcta para la caída de voltaje en cada resistencia. La caída de voltaje en cada resistencia se calcula con la ley de Ohm. Los resultados numéricos se muestran en la tabla 3.5.

Tabla 3.5 Concentración de datos para el circuito del ejemplo 3.5.

Elemento	Voltaje	Corriente	Potencia
V_{S1}	5 V	–8.195 mA	–40.975 mW
V_{S2}	6 V	–5.580 mA	–33.480 mW
R_1	0.8471 V	8.471 mA	7.175 mW
R_2	1.6942 V	8.471 mA	14.351 mW
R_3	2.4585 V	8.195 mA	20.147 mW
R_4	0.1104 V	0.276 mA	0.030 mW
R_5	2.652 V	5.304 mA	14.066 mW
R_6	3.348 V	5.580 mA	✓ 18.618 mW
Suma total de potencias = 0 con desviación de 0.091%			

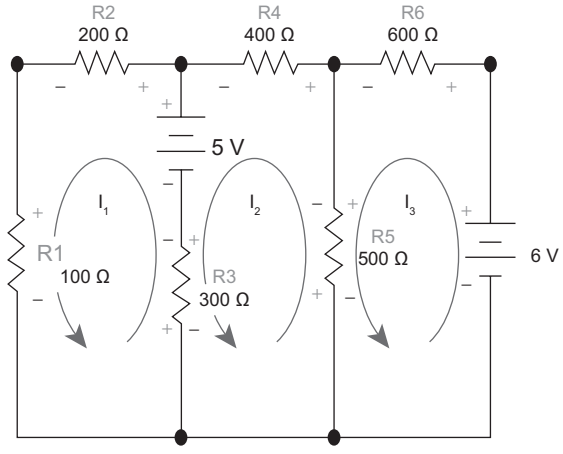


Figura 3.17 Diagrama que muestra el sentido de la corriente en cada malla y la polaridad de caídas de voltaje correctos, para el ejemplo 3.5. (La polaridad de las fuentes de voltaje no es hipotética).

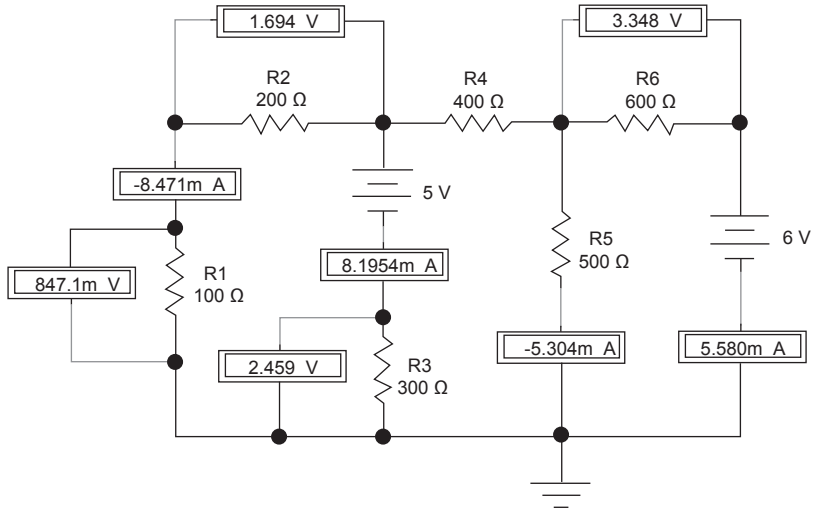


Figura 3.18 Simulación del circuito del ejemplo 3.5.

Recuerda que al hacer el análisis de circuitos se trabaja con el *sentido convencional* de la corriente, aunque en el laboratorio *los instrumentos y equipos de medición indican siempre el sentido real de ésta*.

Comprobación:

a) *Comprobación del resultado mediante el cálculo de las potencias:*
La suma total de potencias en el sistema es aproximadamente igual a cero; se tuvo una desviación de 0.091%. Esta desviación, como ya se explicó en su oportunidad, se debe a que no se consideraron todas las cifras decimales en cada resultado parcial. Esto significa que se tiene una eficiencia, o bien una confiabilidad de 99.909% en el resultado. Recordemos que en ocasiones se presentan divisiones periódicas infinitas, y que no es posible considerar la totalidad de los decimales para cada cálculo; será decisión del experimentador si hace un redondeo en los valores o deja abierto el margen de error calculado.

b) *Comprobación del resultado mediante la simulación del circuito:*
En la figura 3.18 se muestra el resultado de la simulación del circuito analizado.

3.3 Ley de corrientes de Kirchhoff

Como sabes, un circuito se forma al conectar entre sí diversos elementos, tanto activos como pasivos, a través de los cuales fluye una cierta intensidad de corriente. Al punto de conexión eléctrica entre dos o más elementos se le conoce con el nombre de *nodo*; es decir, en un nodo pueden reunirse las terminales de dos o más elementos; de manera que en todo circuito hay *por lo menos dos nodos*.

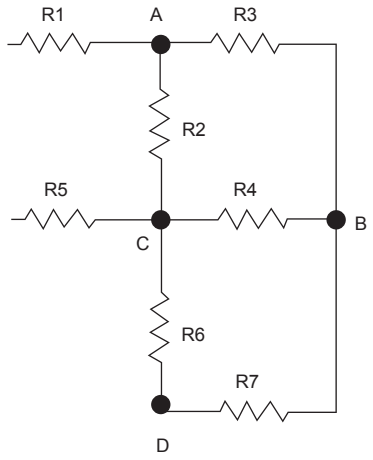


Figura 3.19 Circuito resistivo que contiene 4 nodos, identificados por las letras *A*, *B*, *C*, y *D*.

Por ejemplo, en la figura 3.19 se muestra un arreglo resistivo en el cual se aprecian cuatro nodos, identificados por las letras *A, B, C* y *D*; en cada uno de estos puntos se contactan dos o más elementos, de la siguiente manera: en el nodo *A* se conectan terminales de los resistores R_1, R_2 y R_3; en el nodo *B* los resistores R_3, R_4 y R_7; en el nodo *C* terminales de los resistores R_2, R_4, R_5 y R_6; mientras que en el nodo *D* se ponen en contacto los resistores R_6 y R_7.

Identificar los nodos en un arreglo es de gran importancia para el análisis del circuito, ya que estos puntos de contacto juegan un papel fundamental en el comportamiento de la corriente eléctrica que fluye a través de ellos, como veremos en las siguientes secciones de este capítulo.

La segunda ley que rige el comportamiento de las cargas eléctricas al fluir a través de un circuito, también fue descubierta por Gustav Robert Kirchhoff (figura 3.6), quien la estableció de la siguiente manera:

> La suma total de las corrientes en un nodo es igual a cero.

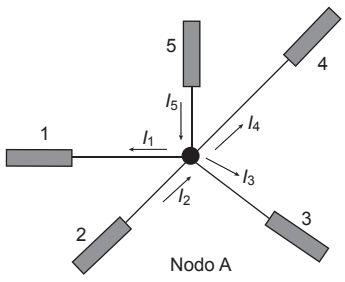


Figura 3.20 Representación del nodo *A* en el cual se conectan cinco elementos.

Esto equivale a decir que la corriente total que *entra* a un nodo es igual a la corriente total que *sale* del mismo. Se conoce como la *ley de Kirchhoff de corrientes (LKC)*. Esta ley se ilustra en la figura 3.20, en la cual se muestra la conexión de cinco elementos identificados por los números del 1 al 5; el punto en donde se unen se identifica como *nodo A*. Las flechas ayudan a representar el sentido de cada una de las corrientes en los diferentes elementos o ramas, al mismo tiempo que se identifican por I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5.

En la misma ilustración se observa que las corrientes I_2 e I_5 *entran* al nodo *A*, mientras que las corrientes I_1, I_3 e I_4 *salen* de éste. De acuerdo con el enunciado de la ley de Kirchhoff de corrientes, la situación en el nodo *A* se puede modelar matemáticamente de la siguiente forma:

Corriente total que entra = corriente total que sale

$$\overbrace{I_2 + I_5}^{} = \overbrace{I_1 + I_3 + I_4}^{} \qquad \text{(ecuación 3.10)}$$

que también puede expresarse así:

$$\left.\begin{aligned}(I_2 + I_5) - (I_1 + I_3 + I_4) = 0\\ I_2 + I_5 - I_1 - I_3 - I_4 = 0\end{aligned}\right\} \qquad \text{(ecuación 3.11)}$$

Las ecuaciones 3.10 y 3.11 son expresiones de la ley de Kirchhoff de corrientes. Esta ley es básica, junto con la ley de Kirchhoff de voltajes y la ley de Ohm, para el análisis de circuitos. Conocer estas leyes es contar con herramientas para resolver un problema; queda al criterio del experimentador definir cuáles de estas herramientas podrá usar para cada caso.

3.3.1 Análisis de circuitos resistivos con dos nodos

COMPETENCIA:
Analizar *circuitos resistivos alimentados por fuente de corriente en cd* con un par de nodos aplicando *la ley de Kirchhoff de corrientes*. [2]

Iniciemos ahora con la aplicación de la ley de Kirchhoff de corrientes (*LKC*) para el caso más sencillo, el de un circuito que cuenta con un par de nodos y una fuente independiente de cd.

Consideremos el circuito mostrado en la figura 3.21, formado por una fuente de *cd*, que proporciona una corriente total de 100 *mA* y dos resistores, R_1 de 300 Ω y R_2 de 100 Ω. En el circuito se distinguen dos nodos, identificados como *A* y *B*. Observa que la corriente total (I_S), al llegar al nodo *A* se dividirá en dos partes, una que fluirá a través de R_1, que puede identificarse como I_1, y la otra a través de R_2 que se puede llamar I_2.

De acuerdo con la ley de Kirchhoff de corrientes, se tiene lo siguiente en el nodo *A* :

Nodo *A* :
Corriente total que *entra* = corriente total que *sale*.

$$\overbrace{I_S} = \overbrace{I_1 + I_2} \qquad \text{(ecuación 3.12)}$$

Las corrientes I_1 e I_2 fluyen en el diagrama, de arriba hacia abajo a través de R_1 y R_2, lo cual indica que en las terminales de ambos resistores hay una diferencia de potencial (*ddp*), cuyo positivo está en la terminal superior y el negativo en la terminal inferior. Se puede llamar V_{AB} a esta *ddp*; es decir, el voltaje en el nodo *A* respecto al nodo *B*.

Según la ley de Ohm, se tiene que el voltaje en *A* es

$$\overset{\times}{V}_{AB} = \overset{\times}{I_1}\ \overset{\times\ \checkmark}{R_1} \qquad \text{(ecuación 3.13)}$$

$$\text{O bien:} \quad \overset{\times}{V}_{AB} = \overset{\times}{I_2}\ \overset{\times\ \checkmark}{R_2} \qquad \text{(ecuación 3.14)}$$

Ambas ecuaciones son de primer grado y cada una tiene dos incógnitas (señaladas por ✗). Asimismo, puedes apreciar que las dos resistencias están conectadas en paralelo; por tanto, el voltaje en sus terminales

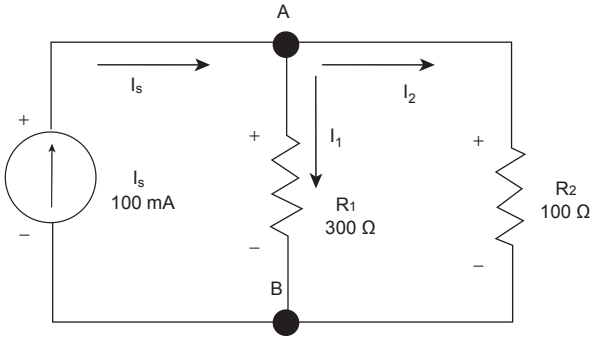


Figura 3.21 Circuito resistivo alimentado por una fuente de corriente de cd. Se distinguen dos nodos, *A* y *B*.

será el mismo, o sea V_{AB}. Si de las ecuaciones 3.13 y 3.14 despejamos a I_1 e I_2 y sustituimos en la ecuación 3.12, tendremos:

$$I_S = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2}$$

Al factorizar e identificar variables conocidas y no conocidas:

$$\checkmark \quad \times \quad \checkmark \quad \checkmark$$
$$I_S = V_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

O también:

Al despejar V_{AB}, tendremos: $\checkmark \quad \times \quad \checkmark \quad \checkmark$
$$I_S = V_{AB}\left(\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}\right) \text{ (ecuación 3.15)}$$

$$\times \quad \checkmark \quad \checkmark$$
$$V_{AB} = I_S\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}\right)$$

Al sustituir los valores dados en la figura 3.21, se tiene que:

$$V_{AB} = 0.1\text{A}\left(\frac{300\,\Omega \times 100\,\Omega}{100\,\Omega + 300\,\Omega}\right) = 7.5 \text{ volts}$$

Conocido el valor de V_{AB}, podemos sustituir en las expresiones 3.13 y 3.14 y encontrar los valores para I_1 e I_2 .

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} = \frac{7.5 \text{ volts}}{300\,\Omega} = 0.025 \text{ A} \qquad I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} = \frac{7.5 \text{ volts}}{100\,\Omega} = 0.075 \text{ A}$$

Estos valores muestran que se cumple la ley de Kirchhoff de corrientes; es decir, satisfacen la ecuación 3.12:

$$100 \text{ mA} = 25 \text{ mA} + 75 \text{ mA}$$

El resultado del análisis se comprueba calculando las potencias absorbidas en el sistema (tabla 3.6).

Tabla 3.6 Resultados para el circuito de la figura 3.21.

Elemento	Voltaje	Corriente	Potencia
Fuente	7.5 V	–0.1 A	–750 mW
R_1	7.5 V	0.025 A	187.5 mW
R_2	7.5 V	0.075 A	562.5 mW
Suma total de potencias en el sistema = 0 W			

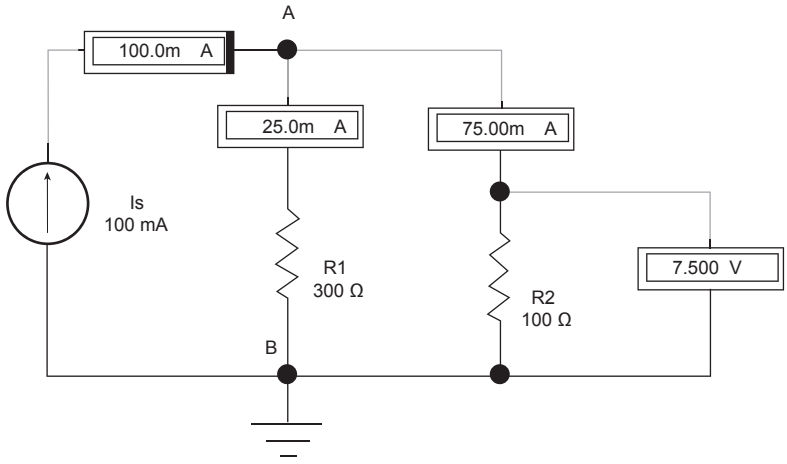


Figura 3.22 Simulación del circuito mostrado en la figura 3.21.

Otra forma de verificar los resultados es con la simulación del circuito. El resultado de este proceso se presenta en la figura 3.22.

En este caso la desviación que existe de los cálculos respecto del resultado que presenta el simulador es de 0% (100% de eficiencia) debido a que se tuvieron divisiones exactas y en ningún resultado parcial se omitieron cifras decimales. Se recomienda al estudiante que antes de realizar trabajo práctico en el laboratorio, realice cálculos teóricos, seguidos de la simulación correspondiente.

3.3.2 Análisis de circuitos resistivos con más de dos nodos

COMPETENCIA:
Analizar *circuitos alimentados por fuente de corriente en cd con más de dos nodos* aplicando *la ley de Kirchhoff de corrientes*. [2]

El procedimiento utilizado para el análisis de un circuito con un par de nodos también es aplicable a circuitos con más de dos nodos, y se resume de la siguiente manera:

1. Para aplicar el método de nodos es conveniente que las fuentes de alimentación sean de corriente. De no ser así habrá que aplicar otras técnicas de análisis como complemento al análisis de corrientes en los nodos.
2. Identifica los nodos: nodo *A*, nodo *B*,..., o nodo *1*, nodo *2*,... etcétera.
3. Del total de *N* nodos, identifica el punto de referencia (conocido como punto de tierra o común).
4. Establece la ecuación de corrientes para cada nodo, para ello aplica la ley de Kirchhoff de corrientes. El circuito tendrá un total de $(N-1)$ ecuaciones; donde N es el total de nodos. Se trata de un sistema de $(N-1)$ ecuaciones simultáneas, en las cuales las incógnitas serán las diferencias de potencial que existen respecto a la *tierra*, o bien, de un nodo a otro nodo de referencia.
5. Resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas para obtener el valor para cada diferencia de potencial.
6. Una vez que conoces el voltaje y la corriente en cada resistencia, calcula la potencia absorbida en cada elemento para verificar que la potencia total del sistema sea cero.

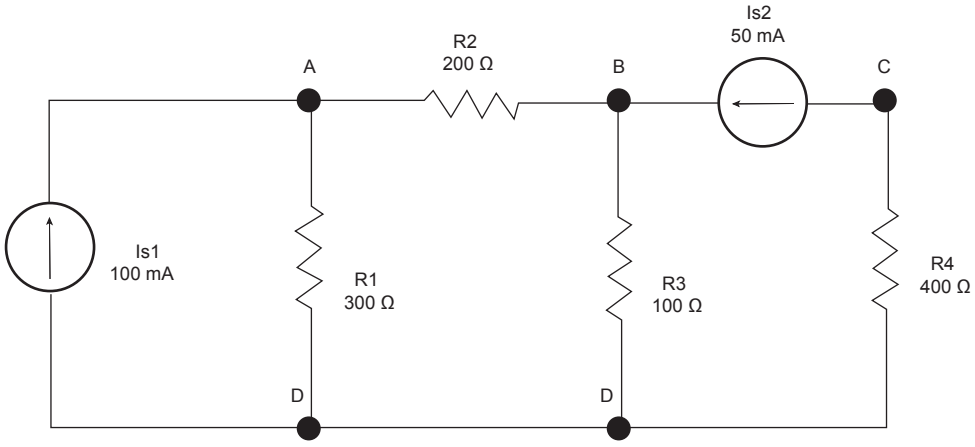


Figura 3.23 Circuito resistivo alimentado por dos fuentes de corriente de *cd* con 4 nodos, *A, B, C* y *D*. Este último se considera como el común o "tierra" o punto de referencia (ejemplo 3.6)

EJEMPLO 3.6

Con el método de nodos desarrolla un análisis para el circuito representado en la figura 3.23. Haz la comprobación mediante el cálculo de potencias absorbidas en el sistema y por el método de simulación del circuito.

Solución

Datos:

$$I_{S1} = 100 \text{ mA} \qquad I_{S2} = 50 \text{ mA}$$
$$R_1 = 300\ \Omega, \qquad R_2 = 200\ \Omega, \qquad R_3 = 100\ \Omega, \qquad R_4 = 400\ \Omega$$

Planteamiento:

Se trata de un circuito resistivo alimentado por dos fuentes de *cd*. Se distinguen 4 nodos. Se sugiere tomar como referencia el nodo *D*, para tener (4 – 1) = 3 ecuaciones de corrientes. En cada nodo se aplicará la ley de Kirchhoff de corrientes.

Método: *Análisis por nodos*

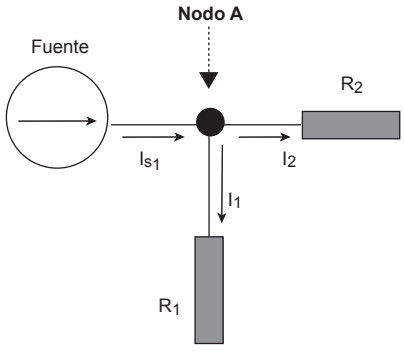


Figura 3.24 Representación esquemática del nodo A del circuito mostrado en la figura 3.23.

Desarrollo:

Nodo A:
En la figura 3.24 al aplicar la ley de Kirchhoff de corrientes se tiene:

$$I_1 + I_2 = 0.1 \text{ A} \qquad \leftarrow \text{(ecuación de nodo A)}$$

En la cual

$$I_1 = \frac{V_A}{300\ \Omega} \qquad I_1 = \frac{V_A - V_B}{200\ \Omega}$$

Al sustituir estas expresiones para I_1 e I_2 en la ecuación del nodo *A* se tiene:

$$\frac{V_A}{300} + \frac{V_A - V_B}{200} = 0.1$$

Al reducir y organizar términos se tiene la ecuación de nodo definitiva:

$$\not{5}V_A - \not{3}V_B = 60 \qquad \leftarrow \text{(ecuación de nodo A)}$$

Nodo B:
La ley de Kirchhoff de corrientes en el nodo *B* (figura 3.25), nos da:

$$I_2 + I_3 = 0.05 \text{ A} \qquad \leftarrow \text{(ecuación de nodo B)}$$

$$I_2 = \frac{V_B - V_A}{200\,\Omega} \qquad I_3 = \frac{V_B}{100\,\Omega}$$

Donde:
Al sustituir estas expresiones para I_2 e I_3 en la ecuación del nodo *B* se tiene:

$$\frac{V_B - V_A}{200} + \frac{V_B}{100} = 0.05$$

Al reducir y organizar términos se llega a la ecuación de nodo definitiva:

$$-V_A + 3\,V_B = 10 \qquad \leftarrow \text{(ecuación de nodo B)}$$

Nodo C:
En la figura 3.26, y según la ley de Kirchhoff de corrientes, I_4 es

$$I_4 = 0.05 \text{ A} \qquad \leftarrow \text{(ecuación de nodo C)}$$

Observa que en la ecuación de nodo *C*, se tiene directamente el valor para I_4, por lo cual no hay en ella ninguna incógnita; así que no hace falta realizar ninguna sustitución ni transformación. Esto significa que en el sistema de $(N - 1) = (3 - 1)$ ecuaciones que se deben tener, una de ellas ya está resuelta ($I_4 = 0.05$ A); así que finalmente se tiene un sistema de *dos ecuaciones simultáneas* con dos incógnitas que son V_A y V_B. También observa que en R_4 la corriente circula de abajo hacia arriba (según el diagrama), como lo indica la flecha de la corriente en la fuente 2, lo cual implica que en esta resistencia hay una diferencia de potencial V_4 de

$$V_4 = I_4\,R_4 = (0.5 \text{ A})\,(400\ \Omega) = 20 \text{ V}$$

cuyo positivo está en la terminal inferior y el negativo en la terminal superior de R_4 (Recuerda que el sentido convencional de la corriente

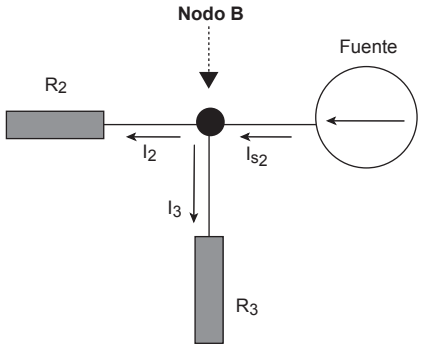


Figura 3.25 Representación esquemática del nodo *B* del circuito mostrado en la figura 3.23.

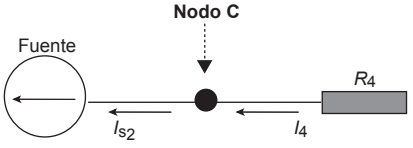


Figura 3.26 Representación esquemática del nodo *C* del circuito mostrado en la figura 3.23.

es de + a –). Esto nos dice que el potencial eléctrico en el nodo C es negativo (respecto del punto de referencia o tierra), o sea que

$$V_C = -20 \text{ V}$$

Al final el sistema de ecuaciones simultáneas queda reducido a:

$$\begin{aligned} 5V_A - 3\ V_B &= 60 \\ -V_A + 3\ V_B &= 10 \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones para el circuito del ejemplo 3.6

El resultado del sistema es $\rightarrow V_A = 17.4996$ V y $V_B = 9.16666$ V.

Estos valores corresponden al potencial en los nodos A y B respecto del nodo común (tierra). La diferencia de potencial de B en relación con A ($V_A - V_B = V_{AB}$) es

$$V_A - V_B = [17.4996 \text{ V} - 9.16666 \text{ V}]$$

$$\text{Esto es: } V_{AB} = 8.3333 \text{ V}$$

La diferencia de potencial entre las terminales de cada una de las fuentes de corriente es:

En la fuente I_{S1}: como está en paralelo con R_1, entonces

$$V_{IS1} = V_{R1} = 17.4996 \text{ V}$$

En la fuente I_{S2}: Es la diferencia de potencial $V_B - V_C$

$$V_{IS2} = V_B - V_C = [9.16666 \text{ V} - (-20 \text{ V})] = 29.16666 \text{ V}$$

Una vez conocidos los voltajes en los diferentes nodos, se procede a sustituir estos valores en las expresiones para I_1, I_2 e I_3 (que son expresiones para la ley de Ohm), y se tiene:

$$I_1 = 58.333 \text{ mA}, \quad I_2 = 41.666 \text{ mA}, \quad I_3 = 91.666 \text{ m}A, \quad I_4 = 50 \text{ mA}$$

La figura 3.27 muestra los voltajes y las corrientes de acuerdo con los resultados obtenidos mediante el análisis del circuito.

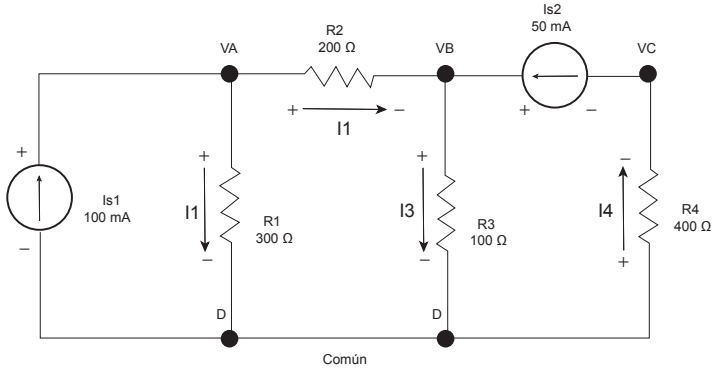


Figura 3.27 Diagrama que muestra corrientes y voltajes en cada elemento, como resultado del análisis por método de nodos del circuito mostrado en la figura 3.23.

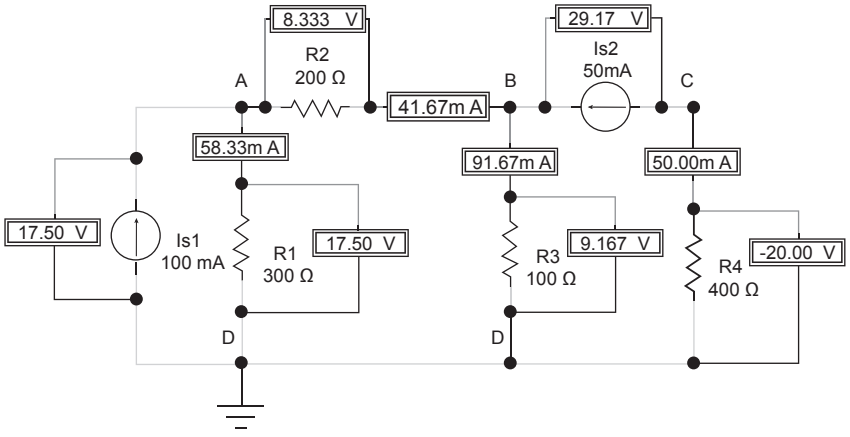


Figura 3.28 Simulación del circuito de la figura 3.23.

a) Comprobación por cálculo de potencias absorbidas:

El resultado mostrado en la figura 3.27 se resume en la tabla 3.7, incluso el cálculo de potencias absorbidas en el sistema:

Tabla 3.7 Cálculo de potencias absorbidas en el sistema.

Elemento	Voltaje	Corriente	Potencia
Fuente 1	17.4996 V	–0.100 A	–1.74999 W
Fuente 2	29.16666 V	–0.050 A	–1.4583 W
R_1	17.4996 V	0.058333 A	1.020804 W
R_2	8.3333 V	0.041666 A	0.347215W
R_3	9.16666 V	0.091666 A	0.840271 W
R_4	20 V	0.050 A	1.00000 W
✓ Suma de potencias en el sistema =			0 W

b) Comprobación por simulación:

La figura 3.28 corresponde a la imagen que entrega el simulador, para el ejemplo 3.6. Puedes ver que las lecturas que entregan los medidores virtuales del simulador corresponden a los valores calculados mediante el método de nodos para este circuito.

3.4 Divisor de voltaje

COMPETENCIAS:
- Comprender el concepto de *divisor de voltaje* desarrollado a partir de la ley de Ohm. [1]
- Aplicar el divisor de voltaje en el análisis de circuitos resistivos. [2]

Recibe el nombre de *divisor de voltaje* un arreglo de dos o más resistores acoplados *en serie*, que en conjunto reciben un voltaje total que es dividido proporcionalmente entre los resistores de acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltajes y a la ley de Ohm.

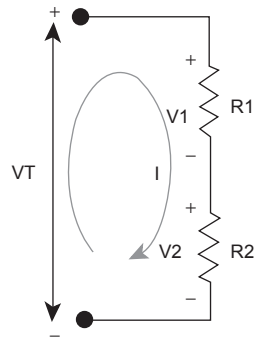


Figura 3.29 Divisor de voltaje básico.

La figura 3.29 muestra el diagrama de un divisor de voltaje básico con dos resistores, en el cual V_T es un voltaje al que se le puede llamar *voltaje total;* V_1 es el voltaje que existe en las terminales de R_1 y V_2 el voltaje en las terminales de R_2.

Según la ley de Ohm, la intensidad de corriente I que circula en esta malla es

$$I = \frac{V_T}{R_T} \qquad \text{(ecuación 3.16)}$$

Donde R_T es la resistencia total de la malla

$$R_T = R_1 + R_2 \qquad \text{(ecuación 3.17)}$$

$$I = \frac{V_T}{R_1 + R_2} \qquad \text{(ecuación 3.18)}$$

Al sustituir la ecuación 3.17 en la 3.16 se tiene:
Asimismo, por ley de Ohm, el voltaje en la resistencia R_1 es:

$$V_1 = I\,R_1 \qquad \text{(ecuación 3.19)}$$

Entonces, sustituyendo la expresión 3.18 en la 3.19 se tiene:

$$V_1 = \frac{V_T \cdot R_1}{R_1 + R_2} \qquad \text{(ecuación 3.20)}$$

Como $V_2 = I\,R_2$, de la misma manera se obtiene una expresión para V_2:

$$V_2 = \frac{V_T \cdot R_2}{R_1 + R_2} \qquad \text{(ecuación 3.21)}$$

Las expresiones 3.20 y 3.21 son las ecuaciones que modelan *al divisor de voltaje*, y permiten calcular de manera directa los valores de los voltajes individuales que se obtienen al dividir un voltaje mayor entre dos elementos resistivos, ahorrando al experimentador parte del desarrollo de un análisis. Cabe comentar que R_1 y R_2 pueden ser resistencias individuales, o también ser las resistencias equivalentes de algún arreglo resistivo; a su vez, el voltaje que existe en sus terminales puede que se esté dividiendo entre más resistencias; y así podremos encontrar un divisor de voltaje dentro de otro divisor de voltaje.

También se puede observar que en las ecuaciones 3.20 y 3.21 el denominador es la suma de las dos resistencias en serie que conforman al divisor de voltaje. Considerando que $R_1 + R_2 = R_T$ se pueden transformar en dichas expresiones:

$$V_1 = \frac{V_T \cdot R_1}{R_T} \qquad V_2 = \frac{V_T \cdot R_2}{R_T} \qquad \text{(ecuación 3.22)}$$

Observe que en ambas expresiones se tiene:

$$\frac{V_T}{R_T} = I_T$$

Así que se puede apreciar que el voltaje en la resistencia de interés se calcula, entonces, multiplicando el valor de dicha resistencia por el valor de la corriente total (ley de Ohm).

EJEMPLO 3.7

Aplica el método del divisor de voltaje y haz el análisis del circuito mostrado en la figura 3.12 del ejemplo 3.4.

Solución

Datos:

$V_S = 6$ volts $\quad R_2 = 500\ \Omega \quad R_4 = 800\ \Omega$
$R_1 = 200\ \Omega \quad R_3 = 50\ \Omega \quad R_5 = 100\ \Omega$
$R_6 = 300\ \Omega$

Planteamiento:

Se trata de un circuito resistivo de dos mallas, alimentado por una fuente independiente de voltaje. Se puede hacer reducción del circuito mediante secciones equivalentes hasta visualizar claramente un divisor de voltaje.

Método: *Divisor de voltaje*

Desarrollo:

1. Identifica la fuente y su polaridad. Al voltaje que entrega se la llamará V_T (figura 3.12).
2. Haz un ajuste en la presentación del circuito, sólo para visualizar cómo se divide el voltaje de la fuente en partes (figura 3.30).
3. En la figura 3.30 se ve que el voltaje de la fuente de 6 V_{cd} se divide en tres partes:

   a) Una primera porción en R_1.
   b) Una segunda porción se entrega al resistor R_3.
   c) Otra porción corresponde a la resistencia que hay entre los nodos *A* y *B*; la cual no es una sola resistencia, sino un conjunto de resistores determinado por R_2 conectado en paralelo con un arreglo en serie formado por R_4, R_5 y R_6. Se puede obtener el equivalente R_{AB} de estos cuatro resistores, de la siguiente manera:

$$R_{AB} = R_2 \,||\, (R_4 + R_5 + R_6)$$
$$R_{AB} = 500\ \Omega \,||\, (800\ \Omega + 100\ \Omega + 300\ \Omega)$$
$$R_{AB} = 352.94\ \Omega$$

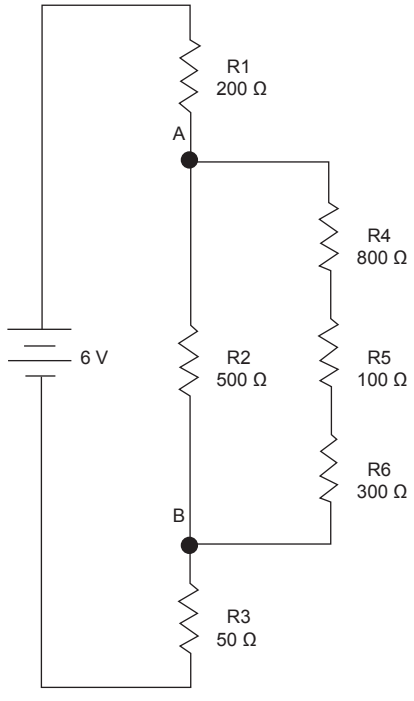


Figura 3.30 Diagrama equivalente al circuito mostrado en la figura 3.12. Se ha redibujado para apreciar cómo el voltaje se va dividiendo en etapas (ejemplo 3.7).

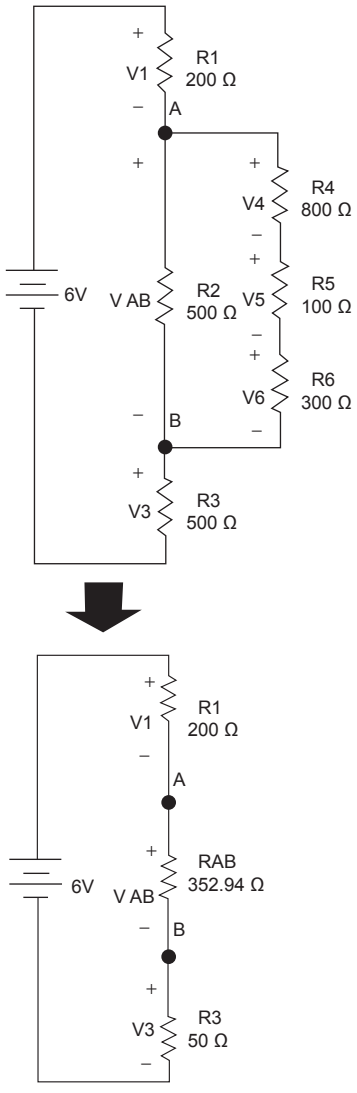


Figura 3.31 Reducción de un circuito resistivo para tener finalmente un divisor de voltaje, formado por tres resistores, R_1, R_{AB} y R_3.

En resumen, el voltaje total ($V_T = 6$ V) se divide entre tres resistores, en R_1, R_3 y $R_{AB,}$ como se muestra en la figura 3.31.

4. El valor de la resistencia total R_T, del divisor de voltaje es:

$$R_T = [R_1 + R_{AB} + R_3] = [200\ \Omega + 352.94\ \Omega + 50\ \Omega]$$
$$R_T = 602.94\ \Omega$$

5. Aplica las ecuaciones 3.22 para tener que:

$$V_1 = \frac{V_T \cdot R_1}{R_T} = \frac{(6V) \cdot (200\,\Omega)}{602.94\,\Omega} = 1.9902\ \text{V}$$

$$V_3 = \frac{V_T \cdot R_3}{R_T} = \frac{(6\text{V}) \cdot (50\,\Omega)}{602.94\,\Omega} = 0.4975\ \text{V}$$

$$V_{AB} = \frac{V_T \cdot R_{AB}}{R_T} = \frac{(6\text{V}) \cdot (352.94\,\Omega)}{602.94\,\Omega} = 3.5121\ \text{V}$$

De los resultados parciales obtenidos hasta aquí, observa que los voltajes en $R_1 + R_{AB} + R_3$ cumplen con la ley de Kirchhoff de voltajes.

6. De la figura 3.30 se nota que el voltaje V_{AB} (3.5121 V) a su vez se divide entre tres resistores en serie, R_4, R_5 y R_6 (un nuevo divisor de voltaje) cuyo equivalente podemos llamar R_{456} y su valor es:

$$R_{456} = [R_4 + R_5 + R_6]$$
$$R_{456} = [800\ \Omega + 100\ \Omega + 300\ \Omega]$$
$$R_{456} = 1200\ \Omega$$

7. Aplica nuevamente las ecuaciones del divisor de voltaje para $V_{AB} = 3.5121\ V$, *y*:

$$V_4 = \frac{V_{AB} \cdot R_4}{R_{456}} = \frac{(3.5121\text{V}) \cdot (800\,\Omega)}{1200\,\Omega} = 2.3414\ \text{V}$$

$$V_5 = \frac{V_{AB} \cdot R_5}{R_{456}} = \frac{(3.5121\text{V}) \cdot (100\,\Omega)}{1200\,\Omega} = 0.2926\ \text{V}$$

$$V_6 = \frac{V_{AB} \cdot R_6}{R_{456}} = \frac{(3.5121\text{V}) \cdot (300\,\Omega)}{1200\,\Omega} = 0.8780\ \text{V}$$

8. Al aplicar la ley de Ohm calculas el valor de la corriente para cada uno de los resistores, por ejemplo, la intensidad de corriente a través de R_4 será.

$$I_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{2.3414\text{V}}{100\,\Omega} = 0.023414\ \text{A}$$

Puesto que R_4, R_5 y R_6 están conectados en serie, la intensidad de corriente en cada uno es la misma. Se deja al lector el cálculo de la intensidad de corriente en los demás resistores:

La tabla 3.8 presenta una concentración de los resultados obtenidos para cada uno de los elementos del circuito, incluso el cálculo de las potencias absorbidas.

Tabla 3.8 Resultados para el circuito del ejemplo 6.7.

Elemento	Voltaje	Corriente	Potencia
Fuente	6 V	–0.009951 A	–59.706 mW
R_1	1.9902 V	0.009951 A	19.804 mW
R_2	3.5121 V	0.007024 A	24.668 mW
R_3	0.4975 V	0.009951 A	4.9506 mW
R_4	2.3414 V	0.002926 A	6.850 mW
R_5	0.2926 V	0.002926 A	0.856 mW
R_6	0.8780 V	0.002926 A	2.569 mW
	Suma total de potencias =		–0.008 mW ✓

La suma total de potencias absorbidas en el circuito de la figura 3.12 no es exactamente cero, sino que existe una desviación de 0.008 mW, que equivale a un error en el cálculo de 0.013%, respecto del principio de la conservación de la energía en el sistema cerrado. Es un error no significativo en la práctica, y puede despreciarse. El análisis por el método de divisor de voltaje tiene una confiabilidad de 99.987%.

Las tablas 3.4 y 3.8 son resultados para el mismo circuito de la figura 3.12, obtenidos por dos procedimientos distintos: el *método de mallas* y el de *divisores de voltaje*. Puede hacerse un estudio comparativo para determinar el porcentaje de la desviación del método de mallas en relación con el método de divisor de voltaje; o bien, la desviación del método de divisor de voltaje respecto al de mallas (recordemos que el marco de comparación es determinado por el experimentador). Pero para tener información más significativa de los dos métodos, puede hacerse un estudio comparativo de ambos respecto de un tercer método, que sea un referente en común. Para esto pueden tomarse como referencia los resultados que arroja el simulador de circuitos, por ejemplo.

Si elegimos como valores de referencia los del simulador del circuito (figura 3.14), se tienen, para la intensidad de corriente, los resultados que muestra la tabla 3.9.

Tabla 3.9 Resultados obtenidos por dos métodos para la intensidad de corriente en cada elemento, comparando con la simulación del circuito de la figura 3.12.

	Método			Error respecto del método de simulación	
Elemento	**Por mallas**	**Divisor de voltaje**	**Simulador**	**Por mallas**	**Divisor de voltaje**
Fuente	–9.94 mA	–9.951 mA	–9.95 mA	0.1 %	0.01 %
R_1	9.94 mA	9.951 mA	9.95 mA	0.1 %	0.01 %
R_2	7.02 mA	7.024 mA	7.025 mA	0.07 %	0.01 %
R_3	9.94 mA	9.951 mA	9.95 mA	0.1 %	0.01 %
R_4	2.92 mA	2.926 mA	2.927 mA	0.23 %	0.03 %
R_5	2.92 mA	2.926 mA	2.927 mA	0.23 %	0.03 %
R_6	2.92 mA	2.926 mA	2.927 mA	0.23 %	0.03 %
Error promedio →				0.15 % ✓	0.02 % ✓

A primera vista podría decirse que un método es más eficiente que el otro; sin embargo, tendríamos que analizar y reflexionar detenidamente antes de emitir cualquier opinión. Ambos métodos empleados y que ahora se están comparando, utilizan cálculos teóricos basados en leyes que son de cumplimiento universal; tendríamos que establecer un parámetro referencial para el número de cifras decimales a considerar (entre mayor número de cifras consideradas, el error será menor) y, por otra parte, recordar que el método elegido como referente, o sea el simulador, representa precisamente una simulación de la realidad.

Si elegimos como valor de referencia el que arrojara algún medidor en el laboratorio, para cada caso, debemos pensar en que también un instrumento no cuenta con una exactitud de 100%. Entonces, podemos concluir que, no obstante que en la experimentación existe un error o desviación, ocasionado por diversas causas, será necesario siempre elegir un valor de referencia, respecto del cual compararemos a aquel procedimiento o método del cual queremos emitir un juicio de valor; ya

sea el trabajo realizado por el experimentador en el cálculo, en simulación o en el laboratorio.

Es conveniente, además de las desviaciones (%) en cada resultado, obtener un promedio del total de desviaciones parciales. Esto permite al experimentador determinar el nivel promedio de confiabilidad del trabajo experimental realizado.

En este libro se considera que un error máximo del 3%, es un nivel de tolerancia razonable y aceptable para el trabajo en el laboratorio escolar. Desde luego, que queda a criterio de cada profesor o estudiante establecer sus propios parámetros de calidad para su trabajo de análisis teórico, de simulación y de experimentación en el laboratorio.

3.5 Divisor de corriente

Si existe la división de un voltaje total entre varios resistores conectados en serie, existe también el *dual* para la corriente; es decir, el divisor de corriente. Este consiste en *suministrar una corriente total a varios resistores en paralelo*.

COMPETENCIAS:

- Comprender el concepto de *divisor de corriente* desarrollado a partir de la ley de Ohm. [1]
- Aplicar el divisor de corriente en el análisis de circuitos resistivos. [2]

Modelo para el divisor de corriente con dos resistores

Por ejemplo, si se tienen dos resistores R_1 y R_2 en paralelo, como ilustra la figura 3.32, y este arreglo recibe una corriente total I_T, dicha corriente se dividirá en dos partes, en proporción al valor de cada resistencia, según la ley de Ohm, de manera equivalente a la que el voltaje se divide entre los resistores conectados en serie.

Se observa que el voltaje en las terminales de ambos resistores es el mismo (V_{AB}), por estar conectadas en paralelo. Así entonces, la intensidad de corriente a través de cada resistor será:

$$I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} \qquad \text{(ecuación 3.23)}$$

A su vez, según la ley de Ohm, el voltaje $\mathbf{V}_{AB} = I_T R_T$. Donde R_T es un arreglo de R_1 y R_2 conectadas en paralelo, dado por la expresión:

$$R_T = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \qquad \text{(ecuación 3.24)}$$

Por lo que se puede expresar el voltaje V_{AB} como sigue:

$$V_{AB} = I_T \left[\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right] \qquad \text{(ecuación 3.25)}$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación 3.25 en las ecuaciones 3.23 (se deja al lector el manejo algebraico de este paso), se obtienen las expresiones para las corrientes I_1 e I_2 a través de los resistores R_1 y R_2, respectivamente:

$$I_1 = \frac{I_T \cdot R_2}{R_1 + R_2} \qquad I_2 = \frac{I_T \cdot R_1}{R_1 + R_2} \qquad \text{(ecuación 3.26)}$$

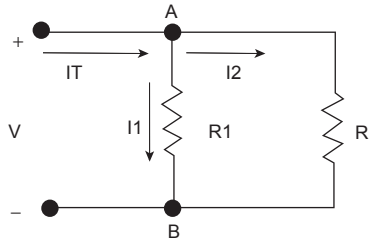


Figura 3.32 Divisor de corriente formado por dos conductancias en paralelo.

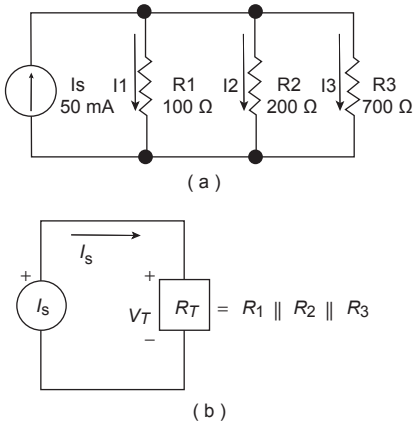


Figura 3.33 Divisor de corriente con 3 resistores en paralelo.
a) Circuito original. *b*) Circuito reducido.

Generalización del modelo del divisor de corriente

Las ecuaciones 3.26 son las expresiones para el caso particular de un divisor de corriente de dos resistencias; sin embargo, en algunos casos el divisor se presenta en arreglos con N resistores en paralelo ($N > 2$). La expresión para calcular la intensidad de corriente a través de cada una de las N resistencias se puede obtener a partir de la ecuación 3.23, de la siguiente manera.

Considera el arreglo mostrado en la figura 3.33*a*, en el que la corriente proporcionada por la fuente $I_S = 50$ mA se divide entre 3 resistores, a saber: R_1, R_2 y R_3, los cuales están conectados en paralelo. Se puede obtener una resistencia equivalente del paralelo de estas tres, llamémosle R_T (figura 3.33*b*). Esta condición hace que en los tres resistores se tenga el mismo voltaje, al cual le podemos llamar *voltaje total* V_T, y de acuerdo con la ley de Ohm, es

$$V_T = I_S R_T \qquad \text{(ecuación 3.27)}$$

Donde I_S: corriente que proporciona la fuente (50 mA).

R_T: Resistencia total del arreglo en paralelo, que se calcula de la siguiente manera:

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} \qquad \text{(ecuación 3.28)}$$

Al sustituir la ecuación 3.28 en la 3.27, se obtiene que:

$$V_T = \frac{I_S}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} \qquad \text{(ecuación 3.29)}$$

Ahora, para determinar la intensidad de corriente en alguna de las resistencias del divisor, basta con aplicar nuevamente la ley de Ohm, dividiendo esta expresión para el voltaje entre el valor de la resistencia en cuestión, para obtener la siguiente expresión:

$$I_n = \frac{I_S}{R_n\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right]} \qquad \text{(ecuación 3.30)}$$

La ecuación 3.30 es la expresión para el divisor de corriente con tres resistores en paralelo, que permite calcular el valor de la corriente a través del $n_{ésima}$ resistor ($n = 1, 2$ o 3). Sin embargo, esta expresión puede generalizarse para cualquier arreglo con N resistores en paralelo, de la siguiente manera:

$$I_n = \frac{I_S}{R_n\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots+\frac{1}{R_N}\right]} \qquad \text{(ecuación 3.31)}$$

Donde $n = 1, 2, 3 \ldots N \ldots$

Las ecuaciones 3.26 son un caso particular de un divisor de corriente (ecuación 3.31) para un arreglo de 2 resistores.

EJEMPLO 3.8

Desarrolla el análisis del circuito mostrado en la figura 3.33*a*, utilizando el método del divisor de corriente. Comprueba por cálculo de potencias y por simulación.

Solución

Datos:

$I_S = 50$ mA
$R_1 = 100\ \Omega$
$R_2 = 200\ \Omega$
$R_3 = 700\ \Omega$

Planteamiento:

Puesto que se trata de un arreglo de tres resistores en paralelo alimentadas por una fuente de corriente. Se puede calcular la intensidad de corriente en cada uno de ellos aplicando la ecuación 3.30.

Método: *Divisor de corriente*

Desarrollo:

A partir de la ecuación 3.30 se sustituyen los valores conocidos.

$$I_1 = \frac{0.05\ \text{A}}{100\,\Omega\left[\frac{1}{100\,\Omega} + \frac{1}{200\,\Omega} + \frac{1}{700\,\Omega}\right]} = 30.434\ \text{mA}$$

$$I_2 = \frac{0.05\ \text{A}}{200\,\Omega\left[\frac{1}{100\,\Omega} + \frac{1}{200\,\Omega} + \frac{1}{700\,\Omega}\right]} = 15.217\ \text{mA}$$

$$I_3 = \frac{0.05\ \text{A}}{700\,\Omega\left[\frac{1}{100\,\Omega} + \frac{1}{200\,\Omega} + \frac{1}{700\,\Omega}\right]} = 4.347\ \text{mA}$$

Los valores obtenidos para las corrientes cumplen con la ley de Kirchhoff de corrientes para el nodo *A* del circuito analizado. Ya se ha comentado que la pequeña desviación que pueda existir, porque la suma de corriente no sea exactamente cero, se deberá a que no se están considerando todas las cifras decimales en los resultados parciales.

El voltaje en cualquiera de los resistores se obtiene aplicando la ecuación para la ley de Ohm. Este valor será el mismo para los cuatro elementos conectados en paralelo. Para R_1 se tiene:

$$V_1 = I_1 R_1 = (0.030434 \text{ A})\ (100\ \Omega) = 3.0434 \text{ V}$$
$$V_1 = V_2 = V_3 = V_{Is} = 3.0434 \text{ V}$$

a) Comprobación por medio de cálculo de potencias:

La tabla 3.10 es un resumen del análisis de este circuito, incluye las potencias absorbidas por cada elemento.

Tabla 3.10 Resultados para el circuito de la figura 3.33.

Elemento	Voltaje	Corriente	Potencia
Fuente	3.0434 V	–50 mA	–152.17 mW
R_1	3.0434 V	30.434 mA	92.622 mW
R_2	3.0434 V	15.217 mA	46.311 mW
R_3	3.0434 V	4.347 mA	13.229 mW
Suma total de potencias absorbidas = –0.008 mW ✓			

b) Comprobación por simulación:

La figura 3.34 es el resultado del simulador para el circuito del ejemplo 3.8. Queda a criterio del lector determinar el error promedio que presenta el análisis por el método de divisor de corriente respecto del resultado que presenta el simulador.

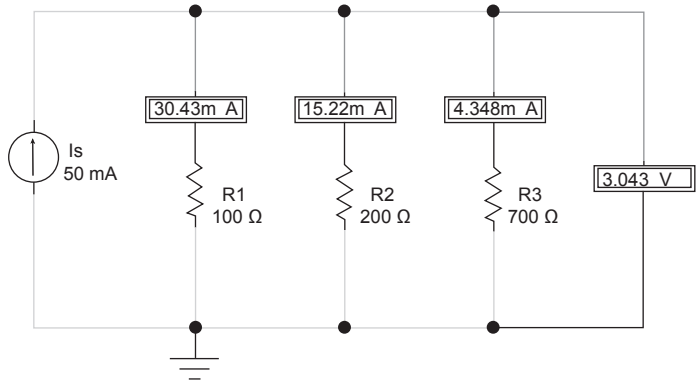


Figura 3.34 Simulación del circuito del ejemplo 3.8.

Una vez más cabe comentar acerca de los diferentes métodos de análisis que se han utilizado hasta este punto. Cada uno de estos métodos representa una *herramienta* útil para el análisis de circuitos; decidir cuál es mejor o cuál es más efectivo, o cuál usar en cierto circuito, estará en función de las circunstancias que acompañen a cada caso en particular, y de la capacidad y habilidad del analista. Habrá casos que se puedan analizar por más de un método, o por todos los aquí vistos; habrá casos cuya solución estará restringida a un solo método; o también habrá aquéllos en los que no bastará uno de estos métodos, sino que será necesario emplear una combinación de varios de ellos.

3.6 Equivalencia entre fuentes de alimentación

Los temas anteriores han tratado sobre circuitos resistivos alimentados por fuentes independientes *ideales*, tanto de voltaje como de corriente; es decir, se han considerado como fuentes que proporcionan voltaje o corriente de valor constante, independientes de la carga que estén alimentando. En la realidad no sucede así; todo elemento que se conecte a una fuente de alimentación demandará de ésta cierta cantidad de energía, lo que ocasionará que el rendimiento de la fuente esté variando; su eficiencia no será exactamente de 100%, como sucede con todo sistema físico real. Por ejemplo, un automóvil no tendrá la misma capacidad de desplazamiento cuando su carga sea únicamente la persona del piloto, que cuando el vehículo lleve a bordo 6 personas y el portaequipaje cargado de maletas. Su velocidad se verá afectada también por el tipo de carretera sobre la que se desplaza, ya sea horizontal o una cuesta arriba; y desde luego, influye también la calidad del vehículo y del combustible utilizado. Hay varios factores que determinan el rendimiento del vehículo. Algo parecido sucede con las fuentes de alimentación.

En contraste con lo que hemos llamado fuentes *ideales*, existen las fuentes *prácticas* o *reales*, de voltaje o de corriente. Las fuentes reales siempre presentan una cierta oposición al paso de la corriente; tienen una resistencia interna. De ahí que, antes de tratar el tema de equivalencia entre fuentes de alimentación, debemos estar de acuerdo en lo que se entenderá por fuentes reales de alimentación.

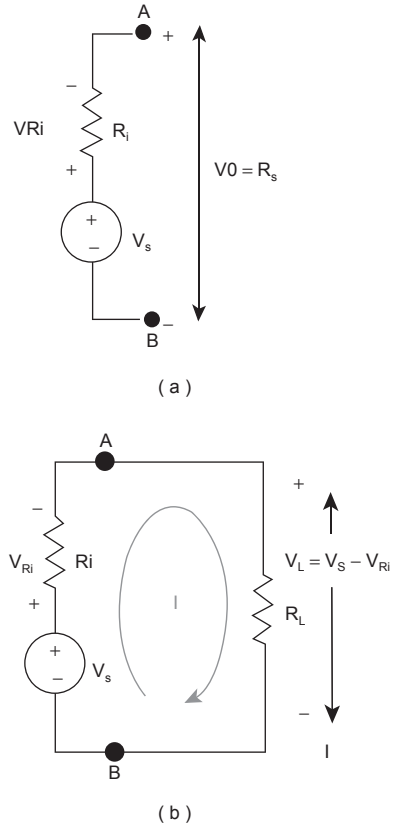


Figura 3.35
a) Fuente ideal con una resistencia en serie R_i, sin carga.
b) Fuente ideal con carga R_L.

3.6.1 Fuente real de voltaje

Una *fuente real de voltaje* se define como *una fuente de voltaje ideal conectada a una resistencia en serie*. Simbólicamente se representa con dos elementos, como se muestra en la figura 3.35, una *fuente ideal* con una resistencia en serie R_i, que equivale al valor de la resistencia interna de la fuente. En la figura 3.35*a*, se tiene una fuente real de voltaje *sin carga*; o sea a *circuito abierto*, sin alimentar a carga alguna. El voltaje que entrega a la salida entre sus terminales *A* y *B*, identificado como V_O, en este caso es exactamente el mismo voltaje V_S. Aunque la resistencia interna está presente debido a sus componentes, ésta no se manifiesta

COMPETENCIAS:
- Comprender el concepto de equivalencia entre fuentes de alimentación. [1]
- Transformar fuentes de voltaje reales en fuentes de corriente reales equivalentes y viceversa, como *técnica en el análisis de circuitos en cd*. [2]

mientras no haya una corriente circulando; por tanto, no hay caída de voltaje internamente.

En la figura 3.35*b*, la fuente real se ha conectado a una carga representada por R_L; se ha cerrado el circuito, por tanto ahora existe una intensidad de corriente I en la malla. Esta corriente da por resultado una caída de voltaje en la resistencia interna, que está dada por la ley de Ohm como $V_{Ri} = IR_i$, cuya magnitud dependerá de los valores de I y de R_i, desde luego. Por tanto, el voltaje de salida V_O que la fuente real entrega a la carga, se ve disminuido, según la *LKV*, de la siguiente manera:

$$V_O = V_S - V_{Ri} \qquad \text{(ecuación 3.32)}$$

EJEMPLO 3.9

Una fuente independiente real cuyo voltaje nominal es de 10 V, tiene una resistencia interna de 0.2 Ω. Determina su voltaje de salida V_O:

a) circuito abierto, *b*) cuando se conecta a un circuito de carga cuya resistencia equivalente es de 2 kΩ, *c*) su eficiencia cuando alimenta a la carga de 2 kΩ. Comprueba por medio de una simulación.

Solución

Datos:

$V_S = 10$ V
$R_i = 0.2\ \Omega$
$R_L = 2\ \text{k}\Omega$
$V_O = ?$

Planteamiento:

Es una fuente real de voltaje conectada a una resistencia de carga, formando una malla, como se aprecia en la figura 3.36. Por tanto, puede resolverse por medio del método de mallas.

Método: *Mallas*

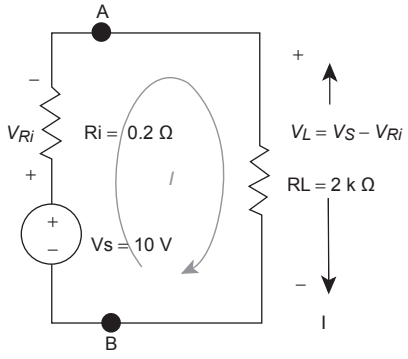


Figura 3.36 Representación de una fuente real de voltaje con resistencia interna de $R_i = 0.2\ \Omega$ con una carga $R_L = 2\ \text{k}\Omega$. Ejemplo 3.9.

Desarrollo:

a) A circuito abierto el voltaje que entrega la fuente será

$$V_O = V_S = 10\ \text{V}$$

b) Al conectar la fuente a una carga R_L:
La ecuación de voltajes, de acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltajes, es:

$$-V_S + IR_i + IR_L = 0$$

Al factorizar e identificar variables:

✓ ✗ ✓ ✓

$$-V_S + I(R_i + R_L) = 0$$

Al despejar la incógnita y sustituir valores se tiene:

$$I = \frac{V_S}{R_i + R_L} = \frac{10\text{V}}{0.2\,\Omega + 2000\,\Omega} = 4.999\,\text{mA}$$

De acuerdo con la ley de Ohm, el voltaje V_O de salida, en la resistencia de carga será:

$$V_O = I\,R_L = (0\ .004999\ \text{A})\ (2000\ \Omega) = 9.998\ \text{V}$$

c) Eficiencia de la fuente:
La eficiencia será:

$$\text{Eficiencia}\ (\%) = 100\% - \text{error}\ (\%)$$

Donde el error es:

$$\text{error}(\%) = \left|\frac{\text{valor nominal} - \text{valor real}}{\text{valor nominal}}\right| \times 100$$

$$\text{error}(\%) = \left|\frac{10\text{V} - 9.998\text{V}}{10\,\text{V}}\right| \times 100 = 0.02\,\%$$

Por tanto, la eficiencia de la fuente para esta carga es de

$$\text{Eficiencia}\ (\%) = 100\ \% - 0.02\ \%. = 99.98\ \%$$

a) Comprobación por medio de una simulación del circuito:
La figura 3.37 es la simulación del circuito del ejemplo 3.9. El simulador registra una intensidad de corriente igual a la que se calculó en el desarrollo del ejemplo (0% de error); y también registra una caída de voltaje en la resistencia de carga de 10 V exactamente, que es el mismo voltaje nominal de la fuente (V_S); sin embargo, también registra una caída de voltaje de 1 mV en la resistencia interna de la fuente. Para el simulador la caída de voltaje en la resistencia interna es tan pequeña que no representa algún efecto hacia el voltaje de salida V_O.

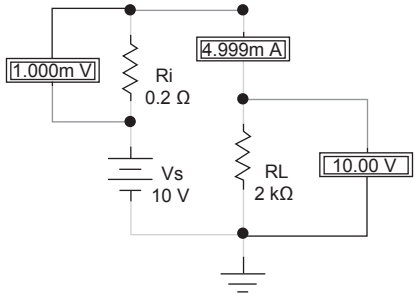


Figura 3.37 Simulación del circuito del ejemplo 3.9.

3.6.2 Fuente real de corriente

Una *fuente real de corriente* se define como *una fuente ideal de corriente conectada en paralelo con una resistencia interna* R_i. Simbólicamente se representa con dos elementos, como se muestra en la figura 3.38, una *fuente ideal* con un resistor en paralelo R_i, que equivale al valor de la resistencia interna de la fuente. En esta figura la fuente real está conectada a una carga, representada por R_L.

Si se tiene una fuente de corriente sin carga, es como tener dicha fuente con sus terminales en *circuito abierto*, lo que equivale a una resistencia infinita. Según la ley de Ohm, en estas condiciones, la intensidad de corriente que entrega la fuente será cero. Mientras no haya una corriente circulando, de igual manera que en la fuente real de voltaje, aunque la resistencia interna está presente debido a sus componentes, ésta no se manifiesta; por tanto no hay caída de voltaje internamente.

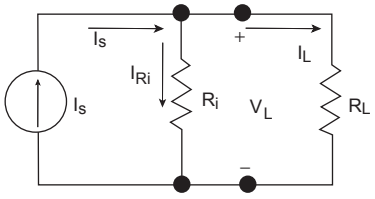


Figura 3.38 Representación de una fuente real de corriente con resistencia interna de R_i y conectada a una carga R_L

De regreso a la figura 3.38, la fuente real se ha conectado a una carga representada por R_L; se ha cerrado el circuito, por tanto ahora existe una intensidad de corriente I en el sistema. Aunada a esta corriente, habrá una caída de voltaje en la resistencia de carga, que está dada por la ley de Ohm como $V_{RL} = IR_L$, cuya magnitud dependerá de los valores de I y de R_L. La corriente que entrega la fuente encuentra un divisor compuesto por R_i y R_L por lo que la corriente real que llega a la carga se ve disminuida, según la ley de Kirchhoff de corrientes, de la siguiente manera:

$$I_L = I_S - I_{Ri} \qquad \text{(ecuación 3.27)}$$

3.6.3 Fuentes equivalentes

Ahora que han sido definidas las fuentes reales, de voltaje y de corriente, podremos estudiar el concepto de *equivalencia* entre fuentes. Se dice que dos fuentes *son equivalentes entre sí, cuando los efectos que ejercen en una carga R_L externa, son los mismos.* Veamos el significado de esto: si suponemos a cada una de las fuentes reales como un sistema dentro de una "caja negra", como muestra la figura 3.39, la intensidad de corriente y el voltaje que entregan a la salida a una carga externa son exactamente los mismos en ambos casos.

Si el efecto buscado sobre una carga es igual, esto nos dice que en el análisis de circuitos una fuente de corriente puede ser reemplazada por su fuente de voltaje equivalente y viceversa. Basta para ello considerar las definiciones que se han dado para las fuentes reales y seguir la ley de Ohm.

Para transformar una fuente real de corriente cuya resistencia interna es R_i, en una fuente real de voltaje, se sustituye dicha fuente de corriente por una fuente de voltaje conectada en serie con una resistencia del mismo valor que R_i. La magnitud de la fuente de voltaje será dada por la

$$\text{ley de Ohm: } V_S = I_S R_i$$

Para transformar una fuente real de voltaje cuya resistencia interna es R_i, se sustituye la fuente de voltaje por una fuente de corriente conectada en paralelo con una resistencia del mismo valor que R_i. La magnitud de la fuente de corriente será dada por la ley de Ohm: $I_S = Vs/Ri$.



Figura 3.39 Representación de equivalencia entre fuentes por medio de la técnica de la *caja negra*. Una fuente real de voltaje es equivalente a una fuente real de corriente cuando ambas proporcionan la misma corriente y el mismo voltaje al alimentar a una carga R_L.

EJEMPLO 3.10

Para la fuente de corriente presentada en la figura 3.40 encuentra su equivalente en fuente de voltaje. Comprueba el resultado por simulación y aplica a ambas fuentes una resistencia de carga de 100 Ω.

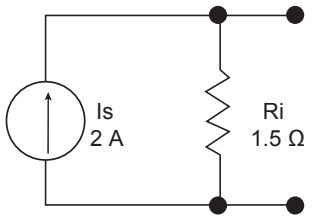


Figura 3.40 Representación de una fuente real de corriente. Ejemplo 3.10.

Solución

Datos:

$I_S = 2$ A
$R_i = 1.5\ \Omega$
V_S equivalente =?

Planteamiento:

La transformación de fuente de corriente a fuente de voltaje se realiza ajustándose a la ley de Ohm.

Método: *Transformación de fuentes*

Desarrollo:

La transformación deseada es la que se presenta en la figura 3.41*a*. Donde el valor de *Vs* es:

$$Vs = Is\ Ri = (2\ A)(1.5\ \Omega)$$
$$Vs = 3\ \text{V}$$

La transformación quedará como en la figura 3.41*b*.

Comprobación:

Al conectar la fuente transformada a una carga de 100 Ω, se tiene el diagrama que muestra la figura 3.42.

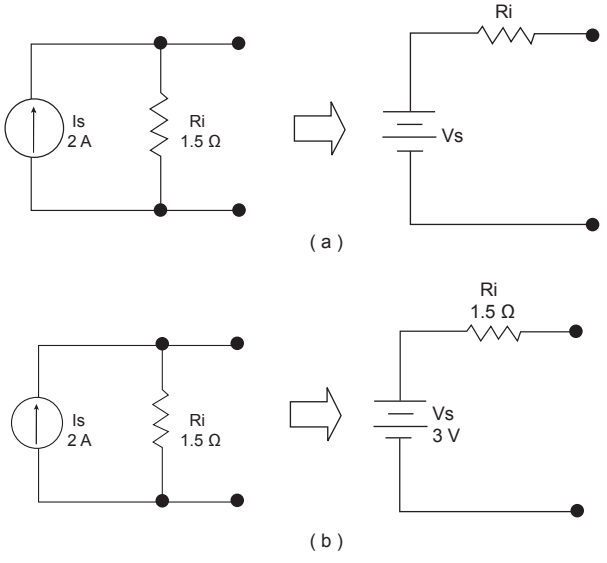


Figura 3.41 Transformación de la fuente de corriente del ejemplo 3.10 en una fuente de voltaje equivalente. *a*) Esquema de transformación. *b*) Cálculo de valores de los elementos.

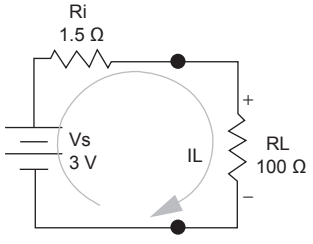


Figura 3.42 Fuente de voltaje equivalente a la fuente de corriente del ejemplo 3.10, conectada a una carga de 100 Ω.

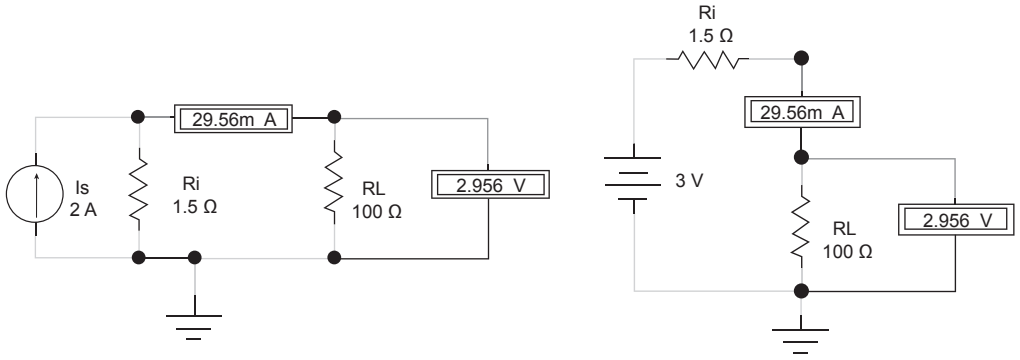


Figura 3.43 Equivalencia entre fuentes. Simulación de los circuitos del ejemplo 3.10.

Si se construye este circuito en el simulador se tiene el resultado que presenta la figura 3.43.

3.6.4 Principio de superposición

En algunos de los ejemplos mostrados hasta ahora se han tratado circuitos con más de una fuente de alimentación. Es una situación muy común en la práctica; hay circuitos con más de una fuente de voltaje, o con más de una fuente de corriente, o bien una combinación de ambos tipos de fuentes. Ahora resulta interesante saber cómo se analizarán estos circuitos con más de una fuente. Para ello existen diferentes métodos, veremos el *principio de superposición* que rige a cualquier *circuito lineal.* Este principio, en combinación con las leyes y métodos vistos, proporciona una opción más para un análisis en los circuitos que contienen más de una fuente de alimentación.

COMPETENCIAS:
- Comprender el *principio de superposición en circuitos lineales*. [1]
- Aplicar el principio de superposición en el *análisis de circuitos resistivos alimentados por dos o más fuentes*. [2]

Veamos lo que se entiende por un *circuito lineal*. Primero, se define como *elemento lineal* a un elemento pasivo que tiene *una relación lineal voltaje-corriente*. Esta relación significa que si la corriente que fluye a través de un elemento se multiplica por una constante k, el voltaje que existe en las terminales de ese elemento quedará a su vez multiplicado por la misma constante k. Hasta ahora se ha visto sólo un elemento pasivo, el resistor, cuya relación *voltaje-corriente*, de acuerdo con la ley de Ohm, es lineal. En capítulos posteriores se estudiarán los elementos capacitor e inductor, que también son lineales. Entre los elementos activos las fuentes independientes, de voltaje y de corriente tienen también un comportamiento lineal.[5]

Por lo anterior se puede definir a *un circuito lineal como aquel que se compone por elementos lineales*.

El resultado más importante de la linealidad es el principio de la superposición, que se puede enunciar de la siguiente forma:

> El voltaje (o corriente) en cualquier elemento de una red resistiva lineal que contenga N fuentes independientes, es igual a la suma de los voltajes (o corrientes) debidos a cada una de las fuentes, actuando por separado.

[5] En este capítulo no se tratan las fuentes dependientes. Sin embargo éstas también pueden ser lineales cuando su salida es proporcional solo a la primera potencia de alguna corriente o voltaje en el circuito.

En un circuito con *N* fuentes, se dice que una fuente independiente (de corriente o de voltaje) actúa por separado cuando el resto de las fuentes del circuito se toman como inactivas o muertas. Para considerar temporalmente inactiva una fuente independiente de voltaje, se sustituye por un cortocircuito, en tanto que una fuente independiente de corriente se considera inactiva, sustituyéndola por un circuito abierto.

EJEMPLO 3.11

Calcula la intensidad de corriente que circula por el resistior R_2 en el circuito de la figura 3.44. Comprueba por simulación.

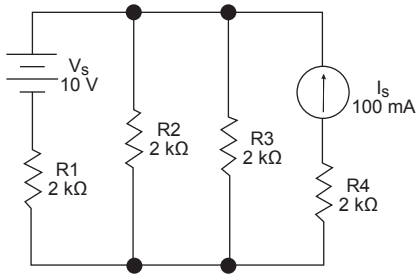


Figura 3.44 Circuito lineal alimentado por dos fuentes independientes. Ejemplo 3.11.

Solución

Datos:

$Vs = 10$ V
$Is = 100$ mA
$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2\ \text{k}\Omega$
$I_2 = ?$

Planteamiento:

Como se trata de un circuito lineal se puede aplicar el principio de superposición.

Método: *Superposición*

Desarrollo:

Primero considera el efecto individual de la fuente de voltaje V_s:

Para esto, la fuente de corriente I_s se sustituye por un circuito abierto, como muestra el diagrama de la figura 3.45*a*. En estas condiciones se observa que en R_4 no habrá corriente. Una manera de encontrar la I_2 es reducir los resistores R_1, R_2 y R_3 a su resistencia equivalente y conocer la intensidad total que circula a través de estos tres resistores.

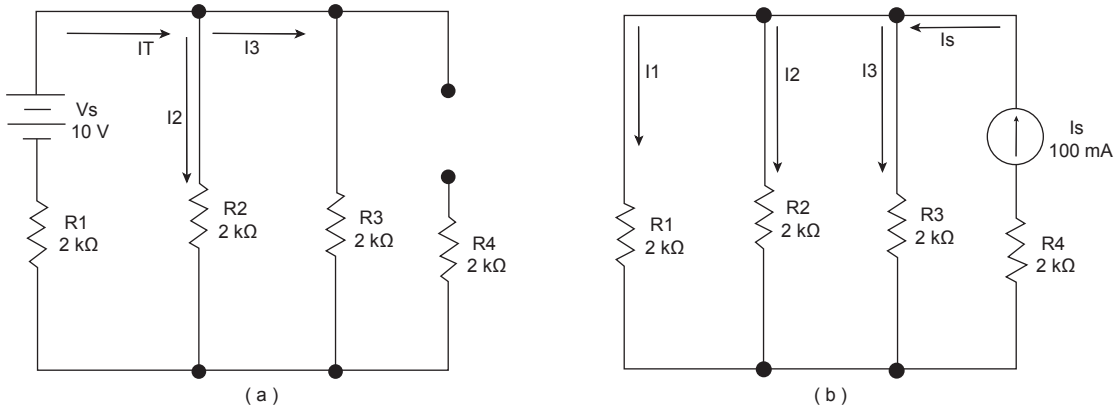


Figura 3.45 Al aplicar el principio de superposición a) la fuente I_s se sustituye temporalmente por un circuito abierto. b) la fuente V_s se sustituye por un cortocircuito. Ejemplo 3.11.

Entonces tenemos:

$$R_{eq} = R_1 + (R_2 || R_3) = 2\ \text{k}\Omega + (2\ \text{k}\Omega \parallel 2\ \text{k}\Omega) = 3\ \text{k}\Omega$$

Por tanto, la intensidad total I_T en la figura 3.45*a*, será:

$$I_T = V_T / R_T$$
$$I_T = 10\ \text{V}/3\ \text{k}\Omega$$
$$I_T = 3.33\ \text{mA}$$

Una vez calculada I_T, puedes ver en la figura 3.45*a*, que ésta encuentra un divisor de corriente formado por R_2 y R_3 que da origen a I_2 e I_3. Calcula I_2 y llámala $I_{2(Vs)}$.

Ahora considera el efecto individual de la fuente de corriente I_s:

$$I_{2(Vs)} = \frac{I_T \cdot (R_3)}{R_2 + R_3} = \frac{(0.00333\,\text{A})(2\,\text{k}\Omega)}{2\text{k}\,\Omega + 2\text{k}\,\Omega} = 1.666\,\text{mA}$$

La fuente de voltaje V_s se sustituye por un cortocircuito, como muestra el diagrama de la figura 3.45*b*. En estas condiciones una manera de encontrar la I_2 es por medio de un divisor de corriente para I_s, formado por R_1, R_2 y R_3, llámala $I_{2(Is)}$. Por tanto, se tiene:

$$I_{2(Is)} = \frac{I_S \cdot (1/R_1)}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3} = \frac{(0.1\text{A})(1/2\,\text{k}\Omega)}{1/2\,\text{k}\Omega + 1/2\,\text{k}\Omega + 1/2\,\text{k}\Omega} = 33.333\,\text{mA}$$

Finalmente, aplicando el principio de superposición resulta que la I_2, a través de la resistencia R_2 es:

$$I_2 = I_{2(Vs)} + I_{2(Is)} = 1.666\ \text{mA} + 33.333\ \text{mA} = 34.999\ \text{mA}$$

La comprobación mediante simulación se presenta en la figura 3.46.

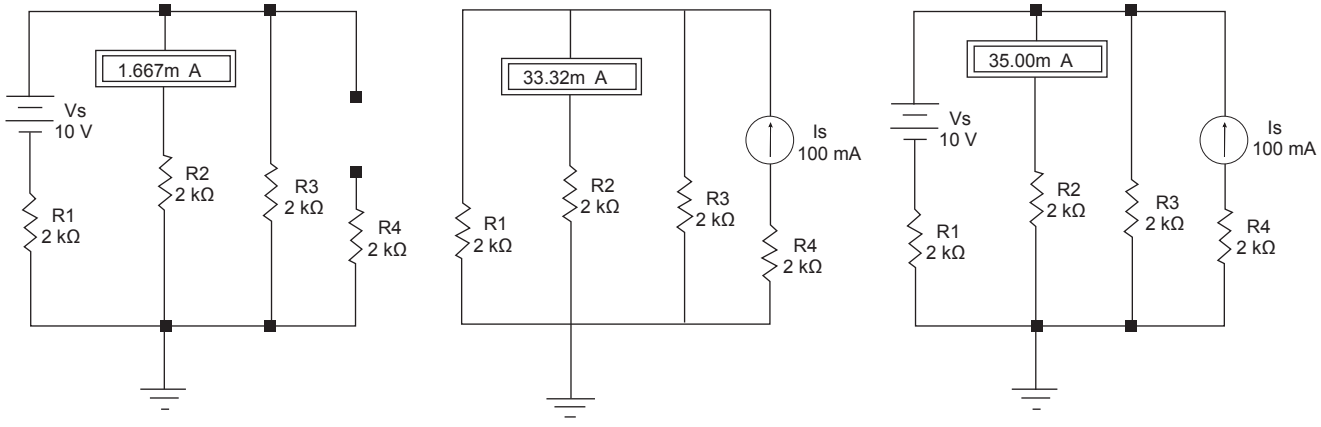


Figura 3.46 Simulación para el circuito del ejemplo 3.11.

3.7 Teoremas de Thévenin y de Norton

3.7.1 Teorema de Thévenin

Si una resistencia de carga R_L es alimentada por una red lineal que contiene una o más fuentes de voltaje y uno o más resistores (*red de alimentación*), dicha red de alimentación puede ser sustituida por una sola fuente de voltaje de valor V_{OC} conectada en serie a una resistencia R_{Th}, y el efecto que se producirá sobre la R_L será el mismo que produce la red original. La red obtenida se denomina ***circuito equivalente de Thévenin.***

Se da el nombre de V_{OC} al voltaje que entrega la red original de alimentación en *circuito abierto*; es decir, al desconectar a la R_L de ella. R_{Th} es como se simboliza a la resistencia total equivalente de la red original de alimentación, cuando todas sus fuentes de voltaje originales se ponen en cortocircuito.

EJEMPLO 3.12

Considera que el resistor R_5 del circuito de la figura 3.12, es una resistencia de carga alimentada por la fuente independiente de 6 volts en conjunto con las cinco resistencias restantes. Encuentra el circuito equivalente de Thévenin para esta red de alimentación. Comprueba tu resultado con los datos que proporciona la tabla 3.4 del ejemplo 3.4.

Solución

Datos:

Los datos del problema se presentan en la figura 3.47.

Planteamiento:

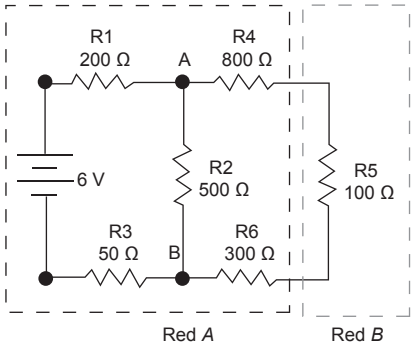
Para obtener el circuito equivalente se aplica el teorema de Thévenin.

Método: *Teorema de Thévenin*

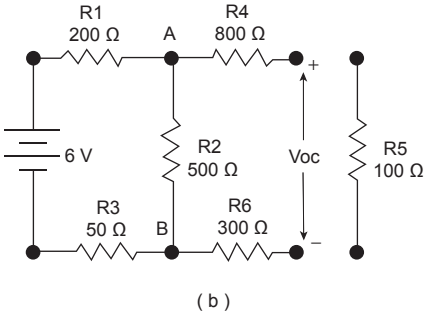
Desarrollo:

1. A partir de la figura 3.47*a* considera al circuito dividido en dos redes: la red *B*, formada únicamente por la resistencia de carga (R_5), y la red *A*, formada por la fuente de 6 V y los resistores R_1, R_2, R_3, R_4 y R_6.

2. Desconecta la red *B* de la red *A*. Entre R_4 y R_6 queda un circuito abierto (figura 3.47*b*).



(a)



(b)

Figura 3.47 *a*) El circuito original se considera formado por dos redes: red *A* y red *B*. *b*) La red A se toma como circuito abierto para determinar el voltaje V_{OC}.

3. Calcula el voltaje a circuito abierto de la red *A*, entre las terminales de R_4 y R_6. Éste será el valor de V_{OC} del circuito equivalente (figura 3.47b).

   A través de R_4 y R_6 no circula la corriente (circuito abierto), por tanto, no hay caída de voltaje. Queda un divisor de voltaje para la fuente de 6 *V*, formado por R_1, R_2 y R_3. Así que $V_{OC} = V_{R2}$

$$V_{OC} = V_{R2} = \frac{6\text{V} \cdot 500\,\Omega}{750\,\Omega} = 4\text{V}$$

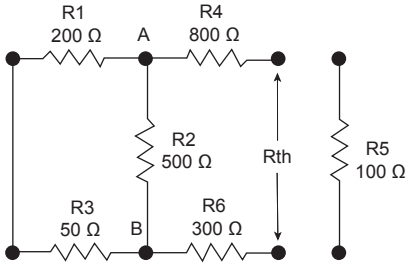


Figura 3.48 Para calcular la resistencia equivalente de Thévenin se cancela la fuente de voltaje, poniendo sus terminales en cortocircuito.

4. Una vez calculado el voltaje de la fuente equivalente de Thévenin (V_{OC}), se calcula la resistencia equivalente: en la red *A* se elimina la fuente de voltaje, sustituyéndola por un cortocircuito. La resistencia equivalente de R_1, R_2, R_3, R_4 y R_6, vista desde la derecha, donde está V_{OC}, será el valor de la resistencia equivalente de Thévenin (R_{Th}), figura 3.48.

$$R_{Th} = \left[(R_1 + R_3) \| R_2 \right] + \left[R_4 + R_6 \right]$$

$$R_{Th} = 1266.66\ \Omega.$$

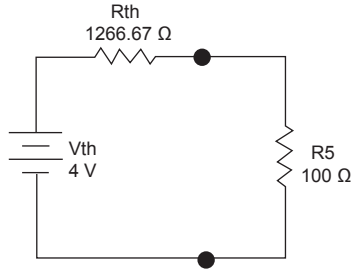


Figura 3.49 Circuito equivalente de Thévenin para la red A de la figura 3.47.

5. Se sustituye la red original de alimentación (red *A*) por su equivalente de Thévenin para conectarlo a la red (resistencia R_5), como se observa en la figura 3.49.
6. Se calcula la corriente que circula ahora por la resistencia de carga.

$$I_5 = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_5} = \frac{4\text{V}}{1266.66\,\Omega + 100\,\Omega} = 2.9268\,\text{mA}$$

Al comparar el resultado para I_5 con el obtenido en el ejemplo 3.4 (tabla 3.4) se puede ver que es el mismo, por lo que se concluye que el circuito calculado es un equivalente correcto para el circuito de la figura 3.12.

También se comprueba por el método de simulación. En la figura 3.50 se muestra la imagen del circuito simulado. El amperímetro virtual mide el mismo valor para la corriente a través de la carga R_5.

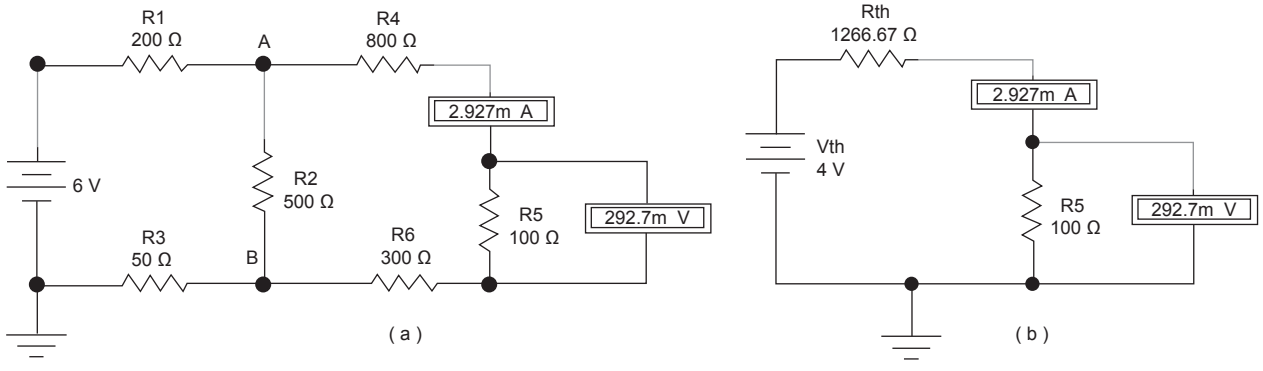


Figura 3.50 Simulación para el circuito del ejemplo 3.12. *a*) Red original. *b*) Circuito equivalente de la red del inciso *a*. Ambas redes entregan a una carga de 100, el mismo valor para la intensidad de corriente y para el voltaje.

3.7.2 Teorema de Norton

El teorema de Norton tiene una gran semejanza con el de Thévenin y puede enunciarse como sigue:

> Si una resistencia de carga R_L es alimentada por una red lineal que contiene uno o más resistores y una o más fuentes de corriente (*red original de alimentación*), dicha red de alimentación puede ser sustituida por una sola fuente de corriente de valor I_{SC} conectada en paralelo con un resistor R_N, y el efecto que se producirá sobre la R_L será el mismo que el que produce la red original. La red obtenida se denomina ***circuito equivalente de Norton.***

Se da el nombre de I_{SC} a la corriente de cortocircuito que entrega la red original de alimentación *A* cuando en lugar de la red *B* se establece un cortocircuito entre sus terminales. R_N es la resistencia de Norton, cuyo valor es igual al de la resistencia de Thévenin (R_{Th}), como se explicó anteriormente.

EJEMPLO 3.13

Encuentra el equivalente del circuito de la figura 3.49, aplica el teorema de Norton y calcula la intensidad de corriente que circulará a través de la resistencia de carga (R_5). Compara tu resultado con el del ejemplo 3.12. Comprueba con el simulador de circuitos.

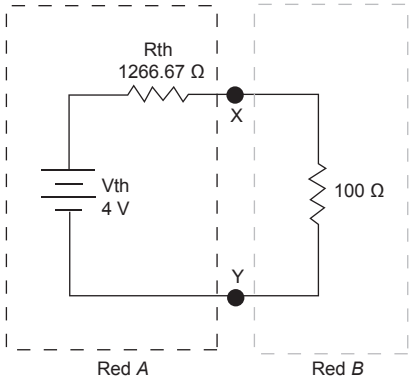


Figura 3.51 Se considera al circuito original dividido en dos redes. La red *B* es alimentada por la red *A*. Ejemplo 3.13.

Solución

Datos:

Según la figura 3.49:
$V_{Th} = 4$ V
$R_{Th} = 1266.67\ \Omega$
$R_L = 100\ \Omega$

Planteamiento:

A partir del circuito de la figura 3.49 puede obtenerse el equivalente de Norton de manera directa.

Método: *Circuitos equivalentes por teorema de Norton*

Desarrollo:

1. Se parte de la figura 3.49, en la que se considera a la R_5 como resistencia de carga, que es alimentada por una fuente de voltaje (V_{Th}) conectada en serie con un resistor (R_{Th}). Así que este circuito puede dividirse en dos redes: La red *A* formada por V_{Th} y la $R_{Th,}$ y la red *B* que corresponde a la R_5. Observa la figura 3.51. Ambas redes se conectan en los puntos *X* y *Y*.

2. Se *desconecta* la red *B* de la red *A* y se ponen en cortocircuito los puntos *X, Y,* que son las terminales de salida de la red *A* (figura 3.52*a*).

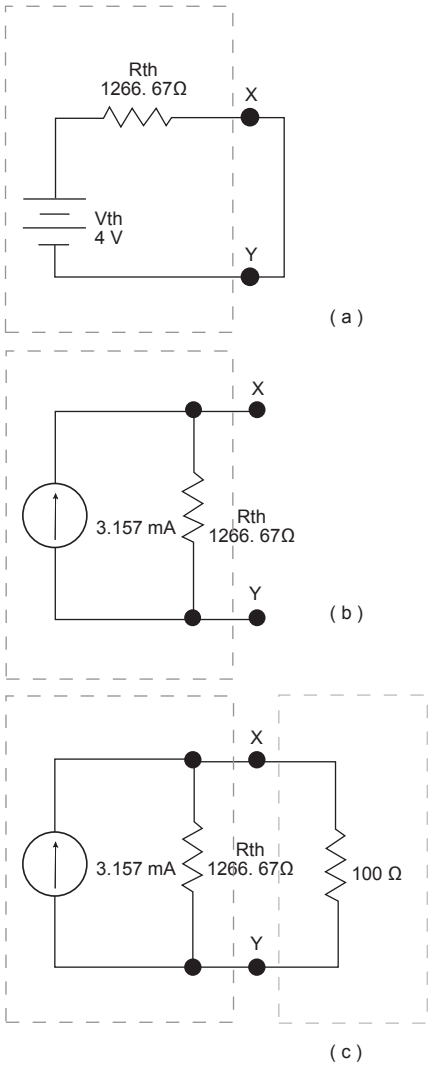


Figura 3.52 Equivalentes para el circuito de la figura 3.12. *a*) Equivalente de Thévenin. *b*) Equivalente de Norton. *c*) Equivalente de Norton conectado a la resistencia de carga R_5.

3. Aplica la ley de Ohm para calcular la intensidad de corriente de cortocircuito I_{SC} que circula por esta malla, figura 3.52):

$$I_{SC} = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = \frac{4\,\text{V}}{1266.67\,\Omega} = 3.157\,\text{mA}$$

4. Con este valor forma la red equivalente, compuesta por una fuente de corriente de 3.157 mA en paralelo con un resistor de valor igual a la R_{Th} = 1 266.67 Ω, figura 3.52*b*.

5. Al conectar nuevamente la red *B* (resistencia de carga R_5), calcula la intensidad de corriente I_L que circula en estas condiciones por R_5. Observa que hay un divisor de corriente en el nodo *X* (figura 3.52*c*), por tanto:

$$I_{R5} = \frac{(3.157\,\text{mA})\cdot(1266.67\,\Omega)}{1266.67\,\Omega + 100\,\Omega} = 2.926\,\text{mA}$$

6. Puedes verificar que ésta es la intensidad de corriente que circula por R_5 para el ejemplo 3.4 (circuito original) y para el ejemplo 3.12 (equivalente de Thévenin).

7. Al hacer la simulación del circuito original (figura 3.12), su equivalente de Thévenin (figura 3.49) y el equivalente de Norton (figura 3.52*c*) se obtienen los resultados mostrados en la figura 3.53, en la que el amperímetro detecta prácticamente la misma intensidad de corriente en cada caso. Por lo que se concluye que existe equivalencia entre el circuito original y los circuitos obtenidos al aplicar los teoremas de Thévenin y de Norton.

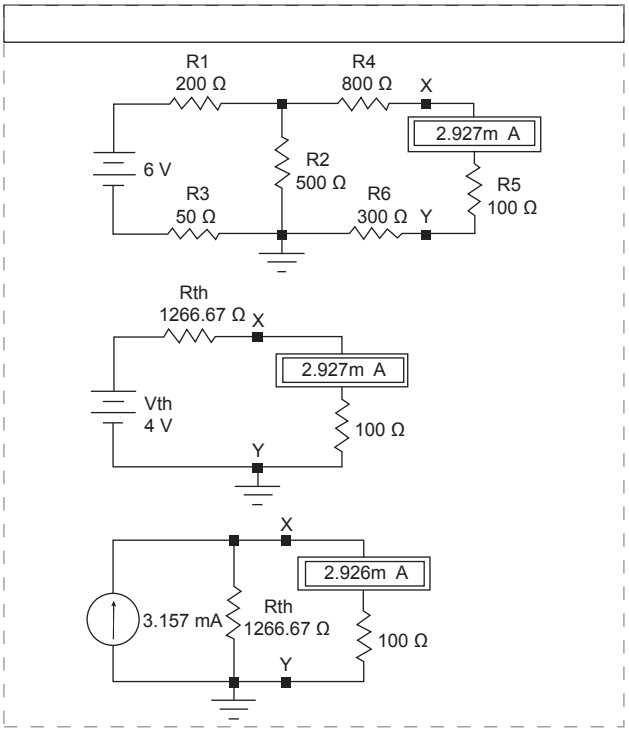


Figura 3.53 Simulación para el ejemplo 3.13. *a*) Circuito de la figura 3.12. *b*) Equivalente de Thévenin. *c*) Equivalente de Norton. Se aprecia que el medidor virtual detecta la misma corriente en cada caso.

Actividades para la evaluación de competencias

Arreglos resistivos alimentados por fuentes independientes de voltaje de cd

3.1. Explica en qué consiste un sistema eléctrico resistivo. [2]
3.2. ¿Cuál es el propósito del *análisis* de circuitos resistivos? [3]
3.3. ¿Cuál es el valor de la potencia total absorbida en un circuito resistivo? [2]
3.4. ¿A qué se le llama fuente independiente de voltaje? [1]
3.5. Explica la diferencia que existe entre una fuente de corriente dependiente y una independiente. [2]

Ley de voltajes de Kirchhoff

3.6. En la figura 3.54, determina:
   a) La intensidad de corriente que circula por el circuito, aplica la ley de Ohm.
   b) La potencia absorbida en la resistencia R_2.
   c) La potencia absorbida por la fuente de 3 volts. [2]

Análisis de circuitos resistivos de un solo lazo

3.7. Escribe la ecuación de voltajes para el circuito de la figura 3.54. [2]
3.8. Mediante la ley de Kirchhoff determina la intensidad de corriente en la malla de la figura 3.54. Compara tu resultado con el ejercicio 3.6a. [3]
3.9. Haz la simulación del circuito mostrado en la figura 3.54. Compara las lecturas del laboratorio virtual con los resultados de los cálculos teóricos anteriores. [2]
3.10. Encuentra el voltaje que entrega la fuente de alimentación V_S, de la figura 3.55. [2]
3.11. Mediante las leyes de Kirchhoff de voltajes y la de Ohm encuentra la potencia absorbida en cada elemento del circuito mostrado en la figura 3.56. Elabora un cuadro de concentración de datos y realiza la simulación del circuito para verificar tus resultados. Calcula la desviación (%) de tus cálculos respecto de los resultados del simulador. [3]

Análisis de circuitos resistivos de varios lazos. Método de mallas

3.12. Encuentra el voltaje en R_4 y el valor de la corriente I_x indicada en la figura 3.57. [2]
3.13. ¿Cuánto vale la potencia absorbida por la fuente de alimentación del circuito resistivo de la figura 3.57? [2]
3.14. Comprueba los resultados obtenidos para los ejercicios 3.12 y 3.13 mediante un proceso de simulación del circuito correspondiente. [3]
3.15. Calcula la potencia absorbida por el resistor R_4 de la figura 3.57. [2]
3.16. Con el método de mallas calcula el valor de I_2 indicada en la figura 3.58. [2]

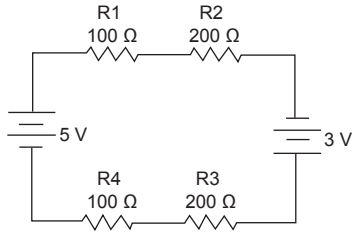


Figura 3.54 Circuito para las actividades 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9.

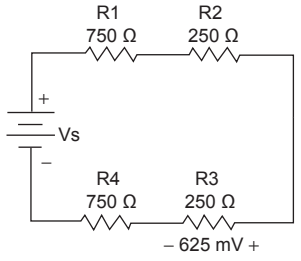


Figura 3.55 Red resistiva para el ejercicio 3.10.

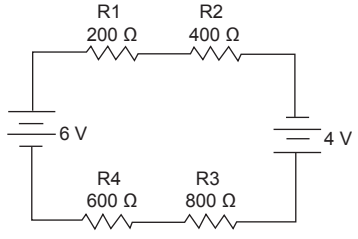


Figura 3.56 Red resistiva para el ejercicio 3.11.

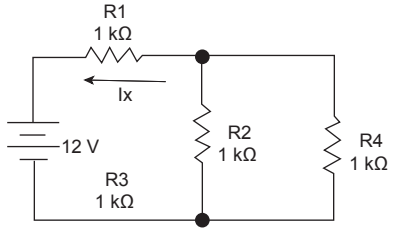


Figura 3.57 Red resistiva para el ejercicio 3.12.

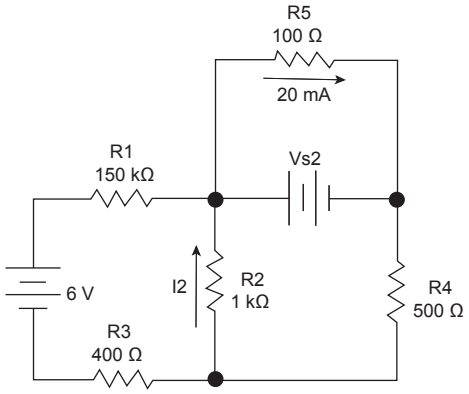


Figura 3.58 Red resistiva para las actividades 3.15.

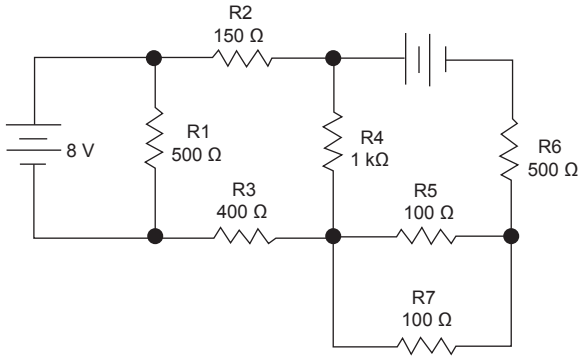


Figura 3.59 Red resistiva para las actividades 3.18 y 3.19.

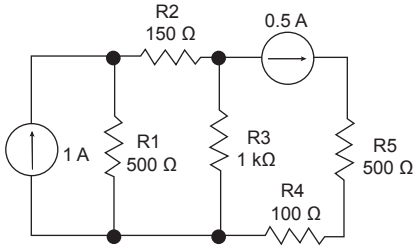


Figura 3.60 Red resistiva para el ejercicio 3.20.

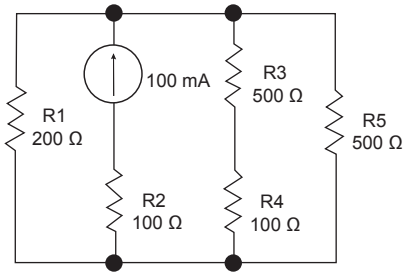


Figura 3.61 Red resistiva para el ejercicio 3.21.

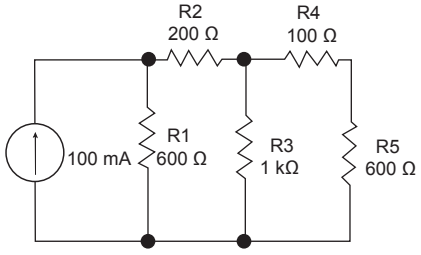


Figura 3.62 Red resistiva para el ejercicio 3.23.

3.17. Elabora un cuadro de potencias absorbidas para los elementos de la red resistiva de la figura 3.58. Comprueba tu resultado por medio de un proceso de simulación del circuito. [2]

3.18. Aplica el método de mallas y calcula la potencia absorbida por la resistencia R_7 del circuito mostrado en la figura 3.59. [2]

3.19. Realiza la simulación correspondiente al circuito mostrado en la figura 3.59, para medir la corriente y el voltaje en el resistor R_7. Determina la potencia absorbida en este resistor. Calcula la desviación respecto al resultado del ejercicio 3.18. [2]

3.20. Aplica el método de análisis por nodos y calcula la diferencia de potencial que existe en las terminales del resistor R_4 de la figura 3.60. Haz la simulación del circuito y determina la desviación de los cálculos con el resultado de la simulación. [2]

3.21. Con el método de análisis por nodos en la red resistiva de la figura 3.61, determina la potencia absorbida por el resistor R_5. [2]

3.22. Realiza una simulación del circuito de la figura 3.61 para determinar la intensidad de corriente en cada resistencia. Encuentra la desviación (%) respecto a los resultados del ejercicio 3.21. [3]

3.23. Aplica el método de análisis por nodos y halla los voltajes en los resistores R_1 y R_3 de la red resistiva de la figura 3.62. [2]

3.24. Realiza la simulación del circuito de la figura 3.62. Mide el voltaje en los resistores R_1 y R_3. Compara los resultados obtenidos en el ejercicio 3.23 y determina la desviación de éstos con los resultados de la simulación. [2]

3.25 Aplica el método de divisores de voltaje y encuentra el voltaje en el resistor R_2 de la red resistiva de la figura 3.57. [2]

3.26. Con el método de divisores de voltaje encuentra el voltaje en el resistor R_3 de la figura 3.63. [2]

3.27. Realiza la simulación de los circuitos correspondientes a la figura 3.63. Con un voltímetro virtual mide el voltaje en el resistor R_3. Calcula la desviación en los cálculos realizados en el ejercicio 3.26, respecto al resultado de este medidor virtual. [2]

3.28. Aplica el método de divisores de voltaje y la ley de Ohm y encuentra el voltaje y la corriente en cada uno de los resistores del circuito mostrado en la figura 3.64. Comprueba el resultado mediante el cálculo de potencias. [2]

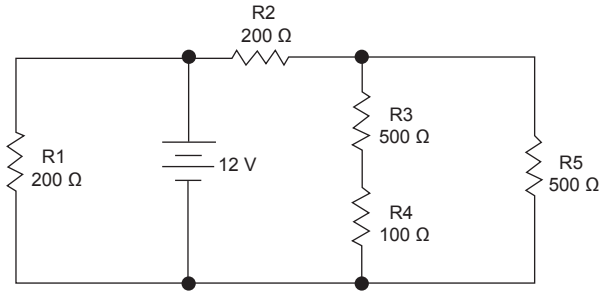


Figura 3.63 Circuito para el ejercicio 3.26.

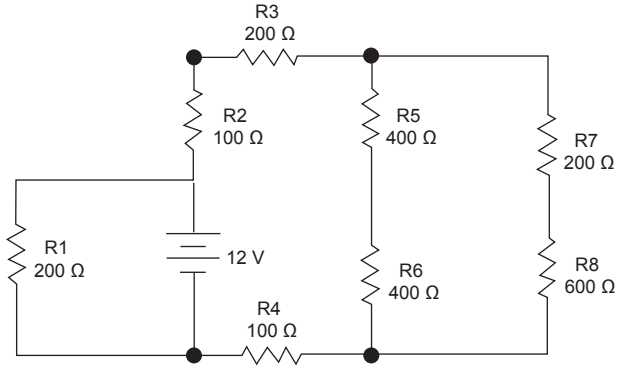


Figura 3.64 Red resistiva para el ejercicio 3.29.

3.29. Haz la simulación del circuito mostrado en la figura 3.64. Mide el voltaje y la corriente en cada resistor y determina la desviación (%) del resultado encontrado en el ejercicio 3.28, respecto a las lecturas de los medidores virtuales del simulador. [2]

Divisor de corriente

3.30. Con el método de divisor de corriente y la ley de Ohm determina el voltaje en el resistor R_3 de la figura 3.61. Compara tu resultado con el del ejercicio 3.22. [2]

3.31. Con el método de divisor de corriente y la ley de Ohm calcula el voltaje en los resistores R_1 y R_3 del circuito mostrado en la figura 3.62. Compara tus resultados con los de los ejercicios 3.23 y 3.24. [2]

3.32. Con el método de divisor de corriente y la ley de Ohm calcula el voltaje en el resistor R_4 del circuito mostrado en la figura 3.60. Compara tus resultados con los del ejercicio 3.20. [2]

Equivalencia entre fuentes

3.33. En el circuito de la figura 3.55, considera que R_2, R_3 y R_4, constituyen un circuito de carga que es alimentado por la fuente V_S en conjunto con R_1. Haz una transformación de la fuente de voltaje en una fuente de corriente, de tal manera que el circuito de carga reciba la misma intensidad de corriente que en la configuración actual. Comprueba tu resultado verificando que en el circuito transformado el voltaje en R_3 sea de 625 mV. [2]

3.34. En el circuito de la figura 3.57 realiza una transformación de la fuente de voltaje en fuente de corriente, de tal manera que el voltaje en R_4 sea el mismo que en la configuración actual. Compara tu resultado con el del ejercicio 3.12. [2]
3.35. Haz una transformación de la fuente de corriente en una fuente de voltaje en el circuito de la figura 3.62, de forma que el voltaje en R_3 sea el mismo que en la configuración actual. Compara tu resultado con el del ejercicio 3.23. [2]
3.36. Realiza una transformación de las dos fuentes de voltaje en el circuito de la figura 3.54, de manera que R_3 y R_4 reciban la misma intensidad de corriente que en la configuración actual. [2]
3.37. Haz una simulación del circuito obtenido en el ejercicio 3.36. Mide la intensidad de corriente a través de R_3 y R_4, y compara el resultado de los cálculos con los de la simulación. Obtén la desviación correspondiente (%). [2]
3.38. Aplica el principio de superposición y encuentra la intensidad de corriente que circula por la R_1 de la figura 3.64. Compara tu resultado con el del ejercicio 3.28. [2]
3.39. Con el principio de superposición determina la potencia absorbida en R_5 para la red de la figura 3.58. Compara tu resultado con el del ejercicio 3.17. [2]

Teoremas de Thévenin y de Norton

3.40. Si en la red de la figura 3.55 se considera que R_3 es una resistencia de carga, encuentra un circuito formado por una fuente en serie con una sola resistencia, de manera que sea equivalente a la configuración actual para que siga habiendo un voltaje de 625 mV en dicha carga.
3.41. Si se considera que en la figura 3.56 la R_3 es una resistencia de carga, encuentra un circuito formado por una sola fuente en serie con una sola resistencia de manera que esta carga reciba la misma intensidad de corriente que en la configuración actual. [2]
3.42. En la red de la figura 3.57 se considera que la R_4 es una resistencia de carga. Sustituye el resto de la red por un circuito equivalente que le proporcione a dicha carga el mismo voltaje que la configuración actual. [2]
3.43. Encuentra un circuito equivalente de Norton para la red de la figura 3.62, considera que R_5 es una resistencia de carga. [2]
3.44. Realiza una simulación para cada respuesta obtenida en las actividades de la 3.40 a la 3.44. Compara los resultados teóricos con los del laboratorio virtual. [2]
3.45. Una vez que haya realizadas las actividades de evaluación del presente capítulo, compara los planteamientos, desarrollos y resultados con tus compañeros para encontrar los puntos relevantes que sean útiles para elaborar un breve ensayo acerca de los trabajos realizados por Ohm, Kirchhoff, Thévenin y Norton y la importancia de sus aportaciones en el área de la teoría de los circuitos. Comparte el ensayo con la clase. [3]

Notas:

[1] Competencias de la dimensión Instrumental.
[2] Competencias de la dimensión Sistémica.
[3] Competencias de la dimensión Interpersonal.

Capítulo 4

Inductancia y capacitancia

Estructura

Temas	CONTENIDOS	
	Conceptuales	
4.1 Inductancia 4.1.1 Inductor e inductancia. 4.1.2 Arreglos de inductores.	• Conceptos *inductancia* e *inductor*. • Concepto *voltaje inducido* en un inductor. • Concepto *inductancia equivalente* en arreglos inductivos.	
4.2 Circuito *RL* simple 4.2.1 Respuesta natural de un circuito *RL* simple. 4.2.2 Energía almacenada en un inductor.	• Descripción de un circuito *RL* simple. • *Constante de tiempo* en un circuito *RL* simple. • Respuesta de un circuito *RL* simple asociado a una fuente de alimentación. • Energía almacenada en un inductor.	
4.3 Capacitancia 4.3.1 Carga de un capacitor. 4.3.2 Permitividad en los materiales. 4.3.3 Dieléctricos en los capacitores. 4.3.4 Energía que almacena un capacitor. 4.3.5 Tipos de capacitores. 4.3.6 Arreglos de capacitores.	• Concepto de *capacitancia* y *capacitor*. • Concepto de *carga* en un capacitor. • Conceptos *dieléctrico* y *permitividad* en los materiales. • Descripción del concepto *capacitancia equivalente* en arreglos capacitivos.	
4.4 Circuito *RC* simple	• Descripción de un circuito *RC* simple. • Constante de tiempo en un circuito *RC* simple.	
4.5 Función escalón unitario	• Descripción de la función escalón unitario asociada a un circuito eléctrico.	
4.6 Circuito *RL* excitado por una función escalón unitario	• Conceptos de *condiciones iniciales*, y *respuesta natural* en un circuito *RL* simple.	

temática

	CONTENIDOS	
	Procedimentales	**Actitudinales**
	• Procedimiento para llegar al modelo matemático de la inductancia y su análisis dimensional. • Procedimiento para calcular la inductancia equivalente en arreglos inductivos.	• Información que permite valorar la importancia de los trabajos de Hans C. Oersted , Joseph Henry, Machael Faraday y André M. Ampere, en el desarrollo de las teorías que explican los fenómenos debido a cargas eléctricas en movimiento. • Argumentos que muestran la importancia de conocer, interpretar y aplicar las leyes que rigen a los fenómenos electromagnéticos, como base para la resolución de problemas y toma de decisiones. • Información que enriquece la capacidad del estudiante para decidir formas de trabajo frente a la realidad. • Información que induce al estudiante al intercambio de ideas con sus compañeros y a la búsqueda de formas de comprobación de su trabajo. • Argumentos técnicos para propiciar el desarrollo de la capacidad para la autoevaluación, bajo el enfoque de los dos teoremas enlistados.
	• Proceso de energización y desenergización de un inductor en un circuito *RL* simple. • Cálculo de la constante de tiempo en un circuito *RL* simple. • Análisis del comportamiento de la corriente en función del tiempo, en un circuito *RL* simple asociado a una fuente de alimentación. • Cálculo de la energía almacenada en un inductor.	
	• Explicación del proceso de carga y de descarga de un capacitor. • Cálculo de la capacitancia en un capacitor según su forma geométrica y el dieléctrico aplicado. • Cálculo de la energía almacenada en un capacitor. • Cálculo de la capacitancia equivalente en arreglos capacitivos.	
	• Análisis del comportamiento del voltaje en un circuito *RC* simple en función del tiempo.	
	• Evaluación de funciones del tiempo, en términos de una función escalón unitaria.	
	• Análisis del comportamiento de un circuito *RL* simple ante una función escalón unitario.	

Estructura

Temas	CONTENIDOS	
	Conceptuales	
4.7 Circuito *RC* excitado por una función escalón unitario	• Conceptos de *condiciones iniciales*, y *respuesta natural* en un circuito *RC* simple.	
4.8 Energía almacenada en un capacitor	• Modelo matemático que describe a la cantidad de energía almacenada en un capacitor.	
4.9 Aplicaciones de los inductores y los capacitores 4.9.1 Medición de inductancias y capacitancias. 4.9.2 Algunas aplicaciones de los capacitores en los circuitos electrónicos. 4.9.3 Algunas aplicaciones de las inductancias en circuitos electrónicos.	• Descripción de sistemas donde se utilizan capacitores o inductores.	
Actividades para evaluación de competencias		

	temática
	CONTENIDOS

	Procedimentales	**Actitudinales**
	• Análisis del comportamiento de un circuito *RC* simple ante una función escalón unitario.	
	• Cálculo de la energía expresada en Joules requerida en el proceso de carga y descarga de un capacitor en un circuito *RC* simple.	
	• Cálculo del voltaje en el devanado secundario de un transformador.	

Orientación general

Desarrollar en el estudiante la capacidad de análisis de circuitos resistivos *RL* y *RC* simples alimentados por fuentes de voltaje de corriente directa, mediante la comprensión y aplicación correcta de técnicas sustentadas en leyes, principios y teoremas fundamentales de la electricidad.

Competencias

Dimensión Instrumental [1]	Dimensión Sistémica [2]	Dimensión Interpersonal [3]
Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:
1.1 Comprender los conceptos *inductancia* e *inductor* en los circuitos eléctricos. 1.2 Comprender el concepto *voltaje inducido* en un inductor. 1.3 Comprender el concepto *inductancia equivalente* en arreglos inductivos. 1.4 Comprender cómo es la *respuesta* de un circuito *RL* simple al asociarse a una fuente de alimentación. 1.5 Comprender el concepto *constante de tiempo* en un circuito *RL* simple. 1.6 Comprender cómo se almacena la energía en un inductor. 1.7 Comprender los conceptos *capacitancia* y *capacitor* en los circuitos eléctricos. 1.8 Comprender cómo adquiere y pierde carga eléctrica un capacitor 1.9 Conocer el concepto *permitividad* en los materiales y su efecto en los capacitores. 1.10 Comprender el modelo matemático que describe a la energía almacenada en un capacitor. 1.11 Describir los tipos de capacitores de uso común. 1.12 Comprender el concepto de capacitancia equivalente en un arreglo capacitivo. 1.13 Comprender cómo es la respuesta de un circuito *RC* simple al asociarse a una fuente de alimentación. 1.14 Comprender el concepto *constante de tiempo* en un circuito *RC* simple. 1.15 Describir a la función escalón unitario asociada a circuitos *RL* y *RC* simples. 1.16 Conocer la respuesta de un circuito *RL* simple ante una excitación debida a una función escalón unitario. 1.17 Conocer la respuesta de un circuito *RC* simple ante una excitación debida a una función escalón unitario.	2.1 Construir con ideas propias palabras los conceptos *inductancia* e *inductor*. 2.2 Calcular el voltaje inducido en un inductor que es recorrido por una corriente eléctrica. 2.3 Calcular la inductancia equivalente en arreglos inductivos, aplicando los modelos matemáticos correspondientes. 2.4 Describir el proceso de energización y desenergización de un inductor en un circuito *RL* simple, en función del tiempo. 2.5 Calcular el valor de la corriente en función del tiempo, en un circuito *RL* simple asociado a una fuente de alimentación. 2.6 Calcular la energía almacenada en un inductor, aplicando el modelo matemático correspondiente. 2.7 Explicar los conceptos de *capacitancia* y *capacitor*. 2.8 Calcular la capacitancia de un capacitor en función de su forma geométrica y el dieléctrico entre sus placas. 2.9 Calcular la energía almacenada entre placas en un capacitor. 2.10 Calcular la capacitancia equivalente en arreglos capacitivos. 2.11 Calcular la constante de tiempo en un circuito *RC* simple dado. 2.12 Desarrollar el modelo gráfico del comportamiento del voltaje en un circuito *RC* simple a partir de los cálculos correspondientes. 2.13 Calcular la respuesta de un circuito *RC* simple asociado a una excitación dada. 2.14 Calcular la respuesta de un circuito *RL* simple a una función de excitación escalón unitario. 2.15 Calcular la respuesta de un circuito *RC* simple a una función de excitación escalón unitario.	3.1 Valorar la importancia de los estudios de investigadores en materia de electromagnetismo y sus aportaciones al desarrollo de la tecnología. 3.2 Apreciar la importancia que tienen los inductores y capacitores en sistemas electrónicos.

Introducción



Figura 4.1 André Marie Ampère, (1775-1836) científico francés, conocido por sus importantes aportaciones al estudio de la electrodinámica. El ampere (A), la unidad de intensidad de corriente eléctrica, toma su nombre de él. Su teoría electrodinámica y sus interpretaciones sobre la relación entre electricidad y magnetismo se publicaron en su *Colección de observaciones sobre electrodinámica* (1822) y en su *Teoría de los fenómenos electrodinámicos* (1826). Ampère inventó la aguja astática, que hizo posible el moderno galvanómetro. Fue el primero en demostrar que dos conductores paralelos por los que circula una corriente en el mismo sentido, se atraen el uno al otro, mientras que si los sentidos de la corriente son opuestos, se repelen.

Dos elementos pasivos de uso frecuente en los circuitos eléctricos y electrónicos son el *inductor* y el *capacitor* que, junto con el *resistor* y las fuentes de alimentación, sirven para configurar redes de gran utilidad, mismas que tienen cantidad de aplicaciones, tanto en sistemas de comunicaciones, como de control o de computación. En este capítulo se tratan los aspectos fundamentales de estos dos elementos, sus características principales, los modelos matemáticos que los describen y los circuitos básicos, así como las técnicas para su análisis.

El *inductor* y el *capacitor*, son elementos pasivos que tienen la capacidad para almacenar energía eléctrica y entregarla posteriormente en cantidades finitas a otro dispositivo, o a un sistema; a diferencia del resistor, que no almacena la energía eléctrica que recibe, sino que la transfiere o la transforma en calor. Para el estudio básico de los modelos y el comportamiento de estos dos elementos ideales, se requiere el manejo de operaciones fundamentales de cálculo diferencial e integral. El manejo de inductores y capacitores físicos en el laboratorio se basa en la teoría de los modelos ideales.

Este capítulo comprende la teoría básica para el estudio de estos elementos, algunos ejemplos para el análisis de redes inductivas y capacitivas, ejercicios y actividades prácticas de aprendizaje. Iniciemos con el estudio del primero de ellos, el inductor.

4.1 Inductancia

COMPETENCIAS:

- Comprender los conceptos *inductancia e inductor* en los circuitos eléctricos. [1]
- Construir con ideas propias los conceptos *inductancia e inductor*. [2]
- Valorar la importancia de los estudios de investigadores en materia de electromagnetismo y sus aportaciones al desarrollo de la tecnología. [3]

Cuando una carga eléctrica fluye a lo largo de un conductor, la corriente se forma un campo magnético alrededor del conductor. Si de pronto la corriente cesa, el campo magnético alrededor del conductor disminuye paulatinamente hasta desaparecer. Estas observaciones fueron hechas por primera vez por el científico danés Hans Christian Oersted en 1819, cuando descubrió que una aguja imantada se desvía al colocarla en dirección perpendicular a un conductor por el que circula una corriente eléctrica.

Estas experiencias demostraron que la causa de los campos magnéticos alrededor de un conductor, es un flujo de carga o corriente eléctrica que fluye a través de éste, y dieron pie para que iniciara así el estudio del electromagnetismo. Poco tiempo después, el científico francés André Marie Ampère, figura 4.1 que confirmó los estudios de Oersted cuando realizó algunas mediciones y demostró que, en efecto, el campo magnético alrededor del conductor estaba relacionado linealmente con la corriente que lo producía.

Casi un cuarto de siglo después el experimentador inglés Michael Faraday comprobó un fenómeno relacionado con los descubrimientos de Oersted, figura 4.2, y Ampère que consistía en que un campo magnético variable podía inducir un voltaje en un circuito cercano a dicho campo. Cabe mencionar que este fenómeno fue descubierto también

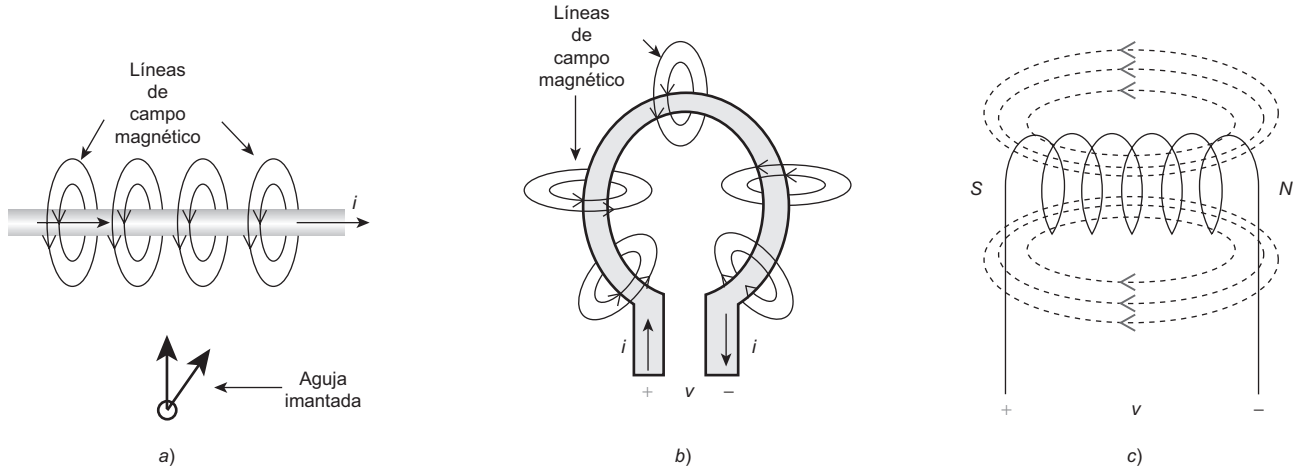


Figura 4.2 *a*) Sección de un conductor rectilíneo que conduce una corriente eléctrica $i(t)$. Alrededor del conductor se forma un campo magnético. *b*) Campo magnético alrededor de una espira, lazo o bucle. *c*) Campo magnético en una bobina (conducto enrollado sobre sí mismo) que conduce una corriente eléctrica.

y casi de manera simultánea por el inventor estadounidense Joseph Henry. Tanto Faraday como Henry, a través de sus cálculos y estudios experimentales demostraron que este voltaje inducido es *proporcional* a la forma en que la corriente productora del campo varía con el tiempo. En términos matemáticos se expresa de la siguiente manera:

$$v(t) = L\frac{di}{dt} \qquad \text{(ecuación 4.1)}$$

La ecuación 4.1 expresa que el voltaje inducido v es directamente proporcional a la variación de la intensidad de corriente i respecto del tiempo t. Contiene una constante de proporcionalidad L, a la que ahora se le llama *inductancia*, y la unidad en que se mide se designa *henry* (H), en honor al científico estadounidense. Esto indica que a mayor variación de la corriente, mayor será el voltaje inducido y viceversa; también a mayor *inductancia*, mayor será el voltaje inducido y viceversa.

En la ecuación 4.1 el voltaje v se expresa en volts, y di/dt en amperes/segundo; entonces la unidad henry (H) es equivalente a:

$$\text{henry} = \frac{\text{volt} \cdot \text{segundo}}{\text{ampere}} \qquad \text{(ecuación 4.2)}$$

Si al conductor rectilíneo de la figura 4.2*a* se le da forma de bucle (o espira), el campo magnético del bucle continuará estando alrededor del conductor (figura 4.2*b*). Si, finalmente, al conductor se le enrolla o devana en forma de bobina (figura 4.2*c*), los campos magnéticos de los bucles individuales se combinan para formar un solo campo magnético total, en el cual se puede distinguir claramente un polo magnético norte y uno sur. Observa en la figura 4.2*c* que el campo magnético que se forma alrededor de la bobina es de la misma configuración que el formado alrededor de un imán permanente. Este conductor enrollado sobre sí mismo recibe el nombre de *inductor* o *bobina*.

4.1.1 Inductor e inductancia

El *inductor* (alambre enrollado sobre sí mismo) es un elemento que, aunque pasivo, es capaz de almacenar energía (magnética) cuando es recorrido por una corriente eléctrica. Consiste en un alambre de calibre conocido, con una longitud determinada, y enrollado sobre sí mismo con un número de vueltas también conocido. El campo magnético que se induce alrededor del conductor que conduce corriente posee cierta cantidad finita de energía. Se acostumbra llamarle también bobina o inductor. En este texto podremos usar indistintamente un término u otro al referirnos a este elemento.

La *inductancia* es una constante del inductor que está dada por las características físicas de éste, como su longitud, calibre, cantidad y diámetro de vueltas o espiras del enrollamiento, las características del núcleo en el interior de las espiras. Se acostumbra representarla por la letra *L,* y se mide en *henrys* (H), como se puede ver en las ecuaciones 4.1 y 4.2.

Asimismo, la magnitud de la energía depositada en el campo magnético alrededor del inductor, depende de la intensidad de la corriente que origina el campo y de la inductancia del mismo. Cuando la intensidad de la corriente disminuye, la energía almacenada en el campo magnético también decrece, retornando a las cargas eléctricas que recorren al conductor.

A partir de la ecuación 4.1 se puede observar lo siguiente: cuando la corriente que recorre a una bobina es constante, de variación cero, el voltaje inducido también será cero, ya que matemáticamente, la derivada de una constante respecto del tiempo es igual a cero. Así que:

$$v = L\frac{di}{dt}\bigg|_{i=cte} = 0 \qquad \text{(ecuación 4.3)}$$

Esto significa que una bobina que es recorrida por una cd, aun cuando exista un campo magnético alrededor de ella, no induce voltaje alguno; o dicho de otra manera, el voltaje inducido es cero. De aquí que esta bobina en cd se comportará como un corto-circuito; simplemente un conductor. Para que haya un voltaje inducido es necesario, como lo indica la ecuación 4.1, que la corriente en la bobina tenga alguna variación en sus valores instantáneos, en función del tiempo.

En la figura 4.3 se muestra la forma en que se simbolizan tres tipos de bobinas o inductores: *a*) inductor normal, *b*) inductor con núcleo de hierro, *c*) inductor variable; y en la tabla 4.1, respectivamente, donde se representa un alambre conductor enrollado sobre sí mismo, en el cual se pueden distinguir los bucles que componen al devanado.

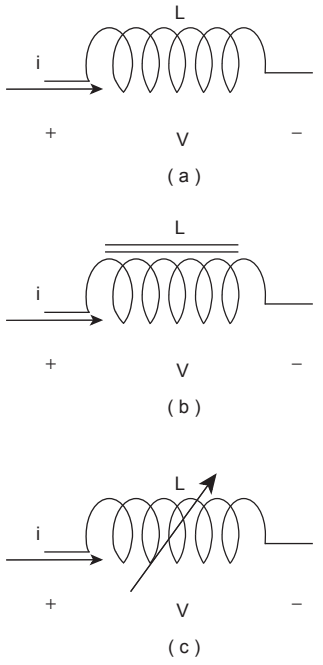


Figura 4.3 Representación simbólica de a) inductor. b) inductor con núcleo de hierro. c) inductor variable.

EJEMPLO 4.1

En una bobina con inductancia de 50 mH circula una corriente variable en el tiempo, cuyos valores se representan en la figura 4.4. ¿Cómo será el

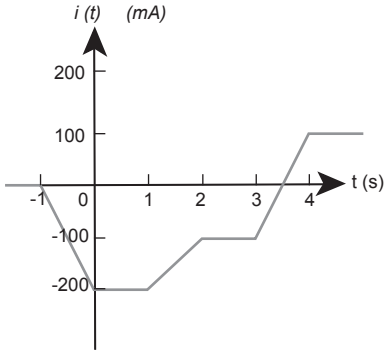


Figura 4.4 Forma de onda de la corriente en un inductor de 50*mH* para el ejemplo 4.1.

comportamiento del voltaje que se induce a partir del campo magnético alrededor de este inductor?

Solución
Datos:

$L = 50$ mH
$i(t)$ es variable en el tiempo.
$v(t) = ?$

Planteamiento:

Se sabe que cuando circula una corriente eléctrica variable en el tiempo a través de un inductor, se induce un voltaje que está dado por

$$v(t) = L\frac{di}{dt} \qquad \text{(ecuación 4.1)}$$

Desarrollo:

De acuerdo con la ecuación 4.1 cuando la corriente varía hay un voltaje inducido, mientras que si la corriente permanece constante, sin cambio, el voltaje también será cero. La corriente a través del inductor de 50 mH se comporta en el tiempo como se muestra en la figura 4.4 con variaciones en intervalos bien definidos.

Al sustituir valores en la ecuación 4.1 por intervalos, se obtienen los valores que muestra la tabla 4.1.

Tabla 4.1 Variaciones de la corriente por intervalos de tiempo y su correspondiente voltaje inducido al aplicar la ecuación 4.1 al ejemplo 4.1.

Intervalo (*s*)	Variación de la corriente (*di*/*dt*)	$v = L\frac{di}{dt}$
$t < -1$	Cero	(0.05 H)(0A/s) = 0
$-1 < t < 0$	–200 mA/s	(0.05 H)(–0.200 A/s) = –0.01 V
$0 < t < 1$	Cero	(0.05H)(0A/s) = 0
$1 < t < 2$	100 mA/s	(0.05H)(0.100A/s) = 0.005 V
$2 < t < 3$	Cero	(0.05H)(0A/s) = 0
$3 < t < 4$	200 mA/s	(0.05H)(0.200A/s) = 0.01 V
$4 < t$	Cero	(0.05H)(0A/s) = 0

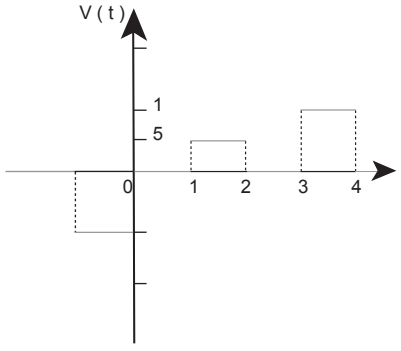


Figura 4.5 Formas de ondas que se presentan en la bobina del ejemplo 4.1.

A partir de los datos de la tabla 4.1 se obtiene la gráfica o forma de onda del voltaje inducido en la bobina, como muestra la figura 4.5, en la que

se puede ver el valor que adquiere el voltaje inducido, como resultado de las variaciones en los valores de la corriente en cada intervalo, para el inductor del ejemplo 4.1. Observa que cuando la variación de la corriente es cero, el voltaje inducido también es cero.

4.1.2 Arreglos de inductores

COMPETENCIAS:

- Comprender el concepto *inductancia equivalente* en arreglos inductivos. [1]
- Calcular la inductancia equivalente en arreglos inductivos, aplicando los modelos matemáticos correspondientes. [2]

De manera semejante a como se obtienen arreglos resistivos, los inductores también se agrupan para formar arreglos o acoplamientos de dos o más elementos. Éstos pueden ser arreglos en serie, en paralelo o una combinación de ambos.

Arreglo inductivo tipo serie

Dos o más inductores (bobinas) con inductancias L_1, L_2, L_n, pueden conectarse entre sí y formar un arreglo tipo *serie*, de la misma manera que se forma un arreglo serie resistivo, como se muestra en la figura 4.6. El conjunto tendrá una inductancia total equivalente, cuyo valor se determina por la ecuación 4.4.

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \ldots + L_n \qquad \text{(ecuación 4.4)}$$

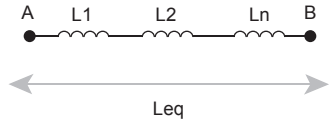


Figura 4.6 Arreglo inductivo de *n* bobinas en serie, con una inductancia total equivalente, L_{eq}, entre los puntos *A* y *B*.

Arreglo inductivo tipo paralelo

Dos o más inductores (bobinas) con inductancias L_1, L_2, L_n, pueden conectarse entre sí, formando un arreglo tipo *paralelo*, de la misma manera que se forma un arreglo paralelo resistivo, como se muestra en la figura 4.7. El conjunto tendrá una inductancia total equivalente, cuyo valor se determina con la ecuación 4.5.

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n} \qquad \text{(ecuación 4.5)}$$

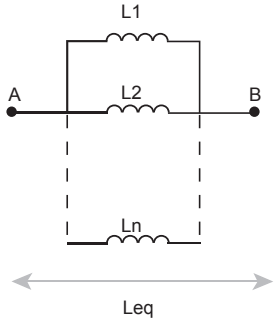


Figura 4.7 Arreglo inductivo de *n* bobinas en paralelo, con una inductancia total equivalente, L_{eq}, entre los puntos *A* y *B*.

EJEMPLO 4.2

Dado el arreglo inductivo que muestra la figura 4.8, calcula el valor de la inductancia total equivalente entre los puntos *A* y *B*.

Solución

Datos:

$L_1 = 1$ mH $\quad L_4 = 6$ mH
$L_2 = 4$ mH $\quad L_5 = 10$ mH
$L_3 = 2$ mH $\quad L_{eq} = ?$

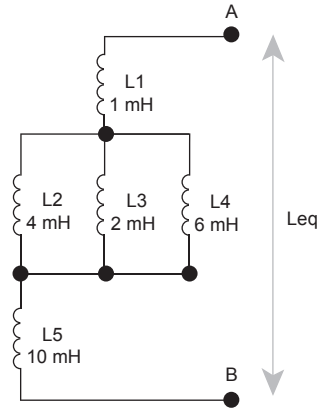


Figura 4.8 Arreglo inductivo para el ejemplo 4.2.

Planteamiento:

En la figura 4.8 se puede ver que L_2, L_3 y L_4 están conectadas en paralelo; por tanto, de estas tres inductancias se puede obtener una equivalente

L_{234}. Esta inductancia estará conectada en serie con L_1 y L_5. Entonces, la inductancia total equivalente, L_{eq}, entre los puntos A y B será:

$$L_{eq} = L_1 + L_{234} + L_5$$

$$L_{eq} = L_1 + (L_2 \,||\, L_3 \,||\, L_4) + L_5$$

$$L_{eq} = 1\text{ mH} + \left[\frac{1}{1/4\text{ mH} + 1/2\text{ mH} + 1/6\text{ mH}} \right] + 10\text{ mH}$$

$$L_{eq} = 12.09\text{ mH}$$

Este resultado indica que el arreglo inductivo de la figura 4.8 puede sustituirse por una sola inductancia de 12.09 mH entre los puntos A y B, y se tendrá el mismo comportamiento que la configuración completa.

4.2 Circuito *RL* simple

COMPETENCIA:
Describir el *proceso de energización y desenergización* de un inductor en un circuito *RL* simple, en función del tiempo. [2]

Cuando una inductancia se asocia a una resistencia, como muestra la figura 4.9, se tiene un arreglo al cual se le da el nombre de *circuito RL simple*. Los dos elementos, resistor e inductor, están conectados en paralelo, ya que en las terminales de ambos dispositivos habrá el mismo voltaje en un momento dado. En el arreglo no se tiene fuente de alimentación alguna, sin embargo, el diagrama muestra que circula una corriente $i_L(t)$, y será de la misma intensidad en ambos elementos.[1]

Esto se debe a una energía previamente almacenada en el inductor en forma de campo magnético, que ahora se manifiesta como una diferencia de potencial entre sus terminales, y está variando con el tiempo. Significa que en algún periodo anterior, el inductor estuvo alimentado por alguna fuente que le transmitió esa energía, y que esa fuente se desconectó en algún instante, al que le podemos llamar $t = 0$. Es decir, hay una transición en el tiempo $t = 0$ en el que se ha producido una discontinuidad en la alimentación para la red *RL*. La figura 4.9 muestra lo que sucede para el tiempo $t > 0$.

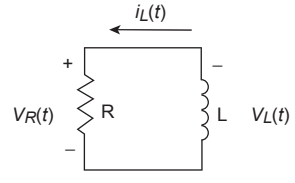


Figura 4.9 Circuito *RL* simple en el que circula una corriente $i_L(t)$, con un valor inicial de *Io*, debido a una fuerza electromotriz inducida previamente en el inductor.

A partir de lo anterior, el estudio de la corriente en el inductor, $i_L(t)$ puede ser separado en dos etapas o periodos diferentes:

La primera etapa: comprende todo tiempo $t < 0$ hasta el último instante *infinitamente pequeño* previo a $t = 0$, al que se le puede llamar el tiempo $t\ (0^-)$, durante el cual la red *RL* permanece conectada a una fuente de alimentación, que le proporciona un voltaje. En estas condiciones el circuito *RL* tendrá un comportamiento en correspondencia a la función de excitación dada por la fuente de alimentación, lo que da como resultado un almacenamiento de energía en el inductor, en

[1] *R* y *L* están conectados formando una red de comportamiento particular, ya que al mismo tiempo que forman un arreglo paralelo (por disponer de la misma diferencia de potencial entre sus terminales), también se considera un arreglo en serie (por circular en ambos la misma intensidad de corriente).

forma de campo magnético. A este comportamiento se le da el nombre de *respuesta forzada*. La red *RL* tendrá una *respuesta forzada* hasta el instante en que la fuente se desconecta de la red, en $t = 0$.

La segunda etapa: inicia en el instante en que la fuente de alimentación se desconecta de la red *RL,* y sólo queda la energía almacenada en el inductor en forma de campo magnético, la cual se va descargando hacia el resistor, hasta que dicha energía llega a valor de cero, o bien se presente una nueva excitación externa a la red *RL*. A este proceso de desenergización se le da el nombre de *respuesta natural*[2] del circuito *RL*.

Al instante en el que se presenta la transición entre la respuesta forzada y la respuesta natural del circuito *RL* se le asigna el valor de $t = 0$, y al instante inmediato posterior a éste, en el que inicia la respuesta natural, se le llama $t\,(0^+)$.

4.2.1 Respuesta natural de un circuito *RL* simple

COMPETENCIAS:

- Comprender cómo es *la respuesta de un circuito RL simple al asociarse* a una fuente de alimentación. [1]
- Comprender el concepto *constante de tiempo* en un circuito *RL* simple. [1]
- Calcular el *valor de la corriente en función del tiempo*, en un circuito *RL* simple asociado a una fuente de alimentación. [2]

Veamos lo que sucede después de que un circuito *RL* simple se desconecta de una fuente que lo ha estado alimentando por un cierto tiempo. Esto es, para todo $0 < t \leq t_{final.}$ La interrogante sería ¿cuál es el valor de la corriente que circula por la red *RL* de la figura 4.9 durante este periodo, debida a la energía previamente almacenada en el inductor?

Considerando que se trata de una corriente eléctrica generada por una energía de valor finito almacenada en el inductor y que ahora se descarga sobre el resistor, esta corriente disminuirá su valor en cada instante, dado que la energía almacenada también disminuirá desde un valor máximo inicial hasta su total descarga. La descarga de energía en el inductor da como resultado que la diferencia de potencial entre sus terminales disminuya gradualmente de valor con el tiempo.

Esta relación entre el voltaje y la corriente en el inductor se expresa de acuerdo con la ecuación 4.1:

$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

Llamemos a la corriente variable en el tiempo $i_L(t)$, e I_o al valor inicial de dicha corriente para el instante $t(0^+)$. Al aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes en la malla de la figura 4.9 se tiene:

$$v_R + v_L = 0$$

En consecuencia

$$Ri + L(di/dt) = 0 \qquad \text{(ecuación 4.6)}$$

La ecuación 4.6 es una ecuación diferencial de primer orden que puede resolverse por cualquier método aplicable a este tipo de ecuación. Por ejemplo, al dividir entre *L* y multiplicar por *dt* la expresión, se tiene:

$$\frac{R}{L}\,idt + di = 0$$

[2] Dado el enfoque de este texto, hacia un primer curso de circuitos eléctricos y electrónicos, se estudia únicamente la respuesta natural de un circuito RL simple, dejando el estudio de la respuesta forzada para textos de análisis de circuitos eléctricos más avanzados.

Ahora, al dividir entre *i*:

$$\frac{R}{L}\,dt + \frac{di}{i} = 0,\ o\ bien,\ \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\,dt \qquad \text{(ecuación 4.7)}$$

La ecuación 4.7 se puede resolver para la variable *i*, considerando que ésta varía desde el instante $t = 0$ hasta un tiempo *t* cualquiera. Por tanto:

$$\int_{I_o}^{i(t)} \frac{di}{i} = \int_0^t -\frac{R}{L}\,dt$$

Al integrar, se tiene:

$$\ln i\Big|_{I_o}^{i} = -\frac{R}{L}\,t\Big|_0^t$$

Se sustituyen los límites de integración y se reordenan los términos y se tiene:

$$ln\ i - ln\ I_o = -\frac{R}{L}\,(t - 0)$$

$$ln\ i = -\frac{R}{L}\,t + ln\ I_o$$

Ahora se puede despejar a la variable $i_L(t)$:

$$i_L(t) = e^{-(Rt/L) + ln\ Io} = e^{-(Rt/L)}\,e^{ln\ Io}$$

$$i_L(t) = I_o e^{-Rt/L} \qquad \text{(ecuación 4.8)}$$

La ecuación 4.8 da el valor para $i_L(t)$. Observa que esta corriente tiene un valor inicial I_o y una variación cuyo comportamiento es exponencial, con una constante en el exponente de *e*, dada por los valores de *R* y *L*, que son valores fijos; así que la variable independiente en la expresión es *t*. Se concluye que la corriente varía en función del tiempo, desde un valor inicial $i_L(0^+) = I_o$ hasta su valor final de $i_L(\infty) = 0$.

A la relación $\frac{L}{R}$ se le denomina *constante de tiempo* del circuito *RL*, y se acostumbra representarla con la letra griega *tau* (τ). El tiempo que tarda la corriente para pasar desde un valor inicial de I_o hasta *cero* tiene una relación directa con el valor de esta constante, como se verá más adelante. En otras palabras, *tau* es el parámetro respecto del cual se pueden conocer los valores de la relación i/I_o en un tiempo *t* determinado. Así que:

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad \text{(ecuación 4.9)}$$

Si se sustituye la ecuación 4.9 en la 4.8, se obtiene:

$$i_L(t) = I_o e^{-t/\tau} \qquad \text{(ecuación 4.10)}$$

Para visualizar mejor el comportamiento de la corriente generada por la energía almacenada en el inductor de la figura 4.9, misma que se descargará sobre el resistor, a partir de la ecuación 4.10 hagamos variar

el tiempo, de manera que éste adquiera los valores de $t_0 = 0$, $t_1 = \tau$, $t_2 = 2\tau$, $t_3 = 3\tau$, $t_4 = 4\tau$, y $t_5 = 5\tau$.

Al sustituir en la ecuación 4.10 los valores dados para t, se obtiene en cada instante un valor para $i_L(t)$ respecto del valor de I_o como se muestra en la tabla 4.2.

Tabla 4.2 Valores que adquiere $i_L(t)$ respecto de un valor inicial I_o, en un circuito *RL*, con una constante de tiempo $\tau = \frac{L}{R}$.

t	$i_L(t) = I_o e^{-t/\tau}$	$i_L(t)$ respecto de I_o
0	$i_L(t) = I_o e^{0}$	$i_L(t) = I_o$
τ	$i_L(t) = I_o e^{-1}$	$i_L(t) = 0.3678\, I_o$
2τ	$i_L(t) = I_o e^{-2}$	$i_L(t) = 0.1353\, I_o$
3τ	$i_L(t) = I_o e^{-3}$	$i_L(t) = 0.0497\, I_o$
4τ	$i_L(t) = I_o e^{-4}$	$i_L(t) = 0.0183\, I_o$
5τ	$i_L(t) = I_o e^{-5}$	$i_L(t) = 0.00678\, I_o$

Cuando el tiempo t es *cero*, la corriente en la red *RL* es exactamente igual al valor de I_o; para un tiempo transcurrido de $t = \tau$, la corriente en la red $i_L(t)$ es 36.78% del valor de I_o; para un tiempo $t = 2\tau$, la corriente en la red $i_L(t)$ es ahora de 13.53% del valor de I_o, etcétera, hasta que la corriente $i_L(t)$ tiene un valor de solo 0.67% del valor inicial I_o; es decir, *prácticamente cero*.

A partir de los datos de la tabla 4.2 se elabora la gráfica correspondiente, figura 4.10 en la cual se percibe una disminución exponencial en los valores de la corriente $i_L(t)$, conforme transcurre el tiempo. En el eje horizontal de la gráfica se representan las variaciones del tiempo (t), en términos de la constante de tiempo $\tau = (L/R)$, mientras que en el eje vertical se han representado los valores correspondientes a la relación que existe entre la magnitud de $i_L(t)$ y el valor fijo de I_o.

En resumen, los datos y la gráfica nos permiten ver que la energía almacenada en el inductor, después de haber estado conectado a una fuente durante un tiempo $t < 0$, se *desmagnetiza* sobre el resistor provocando una intensidad de corriente $i_L(t)$ que va decreciendo de manera exponencial y cuyo tiempo de duración es aproximadamente 5τ.

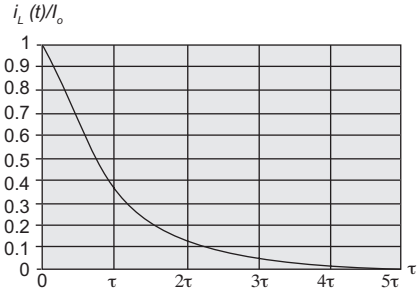


Figura 4.10 Comportamiento de la corriente $i_L(t)$ respecto de su valor inicial I_o, en un circuito *RL* en serie. La corriente decrece desde un valor máximo (I_o) hasta prácticamente cero en un intervalo de 5τ aproximadamente.

EJEMPLO 4.3

En el circuito que muestra la figura 4.11, la fuente de alimentación ha estado conectada a la red formada por los resistores R_1 y R_2 y el inductor

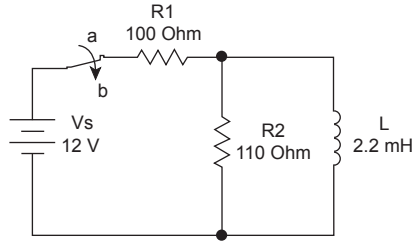


Figura 4.11 El interruptor cambia de posición en $t = 0$ quedando la sección R_2L desconectada de la fuente de alimentación. Ejemplo 4.3.

(bobina) L, hasta el instante $t = 0$, en el cual el interruptor cambia de la posición *a* a la *b*. Calcula la corriente en cada uno de los resistores y en el inductor, cuando $t = 40\ \mu s$.

Solución
Datos:

$$R_1 = 110\ \Omega \qquad R_2 = 110\ \Omega \qquad L = 2.2\ \text{mH} \qquad V_s = 12\ \text{V}_{\text{cd}}$$
$$i(40\mu\ \text{s})_{R_1} = ? \qquad i(40\mu\ \text{s})_{R_2} = ? \qquad i(40\mu\ \text{s})_L = ?$$

Planteamiento:

COMPETENCIAS:
- Comprender cómo se almacena la energía en un inductor. [1]
- Calcular la energía almacenada en un inductor, aplicando el modelo matemático correspondiente. [2]

a) Mientras la red esté alimentada por la fuente de 12 V_{cd} (todo tiempo $t < 0$), la bobina L se comportará como un cortocircuito, motivo por el cual la corriente circula por R_1 y L, mientras que no hay corriente por el resistor R_2, ya que el cortocircuito elimina el efecto de éste.

b) En el tiempo $t = 0$, cuando el interruptor cambia de posición, la fuente se desconecta, quedando en la red sólo la energía que logró almacenarse en el inductor en forma de campo magnético. A partir de este instante, $t\ (0^+)$, el inductor "descarga" su energía sobre el resistor R_2 únicamente, ya que R_1 ha quedado en circuito abierto. Por tanto la corriente en $R_1 = 0$.

c) Para todo $t > 0$ se tiene una red *RL* simple, como el caso de la red mostrada en la figura 4.9, y cuyo análisis quedó explicado anteriormente.

Desarrollo:

Para $t < 0$, cuando la fuente de 12V_{cd} está conectada a la red *RL*, la corriente i_L será:

$$i_L = \frac{V_S}{R_1} = \frac{12\ \text{V}}{110\ \Omega} = 0.109\ \text{A} = 109.09\ \text{mA}$$

Para $t > 0$ se tiene una red *RL* simple en serie formada por R_2 y L, cuya constante de tiempo será:

$$\tau = \frac{L}{R_2} = \frac{2.2\ \text{mH}}{110\ \Omega} = 20\ \mu\text{s}$$

Así que, de acuerdo con la ecuación 4.10, la corriente $i_L(t)$ en la red R_2L será:

$$i_L(t) = I_o e^{-t/\tau} = 109.09\ \text{mA}(e^{-t/20\ \mu\text{s}})$$

Para $t = 40\ \mu s$:

La corriente en la red *RL*:

Si se sustituyen valores para cualquier instante $t > 0$, se tendrá intensidad de corriente en ese tiempo. Entonces, para $t = 40$ μs se tiene que $i_L(t)$:

$$i_L(40\ \mu s) = 109.09\ mA\ (e^{-40\ \mu s/20\ \mu s}) = 109.09\ mA\ (e^{-2})$$
$$i_L(40\ \mu s) = 14.759\ mA$$

En resumen, para $t = 40$ μs

$$i_L = 14.759\ mA, \qquad i_{R_2} = 14.759\ mA \qquad i_{R_1} = 0$$

4.2.2 Energía almacenada en un inductor

Ahora revisemos la manera de calcular la energía almacenada por el inductor, en forma de campo magnético. Esta energía se expresa en *joules*, y la potencia que es capaz de absorber se expresa en *watts*.

Hemos visto que cuando empieza a fluir una corriente a través de un inductor, de inductancia *L*, este flujo no se presenta de manera repentina, sino que tiene un comportamiento de tipo exponencial, variando desde cero hasta un valor estable. O bien, en el caso contrario, cuando un inductor se está desenergizando también induce una corriente con variación exponencial, desde un valor máximo hasta un valor cero. Cuando el valor de la corriente varía, también varía su campo magnético; si la corriente se estabiliza, también lo hace el campo. Cuando el campo magnético se estabiliza almacena un valor estacionario de energía, cuya magnitud se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$w = \frac{1}{2} Li^2 \qquad \text{(ecuación 4.11)}$$

Donde *i* es el valor de la corriente (en amperes) a través de la inductancia, *w* es la energía (en joules) almacenada por el inductor. Esta energía almacenada es devuelta al circuito cuando la fuente de corriente se suprime.

EJEMPLO 4.4

Traza una gráfica del comportamiento de la energía almacenada por el inductor de 2.2 mH de la figura 4.11 para $t \geq 0$. ¿Cuánto vale la energía en joules en el inductor para los tiempos $t_0 = 0$, $t_2 = 20$ μs y $t_3 = 40$ μs?

Solución
Datos:

$L = 2.2$ mH

Puesto que el problema plantea incógnitas acerca del mismo circuito *RL* del ejemplo 4.3, los datos obtenidos en ese ejemplo sirven como

punto de partida para el planteamiento y solución del problema que ahora nos ocupa. Esto es:

$I_o = 0.10909$ A
$\tau = 20\mu s$

Las incógnitas del problema son:

Conocer el modelo gráfico del comportamiento de la energía almacenada en el inductor y, de manera particular, los valores para $w(0)$, $w(20\ \mu s)$, $w(40\ \mu s)$.

Planteamiento:

Para conocer la energía almacenada en la inductancia para cada uno de los tiempos especificados, basta con utilizar la ecuación 4.11, sustituir los valores de i que se obtienen y, a su vez, utilizar la ecuación 4.10, con los datos del ejemplo 4.3. A partir de estos resultados se puede construir una tabla de valores, tabla 4.4, y de ésta se elabora la gráfica buscada; y de manera particular la energía para los tiempos $t_0 = 0$, $t_2 = 20\ \mu s$, $t_3 = 40\ \mu s$.

Desarrollo:

La intensidad de corriente para los tiempos 1τ, 2τ, 3τ, 4τ y 5τ, se calcula mediante la ecuación 4.10. Con estos valores se estructuran las dos primeras columnas de la tabla 4.4, y a partir de ellas, aplicando la ecuación 4.11, se completa la última columna de la derecha en la misma tabla. Se deja al lector realizar este ejercicio para la obtención de los valores de la tabla 4.3, que queda de la siguiente manera:

Tabla 4.3 Intensidad de corriente y energía almacenada en el inductor de la figura 4.11, del ejemplo 4.4, para diferentes tiempos expresados en función de la constante de tiempo τ.

tiempo (en función de τ)	$i(t)$ (amperes)	$w(t) = \frac{1}{2} Lt^2$ (joules)
0	0.10909	1.30906×10^{-5}
τ	0.04012	1.77057×10^{-6}
2τ	0.01475	2.3931×10^{-7}
3τ	0.005421	3.2325×10^{-8}
4τ	0.001996	4.3824×10^{-9}
5τ	0.0007396	6.01708×10^{-10}

Con los datos de la tabla 4.3 se construye una gráfica como la mostrada en la figura 4.12. En esta gráfica se observa cómo la energía almacenada en el inductor tiene un valor inicial de 1.30906×10^{-5} joules para $t = 0$; a partir de este valor la energía decae hasta el nivel de 6.01708×10^{-10} joules (prácticamente cero), para $t = 5\tau = 100\mu s$. Si comparamos esta gráfica de la energía almacenada, con la gráfica de la corriente en un inductor (figura 4.10) se observa la correspondencia entre ambas curvas.

Ahora se puede concluir que la energía almacenada en un inductor debido a un campo magnético previamente inducido, se transfiere en forma de corriente eléctrica al resistor asociado, variando esta corriente, desde un valor inicial I_o, hasta un valor de aproximadamente cero, en forma exponencial también, y en un periodo cuya duración es de aproximadamente 5τ.

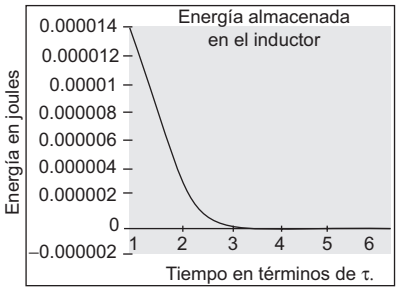


Figura 4.12 Gráfica del comportamiento de la energía almacenada en el inductor del ejemplo 4.4.

4.3 Capacitancia

El *capacitor* es un dispositivo que almacena energía en un campo electrostático, en forma de carga eléctrica. Físicamente consiste en un par de placas conductoras paralelas separadas por un dieléctrico o aislante. Cada una de estas placas tiene la capacidad para adquirir una cierta cantidad de carga eléctrica q, cuando sus terminales son conectadas a una diferencia de potencial eléctrico o voltaje V. Una de las placas se cargará con $+q$ y la otra con $-q$; es decir recibirán la misma cantidad de energía eléctrica en forma de carga, pero de signos opuestos, figura 4.13. En estas condiciones se presentará una diferencia de potencial entre las placas.

Existe una relación directamente *proporcional* entre la magnitud de la carga q en un capacitor y la diferencia de potencial V entre sus placas, que se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$q \propto V$$

Esta relación se modela como una *ecuación*, agregando una constante de proporcionalidad C, para obtener:

$$q = CV \qquad \text{(ecuación 4.12)}$$

donde C es la *capacitancia* del capacitor.

La *capacitancia* es una constante de proporcionalidad, que depende de las formas, dimensiones y posiciones relativas de las placas del capacitor, así como del material dieléctrico que se coloca entre las placas.

La unidad de medida para la capacitancia en el Sistema Internacional es el *farad* (F), cuya equivalencia se puede deducir haciendo un análisis dimensional de las variables que intervienen en la ecuación 4.12.

$$1 \text{ farad} = 1 \text{ coulomb/volt.} \quad \rightarrow \quad 1\ F = 1 \text{ coulomb/V}$$

Esta unidad recibe su nombre en honor del científico británico Michael Faraday. Los submúltiplos del *farad* más usados en circuitos electróni-

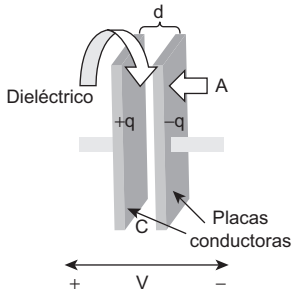


Figura 4.13 Representación de un capacitor de capacitancia *C*. Al aplicarle una diferencia de potencial *V* entre placas, éstas adquieren carga eléctrica de $+q$ y $-q$, respectivamente.

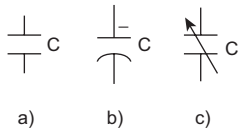


Figura 4.14 Representación simbólica de capacitores. *a*) De valor fijo sin polaridad. *b*) De valor fijo con polaridad definida. *c*) De valor variable.

cos son el *milifarad* (1 mF = 10^{-3} F), *nanofarad* (1 nF = 1×10^{-9} Farads), *microfarad* (1 μF = 10^{-6} F), *picofarad* (1 pF = 10^{-12} F) y el *femtofarad* (1 *f* F = 10^{-15} F).

En términos simbólicos un capacitor se representa como aparece en la figura 4.14. Así los reconocerás en los diagramas que se utilizan para el análisis de los circuitos eléctricos y electrónicos.

4.3.1 Carga de un capacitor

La carga que adquiere un capacitor en sus placas es un proceso de muy corta duración, que se lleva a efecto de la siguiente forma:

Si se conectan las terminales de un capacitor a las terminales de una fuente de voltaje de cd, como se muestra en la figura 4.15*a*, el polo positivo de la fuente ejerce una fuerza de atracción hacia los electrones de valencia de la superficie de la placa conductora conectada a él, imprimiéndoles energía adicional que les permite pasar de la banda de valencia a la banda de conducción, convirtiéndolos en electrones libres capaces de escapar no sólo de su átomo padre, sino también del cuerpo del que forman parte, la placa. Estos electrones libres, atraídos por el polo positivo de la fuente viajan a través del conductor que conecta dicha terminal con la placa hasta que ingresan a la fuente. Cada uno de estos electrones libres que abandonan la placa deja detrás de sí un hueco, un déficit de carga negativa, o bien, un excedente de carga positiva (+).

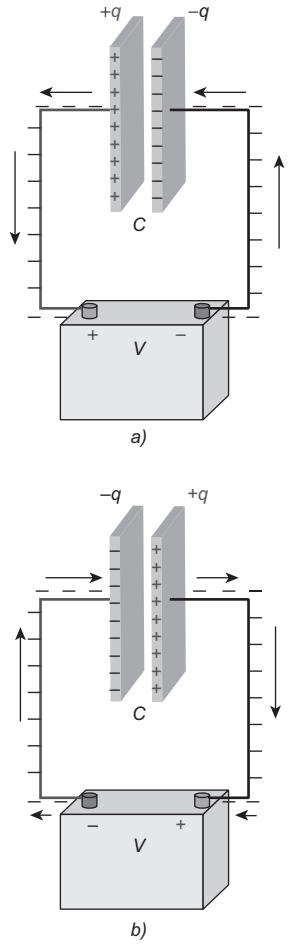


Figura 4.15 Representación del proceso de carga de un capacitor cuando se conecta a una fuente de alimentación.

De esta manera la placa del lado izquierdo en la figura 4.15*a* queda con déficit de electrones, o exceso de huecos que equivalen a una carga total positiva que se puede representar por +*q*. Al mismo tiempo, las cargas concentradas en el polo negativo de la fuente, que son electrones, abandonan la fuente, debido a la fuerza electromotriz o diferencia de potencial eléctrico, a través del conductor que conecta a este polo con la placa del lado derecho de la figura 4.15*a*. Estos electrones, reciben a su vez una atracción de parte de la carga total +*q* y del potencial positivo que existe en la placa opuesta. De esta manera la placa del lado derecho va recibiendo electrones libres que se depositan en su cuerpo, resultando en un cúmulo de cargas negativas en exceso, o bien una carga total equivalente que se representa por –*q*.

El proceso de carga de cada una de las placas del capacitor lleva implícito un flujo de electrones a través de los conductores que contactan a las placas con la fuente. En la figura 4.15*a* esta corriente se ha simbolizado mediante flechas; las cargas provienen de la fuente desde su polo negativo, e ingresan en ella a través de su borne positivo. Este es el sentido real de la corriente (electrones en movimiento de menos a más).

Una vez que las placas se encuentran cargadas eléctricamente, se presenta una saturación de electrones del lado derecho, y de huecos del lado izquierdo. Las cargas no pueden viajar a través del dieléctrico entre placas, por lo cual la corriente cesa al momento en que las placas adquieren su carga máxima, de acuerdo con su capacidad de almacenaje o *capacitancia*. Es así que el capacitor ha resultado cargado con una

cantidad de carga dada por la ecuación 4.12 y la corriente cesa; de ahí que el capacitor tiene un comportamiento de *circuito abierto* en cd.

Si de alguna manera se cambia la polaridad de la fuente de alimentación, como muestra la figura 4.15*b*, se presentará el fenómeno inverso, iniciando con un proceso de descarga de ambas placas, para pasar por un estado de neutralidad eléctrica y tomar luego carga con signo contrario cada una. Ahora quedará con carga $-q$ la placa del lado izquierdo y con carga $+q$ la del lado derecho. Observa que de nuevo hubo un flujo de cargas, pero en sentido contrario.

Si el fenómeno se repite y se cambia nuevamente la polaridad, se presentará otra vez el proceso de descarga de un signo para adquirir carga del signo contrario y habrá una corriente que va primero en un sentido y luego en el contrario; lo que equivale al fenómeno producido por una fuente de alimentación de corriente alterna (ca). Esto significa que el capacitor, contrariamente a lo que sucede en cd, permite el paso de la corriente eléctrica cuando se conecta a ca.

EJEMPLO 4.5

Calcula el número N de electrones en exceso que habrá en la placa negativa de un capacitor integrado a un microprocesador, cuya capacitancia es de 45 f F a un voltaje entre placas de 5V.

Solución

Datos:

$C = 45\,f\,\text{F} = 45 \times 10^{-15}\ \text{F}$
$V = 5$ volts
1 coulomb $= 6.23 \times 10^{18}\ e$
$N = ?$ electrones

Planteamiento:

Con la ecuación 4.12 se calcula la carga eléctrica total, $\boldsymbol{q}$, contenida en el capacitor en coulombs. Después se puede hacer la conversión de unidades, de coulombs a electrones. La carga neta encontrada $\boldsymbol{q = Ne}$ será la misma en magnitud en ambas placas, sólo que en una será de signo positivo y en la otra negativo. Esta última es la que tendrá un excedente de electrones que es la incógnita por determinar.

Desarrollo:

Al sustituir datos en la ecuación 4.12, se tiene:

$$q = CV = (45 \times 10^{-15}\ \text{F})\ (5\ \text{volts}) = 2.25 \times 10^{-13}\ \text{coulombs}$$

Transforma la unidad coulombs a e:

$$q = (2.25 \times 10^{-13}\ \text{coulombs})(6.23 \times 10^{18}\ e)$$

$$q = 1\,401\,750\ e \cong 1.4 \times 10^{6}\ e$$

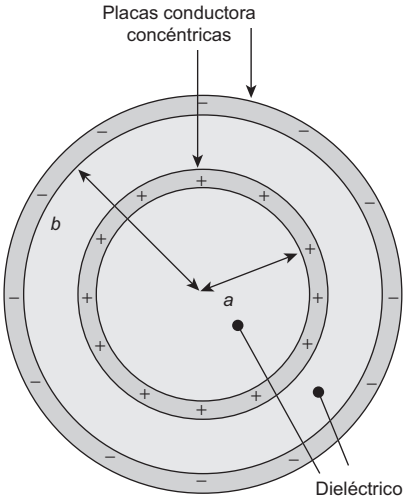


Figura 4.16 Sección transversal de un Capacitor cilíndrico de longitud *L*, donde *a* es el radio de la placa interna y *b* es el radio de la placa externa.

La capacitancia de un capacitor se calcula en función de los factores geométricos que definen su forma y tamaño. Como pueden encontrarse capacitores de placas paralelas y planas (figura 4.13), también los puede haber de forma cilíndrica o esférica, figura 4.16, entre los más comunes. La ecuación que permite hacer el cálculo de la capacitancia se da en la tabla 4.4.[3]

Tabla 4.4 Ecuaciones que se usan para calcular la capacitancia de un capacitor, según su forma geométrica.

	Tipo de capacitor		
	De placas paralelas	**Cilíndrico**	**Esférico**
Su capacitancia se calcula →	$C = \varepsilon \frac{A}{d}$	$C = 2\pi\varepsilon \frac{L}{ln(b/a)}$	$C = 2\pi\varepsilon \frac{ab}{b-a}$

Para la tabla 4.4:

ε = Permitividad de un dieléctrico en particular, expresada en Farad/metro (F/m).
ε_o = Constante de permitividad en el vacío = $8.854 = 10^{-12}$ C^2/Nm^2 o F/m (coulomb^2/Newton·metro^2 o Farad/metro).
$\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_o$ = Permitividad relativa del material entre placas (adimensional). También conocida como constante dieléctrica (K).
A = Área de cada una de las placas paralelas, expresada en metros cuadrados (m^2).
d = Distancia entre placas paralelas, expresada en metros (m).
L = Longitud de un capacitor cilíndrico, expresada en metros (m).
a = Longitud del radio de la placa conductora interna en un capacitor cilíndrico o esférico, expresada en metros (m).
b = Longitud del radio de la placa conductora externa en un capacitor cilíndrico o esférico, expresada en metros (m).

Al comparar las ecuaciones dadas en la tabla 4.4 se observa que C es una magnitud que se expresa siempre como cantidad que depende, tanto de una dimensión de longitud, como de factores geométricos, como área o distancia; y determina la capacidad del dispositivo, en farads, para almacenar energía en forma de carga eléctrica.

4.3.2 Permitividad en los materiales

La propiedad de un material que determina la intensidad del campo eléctrico producido por una distribución de cargas eléctricas se denomina *permitividad*. Se representa por el símbolo ε, y se define a partir de la ecuación $F = q_1 q_2 / 4\pi\varepsilon r^2$, donde F es la fuerza electrostática que actúa entre dos cargas puntuales q_1 y q_2 separadas por una distancia r, y ε es la permitividad

[3] El desarrollo matemático para la deducción de estas ecuaciones puede verse en un texto que trate de manera particular temas de electricidad y magnetismo.

del medio que las contiene. En el Sistema Internacional de unidades, la permitividad se expresa en *farad/metro*. En el vacío el valor de ε resulta ser de 8.854×10^{-12} F/m, cantidad que se denota por el símbolo ε_0.

En lugar de indicar los diferentes valores de permitividad de todas las sustancias mediante números poco manejables como el anterior, es normal indicar su valor de permitividad relativa, ε_r, de modo que la permitividad absoluta de cualquier sustancia se obtiene al multiplicar la permitividad del vacío por su permitividad relativa: $\varepsilon = \varepsilon_0 (\varepsilon_r)$. La permitividad relativa es un número sin unidades, anteriormente conocido como constante dieléctrica *K*. Por ejemplo, la permitividad relativa del polietileno (un tipo de plástico) es de 2.3 (sin unidades), lo que significa que la fuerza de atracción electrostática entre objetos cargados separados por polietileno es menor en un factor de 2.5 que la existente en el vacío.

EJEMPLO 4.6

¿Cuál será la capacitancia que posee por unidad de longitud un cable coaxial cuyo radio interior es 0.12 mm y su radio exterior es 1.8 mm, y el material dieléctrico es el vacío?

Solución

Datos:

$$a = 0.12 \text{ mm}$$
$$b = 1.8 \text{ mm}$$
$$\varepsilon_o = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

Planteamiento:

El cable coaxial equivale a un capacitor de forma cilíndrica; por tanto su capacitancia se calcula con la ecuación (consulta la tabla 4.4):

$$C = 2\pi\varepsilon \frac{L}{\ln(b/a)}$$

Como no se especifica una longitud *L* determinada, sino que se pide la capacitancia por unidad de longitud, la ecuación se transforma en

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln(b/a)}$$

Expresión que proporcionará unidades de capacitancia por unidades de longitud.

Desarrollo:

Al sustituir datos en la expresión obtenida se llegará al siguiente resultado:

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi(8.853 \times 10^{-12} \text{ F/m})}{\ln(1.8 \text{ mm}/0.12 \text{ mm})} = 20.53 \text{ } p\text{F/m}$$

Este resultado indica que el cable tiene una capacidad de 20.53 *p*F (20.53×10^{-12} F) por cada metro de longitud que se considere.

4.3.3 Dieléctricos en los capacitores

Un dieléctrico es un material no conductor que se coloca entre las placas de un capacitor para modificar el valor de su capacitancia. A partir de un capacitor formado por dos placas paralelas, de iguales dimensiones y separadas una cierta distancia d, se pueden obtener diferentes valores de capacitancia con tan solo cambiar el material dieléctrico que se coloca entre las placas.

Esta forma de modificar la capacitancia en un capacitor se puede apreciar en las ecuaciones incluidas en la tabla 4.4, donde C es directamente proporcional al valor de la permitividad ε del material entre placas, cualquiera que sea su diseño geométrico.

Los materiales dieléctricos más utilizados en capacitores comunes son (además del vacío), el aire, polietileno, papel con parafina, mica, película de óxido, cerámica. Cada uno tiene un valor distinto de permitividad ε, tabla 4.5, que al relacionarla con la permitividad del vacío ε_0, da el valor de la permitividad relativa ε_r:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} \qquad \text{(ecuación 4.13)}$$

Tabla 4.5 Valores de permitividad y rigidez dieléctrica para diferentes materiales.

Dieléctrico	Permitividad ε (F/m)	$\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_o$ (adimensional)	Rigidez dieléctrica (θ) (V/cm)
Vacío	8.854×10^{-12}	1.0	
Aire	8.859×10^{-12}	1.0006	3×10^4
Polietileno	2.213×10^{-11}	2.5	6×10^5
Papel con parafina	3.541×10^{-11}	4.0	5×10^5
Mica	4.427×10^{-11}	5.0	2×10^6
Película de óxido	2.213×10^{-11} a 2.213×10^{-10}	De 5 a 25	
Cerámica (bajas pérdidas)	7.083×10^{-11}	8.0	8×10^4
Cerámica (con ε_r alta)	8.854×10^{-10} a 8.854×10^{-9}	De 100 a 1000	
Agua	7.083×10^{-10}	80	

La eficacia de los dieléctricos se mide por su capacidad relativa de almacenar energía y se expresa en términos de una constante dieléctrica (también denominada permitividad relativa), tomando como unidad el valor del vacío. Los valores de esa constante varían desde aproximadamente 1 en la atmósfera hasta 100 o más en ciertas cerámicas que contienen óxido de titanio. Sustancias de uso común, como el vidrio, la mica, la porcelana y los aceites minerales, a menudo se utilizan como dieléctricos, y su constante dieléctrica o permitividad relativa tiene valores entre 2 y 9.

La capacidad de un dieléctrico para soportar campos eléctricos sin romperse y sin perder sus propiedades aislantes se denomina *resistencia de aislamiento* o *rigidez dieléctrica* (θ) y se expresa en volts/cm. Un buen dieléctrico debe devolver un gran porcentaje de la energía que almacena, cuando se invierte el campo productor de esa energía. Los dieléctricos se utilizan en todas las ramas de la ingeniería eléctrica para aumentar la eficacia de los capacitores; especialmente los que tienen constantes dieléctricas altas.

EJEMPLO 4.7

Para el cable coaxial del ejemplo 4.5, halla el valor de su capacitancia si entre placas usara como dieléctrico *a*) polietileno, *b*) papel con parafina.

Solución

Datos:

$a = 0.12$ mm
$b = 1.8$ mm
$\varepsilon_o = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m
$\varepsilon_{(polietileno)} = 2.213 \times 10^{-11}$ F/m
$\varepsilon_{(papel)} = 3.541 \times 10^{-11}$ F/m

Planteamiento:

Se trata del mismo planteamiento que en el ejemplo 4.5, sólo que ahora el dieléctrico entre placas no es el vacío, por tanto, la ecuación que se utiliza es la misma, sólo que en lugar de ε_o, se utilizará: *a*) $\varepsilon_{(\text{polietileno})}$ y *b*) $\varepsilon_{(\text{papel})}$:

La ecuación será:

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$$

Desarrollo:

a) Para el dieléctrico polietileno se tiene:

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi(2.213 \times 10^{-11})}{\ln(1.8\text{ mm}/0.12\text{ mm})} = 51.34 \times 10^{-12}\text{ F/m} \rightarrow 51.34\text{ pF/m}$$

b) Para el dieléctrico papel con parafina se tiene:

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi(3.541 \times 10^{-11})}{\ln(1.8\text{ mm}/0.12\text{ mm})} = 82.15 \times 10^{-12}\text{ F/m} \rightarrow 82.15\text{ pF/m}$$

Para el caso del cable coaxial del ejemplo 4.5 se ha modificado su capacitancia por unidad de longitud al haber cambiado el dieléctrico entre placas (es decir entre el cable central y la malla que le rodea). Se aumentó el valor del dieléctrico en dos ocasiones, pasando de vacío a polietileno y luego a papel con parafina y el valor de la capacitancia también se incrementó en dos ocasiones.

4.3.4 Energía que almacena un capacitor

En el proceso de carga de un capacitor, al aplicar una diferencia de potencial entre placas del dispositivo, los electrones fluyen desde una placa y se acumulan en la otra, ambas placas adquieren una carga total q (negativa en una placa y positiva en la otra), según la ecuación 4.12. Una vez que se carga, el capacitor puede quedar desconectado de la fuente de voltaje (diferencia de potencial) y la carga se guarda, almacenada en la superficie de las placas.

El paso de las cargas de una placa a otra requiere de un consumo de energía, ya que las cargas negativas acumuladas en la placa negativa ejercen una fuerza de repulsión sobre cualquier carga adicional que trate de incorporarse a esta placa; es decir, realizan un trabajo en contra de la fuerza de repulsión que aparece entre cargas del mismo signo. La energía que se requiere para hacer este trabajo se almacena como energía potencial en forma de campo eléctrico entre placas, y se puede recuperar dejando que el capacitor se descargue. La energía almacenada se calcula mediante la siguiente expresión:

$$w = \tfrac{1}{2}Cv^2 \qquad \text{(ecuación 4.14)}$$

donde w es la energía expresada en joules, C es la capacitancia, expresada en farads y v es la diferencia de potencial entre las placas del capacitor, expresada en volts.

EJEMPLO 4.8

¿Cuál será la energía expresada en joules que almacena el capacitor del ejemplo 4.4?

Solución
Datos:

$C = 45\,f\text{ F}$
$v = 5\text{ V}$

Planteamiento:

Los datos con los que se cuenta permiten hacer una sustitución directamente en la ecuación 4.13 para obtener la energía buscada.

Desarrollo:

Al sustituir valores en la ecuación 4.13 se tiene:

$$w = \tfrac{1}{2}(45 \times 10^{-15}\ \text{F})(5\text{V})^2 = 5.625 \times 10^{-13}\ \text{J}.$$

$$w = 5.625 \times 10^{-13}\ \text{J}$$

4.3.5 Tipos de capacitores

Los capacitores se construyen con diversos materiales, siendo de mayor uso los de mica, de cerámica, de película de plástico y los electrolíticos, figura 4.17. Se elaboran con diferentes valores en su capacitancia y soportan distintos voltajes entre sus terminales.



Figura 4.17 Tipos más comunes de capacitores, según su material de fabricación.

Es recomendable que siempre que utilices un capacitor, verifiques no sólo la capacitancia, sino el tipo de capacitor requerido y el voltaje para el cual fue fabricado. Aplicar un voltaje superior al que es capaz de soportar el capacitor puede provocar un arco eléctrico entre sus placas y la consecuente perforación del dieléctrico, ocasionando una falla permanente en el dispositivo.

Como medida de protección para el experimentador y para el dispositivo, debes evitar la práctica de unir sus terminales para provocar la descarga del capacitor, ya que si desconoces la magnitud de la energía acumulada, ésta puede ser tan grande que ponga en riesgo tu seguridad e integridad física.

4.3.6 Arreglos de capacitores

Así como se estructuran arreglos con elementos resistivos y con elementos inductivos, también se pueden conectar dos o más capacitores para modificar de alguna manera la capacitancia efectiva en alguna rama de una red. El conjunto de capacitancias individuales acopladas da por resultado una *capacitancia total equivalente*. Se dice que es equivalente por que llega a sustituir al arreglo de varios capacitores sin que se altere su efecto sobre el resto del circuito.

Cuando se hace el análisis de algún circuito, en ocasiones es deseable conocer la *capacitancia equivalente* de un arreglo de capacitores.

Al conectar dos o más capacitores se pueden formar arreglos en serie o en paralelo, cuya capacitancia equivalente se puede obtener en cada caso, de la siguiente manera:

4.3.6.1 Arreglo de capacitores en serie

La figura 4.18 representa un grupo de n capacitores con capacitancias $C_1, C_2, \ldots C_n$, formando un arreglo capacitivo tipo serie. Al conectar una

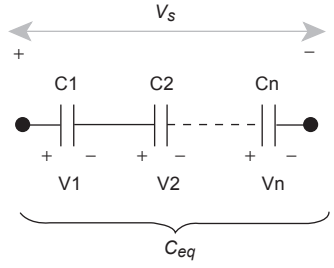


Figura 4.18 Arreglo de capacitores $C_1, C_2, \ldots C_n$ conectados en serie.

fuente de voltaje V_s entre los extremos A y B de este arreglo, se formará una red en la cual también se cumple la ley de Kirchhoff de voltajes. Si el voltaje en el capacitor C_1 es V_1, en el C_2 es V_2, etcétera, se tendrá que la suma de todos los voltajes individuales en los capacitores será igual al valor de V_s. Esto es:

$$V_s = V_1 + V_2 + \ldots + V_n \qquad \text{(ecuación 4.15)}$$

Un arreglo en serie se caracteriza por tener la propiedad de que la carga q entregada a cada elemento tiene el mismo valor en cada uno de ellos, de acuerdo con la ecuación 4.12, el voltaje en cada capacitor será:

$$V_1 = \frac{q}{C_1} \qquad V_2 = \frac{q}{C_2} \qquad V_n = \frac{q}{C_n} \qquad \text{(ecuación 4.16)}$$

Si se quiere conocer la capacitancia equivalente C_{eq} que sustituya a la red en los puntos A-B, ésta sería tal que en sus placas se depositaría exactamente la misma cantidad de carga q, bajo una diferencia de potencial de valor V_s. Por tanto:

$$V_s = \frac{q}{C_{eq}} \qquad \text{(ecuación 4.17)}$$

Al sustituir las expresiones 4.16 y 4.17 en la ecuación 4.15 se tendrá que:

Entonces:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C$$

A partir de la ecuación 4.18 puede calcularse el valor de la capacitancia equivalente del arreglo. En esta ecuación se observa que la capacitancia equivalente del arreglo tipo serie siempre es de menor valor que cualquiera de las capacitancias individuales del conjunto.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} \qquad \text{(ecuación 4.18)}$$

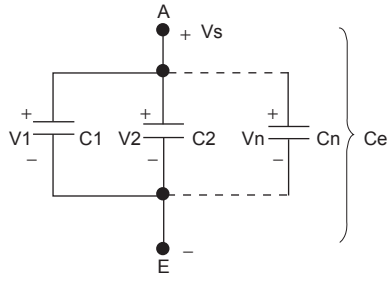


Figura 4.19 Arreglo de n capacitores conectados en paralelo. Entre puntos *A* y *B* se tiene una capacitancia equivalente *Ceq*.

4.3.6.2 Arreglo de capacitores en paralelo

La figura 4.19 muestra un arreglo de n capacitores con capacitancias C_1, C_2,... C_n, conectados en paralelo. Al incluir una fuente de voltaje V_s en los extremos A, B de este arreglo, se formará una red en la cual, para ir del punto A al punto B, puede ser por cualquiera de las trayectorias paralelas, cada una de las cuales contiene sólo uno de los elementos en paralelo. Observa que en cada capacitor aparece la misma diferencia de potencial V_s. También que la carga eléctrica total que entrega la fuente de voltaje se encuentra repartida entre los

elementos del arreglo. La carga en cada capacitor, según la ecuación 4.12 se obtiene:

$$q_1 = C_1\, V, \quad q_2 = C_2\, V, \quad q_n = C_n\, V \qquad \text{(ecuaciones 4.19)}$$

Entonces, aplicando las ecuaciones 4.19 y según las reflexiones anteriores en torno al diagrama de la figura 4.19 se puede expresar que

$$q = q_1 + q_2 + ... + q_n \qquad \text{(ecuación 4.20)}$$

Si se quiere conocer la capacitancia equivalente C_{eq} que sustituya a la red en los puntos *A*-*B*, ésta sería tal que en sus placas se depositaría exactamente la misma cantidad de carga *q*, bajo una diferencia de potencial de valor V_s. Por tanto:

$$q = C_{eq}\, V \qquad \text{(ecuación 4.21)}$$

Al sustituir la expresión 4.21 en la ecuación 4.20 se tendrá que:

$$q_1 + q_2 + ... + q_n = C_{eq}\, V$$

Y tomando las ecuaciones 4.19 para sustituirlas en esta última expresión se tendrá:

$$C_{eq}\, V = C_1\, V + C_2\, V + ...+ C_n\, V \qquad \text{(ecuación 4.22)}$$

Entonces:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + ...+ C_n \qquad \text{(ecuación 4.23)}$$

Puede verse en la ecuación 4.23 que la capacitancia equivalente de la combinación en paralelo siempre es mayor que cualquiera de las capacitancias individuales del arreglo.

EJEMPLO 4.9

¿Cuál será la capacitancia equivalente entre los puntos *A* y *B* del arreglo capacitivo mostrado en la figura 4.20?

Solución
Datos:

$$C_1 = 50\ \mu\text{F}, \quad C_2 = 100\ \mu\text{F}, \quad C_3 = 10\ \mu\text{F}, \quad C_4 = 250\ \mu\text{F}, \quad C_5 = 40\ \mu\text{F}$$

Planteamiento:

En la figura 4.20 se tiene un arreglo capacitivo en el cual se distingue que C_2, C_3 y C_4 están conectados en paralelo; se pueden sustituir por una capacitancia equivalente, C_{234}. Esta capacitancia quedará conectada en

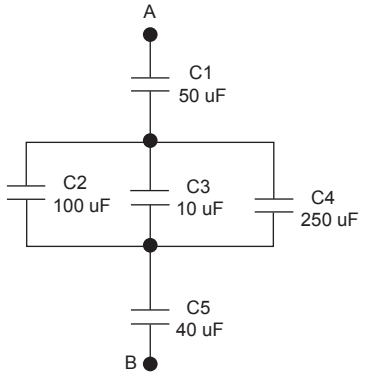


Figura 4.20 Arreglo capacitivo mixto con capacitancia equivalente C_{AB} para el ejemplo 4.9.

serie con los capacitores C_1 y C_5. Se puede tener finalmente la capacitancia total equivalente C_{AB}.

Desarrollo:

Cálculo de C_{234}:

$$C_{234} = C_2 + C_3 + C_4 = 100\ \mu F + 10\ \mu F = 250\ \mu F$$
$$C_{234} = 360\ \mu F$$

Cálculo de C_{AB}:

$$1/C_{AB} = 1/\ C_1 + 1/C_{234} + 1/C_5$$
$$1/C_{AB} = 1/50\ \mu F + 1/360\ \mu F = 1/40\ \mu F$$
$$C_{AB} = 20.93\ \mu F$$

EJEMPLO 4.10

Para la red mostrada en la figura 4.20, calcula la carga eléctrica depositada en cada uno de los capacitores, si se conecta una fuente de 12V entre los puntos *A* y *B* de la red.

Solución
Datos:

En el ejemplo 4.8, que se refiere al mismo arreglo, se encontró que:

$$C_1 = 50\ \mu F,\ \ C_2 = 100\ \mu F,\ \ C_3 = 10\ \mu F,\ \ C_4 = 250\ \mu F,\ \ C_5 = 40\ \mu F,$$
$$C_{234} = 360\ \mu F,\ \ C_{AB} = 20.93\ \mu F$$

Planteamiento:

Un arreglo en serie se caracteriza por tener la propiedad de que la carga ***q*** entregada a cada elemento tiene el mismo valor en cada uno de ellos; o sea que (ecuaciones 4.19), la carga en cada capacitor será:

$$q_n = C_n\ V$$

Con base los resultados obtenidos en el ejemplo 4.8:

Como se tiene un arreglo en serie formado por C_1, C_5 y C_{234}, cada una de estas capacitancias tendrá la misma carga, que su equivalente C_{AB}. Entonces puedes iniciar por calcular la carga en esta última capacitancia equivalente. Una vez calculada la carga contenida en C_{AB} tendrás por consecuencia la carga en C_{234}, de la cual sabes que, a su vez, es una capacitancia equivalente de los capacitores C_2, C_3 y C_4, conectados en paralelo, los cuales están compartiendo la carga contenida en su equivalente C_{234} y tienen el mismo voltaje en sus terminales.

Desarrollo:

Cálculo de la carga eléctrica en C_{AB}.

$$q_{AB} = C_{AB}\, V = (20.93\ \mu\text{F})(12\ \text{V})$$
$$q_{AB} = 2.511 \times 10^{-4}\ \text{C.} = 251.1\ \mu\ \text{C}$$

Por tanto C_1, C_5 y C_{234} que están en serie, tendrán la misma carga de 251.1 μC.

Cálculo de la carga en C_2, C_3 y C_4:

Estas tres capacitancias están en paralelo, por tanto, $V_2 = V_3 = V_4 = V_{234}$, así calculando primeramente el voltaje V_{234}:

$$V_{234} = V_S - V_1 - V_5 = 12\ \text{V} - q_1/C_1 - q_5/C_5$$
$$V_{234} = 12\ \text{V} - 251.1\ \mu\text{C} / 50\ \mu\text{F} - 251.1\ \mu\text{C}/40\ \mu\text{F}$$
$$V_{234} = 12\ \text{V} - 11.299\ \text{V} = 0.701\text{V}$$

Por tanto:

$$q_2 = C_2\, V_2 = (100\ \mu\text{F})\ (0.701\ \text{V}) = 70.1\ \mu\text{C}$$
$$q_3 = C_3\, V_3 = (10\ \mu\text{F})\ (0.701\ \text{V}) = 7.01\ \mu\text{C}$$
$$q_4 = C_4\, V_4 = (250\ \mu F)\ (0.701\ \text{V}) = 175.25\ \mu\text{C}$$

4.4 Circuito *RC* simple

COMPETENCIAS:

- Comprender cómo es la respuesta de un circuito *RC* simple al asociarse a una fuente de alimentación. [1]
- Comprender el concepto *constante de tiempo* en un circuito *RC* simple. [1]

Al igual que un circuito *RL*, cuando se asocia una resistencia con una capacitancia, como se ve en la figura 4.21, se obtiene un arreglo al que se le da el nombre de *circuito RC simple*. También tiene la característica de no estar conectado a una fuente de alimentación, aunque pudo haberlo estado en un tiempo anterior. De una manera similar a como se trató el circuito *RL simple*, se hará el análisis de un circuito *RC simple*.

La figura 4.21 muestra un circuito de este tipo, en el cual los dos elementos, resistor y capacitor están conectados en paralelo (existe el mismo voltaje en sus terminales). En este arreglo no se tiene fuente de alimentación alguna, sin embargo, existe una intensidad de corriente $i(t)$ circulando, debido a una energía almacenada en el capacitor; lo que indica que en algún instante anterior, éste estuvo alimentado por alguna fuente externa y que ahora ya no está presente; por tanto, si vamos a considerar que éste tiene cierta energía almacenada, en forma de carga eléctrica, se puede inducir que la fuente que lo estuvo alimentando le proporcionó esa carga. Observa que en este circuito la intensidad de corriente es la misma para los dos elementos, lo que nos hace pensar que estos elementos también están conectados en serie.

Entonces, el fenómeno que se presenta en el elemento de interés, el capacitor *C*, puede ser separado en dos etapas, como sigue:

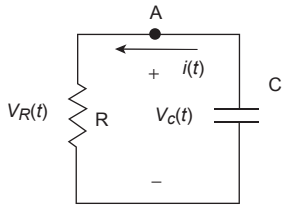


Figura 4.21 Circuito *RC* simple en el que circula una corriente *i*(*t*)

Primera etapa: comprende el período ($t < 0$) durante el cual el capacitor permaneció conectado a una fuente de alimentación, la cual le propor-

cionó un voltaje, que llamaremos $v_C(t)$, que se puede considerar un *voltaje inicial*, a cuyo valor se le denomina $v_C(0^-) = V_o$.

Segunda etapa: para todo tiempo $t > 0$ en el cual la red *RC* está desconectada de la fuente de alimentación y la única energía existente es la almacenada por el capacitor, en forma de carga eléctrica. Esto significa que en el tiempo $t = 0$ se presenta una transición en la cual la fuente se desconecta de la red.

Pongamos atención al fenómeno que se presenta posteriormente al instante en que se ha desconectado la red *RC* de esa fuente. Esto es, para todo $0 < t \leq t_{final}$. La interrogante ahora es ¿cómo es el voltaje en cada elemento de la red *RC* durante este periodo?

Puesto que se trata de un voltaje debido a una carga eléctrica almacenada en las placas del capacitor y que ahora se descarga sobre el resistor, esto dará por resultado una corriente variable en el tiempo, ya que la carga irá disminuyendo su valor en cada instante, y el voltaje entre placas también cambiará desde un valor inicial máximo, que podemos llamar V_o hasta su total descarga.

La corriente total en el nodo *A* de la figura 4.21, de acuerdo con la ley de Kirchhoff de corrientes, deberá ser cero:

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \qquad \text{(ecuación 4.24)}$$

La ecuación 4.24 es una ecuación de corrientes en el nodo *A*, cuya incógnita se da en término de voltajes, y es de la misma forma que la ecuación 4.6 de voltajes para una red *RL*, que se expresó con incógnita en términos de corrientes; así que puede dársele el mismo tratamiento matemático. Ahora, la incógnita en esta ecuación diferencial es el voltaje $v_C(t)$.

Al resolver para *v*, se tiene la expresión:

$$v_C(t) = V_o e^{-t/RC} \qquad \text{(ecuación 4.25)}$$

La ecuación 4.25 da el valor para $v_C(t)$. Para $t = 0$ se tiene un voltaje inicial V_o y a partir de este valor habrá una variación cuyo comportamiento es exponencial, con una constante en el exponente, dada por los valores de *R* y *C*, que son valores fijos; así que la variable independiente en la expresión es *t*. Se concluye que el voltaje varía en función del tiempo, desde un valor inicial $v_C(0^+) = V_o$ hasta su valor final de $v(\infty) = 0$.

A la relación *RC* se le denomina *constante de tiempo* del circuito *RC*, y se acostumbra representarla por la letra griega *tau* (τ). El tiempo que tarda el voltaje para pasar desde un valor de V_o hasta *cero* está en función directa con el valor de esta constante. En otras palabras, *tau* es el parámetro en tiempo respecto del cual se pueden conocer los valores de la relación $v_C(t)/V_o$ en un tiempo, *t*, determinado. Así que:

$$\tau = RC \qquad \text{(ecuación 4.26)}$$

Si se sustituye la ecuación 4.26 en la 4.25, se obtiene:

$$v_C(t) = V_o e^{+t/\tau} \qquad \text{(ecuación 4.27)}$$

En forma similar a como se hizo en el caso de la red *RL*, se puede hacer variar el tiempo *t* en la ecuación 4.27, de manera que adquiera los valores de $t_0 = 0$, $t_1 = \tau$, $t_2 = 2\tau$, $t_3 = 3\tau$, $t_4 = 4\tau$ y $t_5 = 5\tau$. Al sustituir estos valores para *t* en la ecuación 4.27, se obtienen valores para $v_C(t)$ (igual que para la corriente en el circuito *RL*) dados en la tabla 4.6:

Tabla 4.6 Valores que adquiere $v_C(t)$ respecto a un valor inicial V_0, en un circuito *RC*, con una constante de tiempo $\tau = RC$.

t	$v_C(t) = V_o e^{-t/\tau}$	$v(t)$ respecto a V_o
0	$v_C(t) = V_o e^0$	$v_C(t) = V_o$
τ	$v_C(t) = V_o e^{-1}$	$v_C(t) = 0.3678\ V_o$
2τ	$v_C(t) = V_o e^{-2}$	$v_C(t) = 0.1353\ V_o$
3τ	$v_C(t) = V_o e^{-3}$	$v_C(t) = 0.0497\ V_o$
4τ	$v_C(t) = V_o e^{-4}$	$v_C(t) = 0.0183\ V_o$
5τ	$v_C(t) = V_o e^{-5}$	$v_C(t) = 0.00678\ V_o$

También se puede graficar el comportamiento del voltaje en el capacitor, a partir de los datos contenidos en la tabla 4.6. Da por resultado una curva exponencial, figura 4.22, similar a la que se obtuvo para la corriente en el circuito *RL*.

Los datos de la tabla 4.6 y la gráfica de la figura 4.22 permiten ver que la carga almacenada en el capacitor, después de haber estado conectado a una fuente durante un tiempo $t < 0$, presenta una diferencia de potencial entre placas $v_C(t)$, que va decreciendo de manera exponencial y cuyo tiempo de duración es aproximadamente 5τ.

A partir de estos resultados matemáticos y gráficos puede conocerse el voltaje instantáneo que existe en un capacitor que está en proceso de descarga, para un instante *t*.

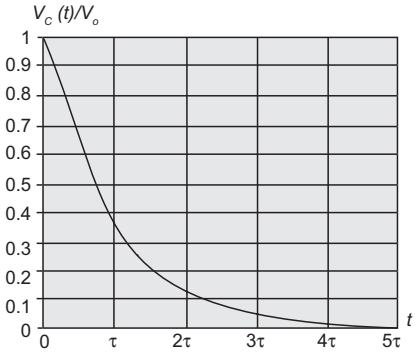


Figura 4.22 Comportamiento del voltaje $v_c(t)$ con respecto a su valor inicial V_o, en un circuito *RC* en serie. Éste decrece desde un valor máximo (V_o) hasta prácticamente cero en un intervalo de 5τ aproximadamente.

EJEMPLO 4.11

El circuito de la figura 4.23 contiene un interruptor que cambia de posición como lo indica la flecha, en el tiempo $t = 0$. Esto hará que la fuente V_s quede desconectada de la sección *RC*. Calcula $i(0^+)$ y $v_C(7\ \mu s)$.[4]

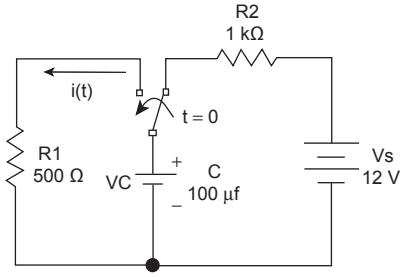


Figura 4.23 El interruptor cambia de posición en el tiempo $t - 0$, quedando desconectada la fuente V_S de la red *RC*. Ejemplo 4.11.

Solución
Datos:

$R_1 = 500\ \Omega$ $\quad i(0^+) = ?$
$R_2 = 1\ \text{k}\Omega$ $\quad v_C(7\ \mu s) = ?$
$C = 10\ \mu\text{F}$
$V_S = 12\ \text{V}$

[4] En términos infinitesimales, se considera al tiempo $t\ (0^+)$ al instante inmediatamente después del tiempo t = 0; $t\ (0^-)$ será el instante inmediatamente antes de $t = 0$.

Planteamiento:

Para el tiempo $t < 0$ existirá un voltaje de 12 volts cd entre placas del capacitor, puesto que es alimentado por la fuente de voltaje V_S. El capacitor se comporta como un circuito abierto, por tanto no hay corriente en ninguno de los puntos de la red, así que no hay caída de voltaje en R_2. Cuando el interruptor cambia de posición, la fuente de voltaje quedará en circuito abierto (desconectada), y del lado izquierdo del diagrama se estructura una red RC entre el capacitor y la resistencia R_1. A partir de $t(0^+)$ el capacitor inicia su descarga en R_1, dando por resultado una intensidad de corriente a través de la red RC y es cuando su voltaje entre placas tendrá un comportamiento como lo indica la ecuación 4.26. Entonces deberá calcularse la constante de tiempo τ de esta red.

Desarrollo:

Cálculo de la constante de tiempo:

$$\tau = RC = (500\ \Omega)\ (10 \times 10^{-6}\ \text{F})$$
$$\tau = 5\ \mu\text{s}$$

El voltaje en el capacitor está dado por $v_C(t) = V_o e^{-t/\tau}$. Donde $V_o = 12\text{V}$.

Para $t(0^+)$ la corriente que circula en la red RC se puede calcular considerando la ley de Ohm en la resistencia R_1, que está conectada en paralelo con el capacitor.

$$i(0^+) = \frac{V_o}{R1} = 12\ \text{V}/500\ \Omega$$
$$i(0^+) = 24\ \text{mA}$$

Para un tiempo $t = 7\ \mu$s, el voltaje en el capacitor será:

$$v_C(7\ \mu\text{s}) = V_o e^{-t/\tau} = (12\ \text{V})(e^{-\mu s 7/5\ \mu s})$$
$$v_C(7\ \mu\text{s}) = 2.959\ \text{V}$$

El resultado puede graficarse como se muestra en la figura 4.24.

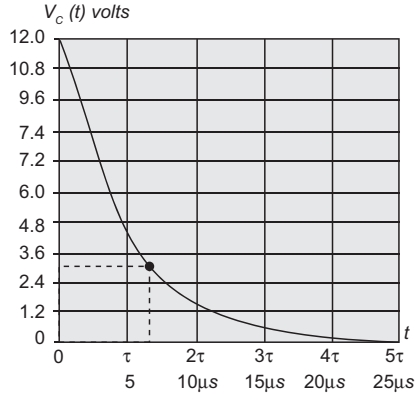


Figura 4.24 Comportamiento del voltaje $v_C(t)$ en el capacitor de la red del ejemplo 4.10. El punto rojo indica el voltaje de 2.959 volts en el dispositivo para un tiempo $t = 7\ \mu$s

4.5 Función escalón unitario

COMPETENCIA:
Describir a la función escalón unitario asociada a circuitos *RL* y *RC* simples. [1]

Los circuitos RL y RC considerados en las secciones anteriores se consideran simples, por contar sólo con un resistor y un inductor, o bien con un resistor y un capacitor, pero no tienen fuente de alimentación alguna. En la realidad nos encontramos con circuitos más complejos; sin embargo, un circuito que contiene más de un resistor y más de una bobina o más de un capacitor, pueden ser reducidos a un solo resistor y a una sola inductancia o capacitancia equivalentes, convirtiendo así el circuito complejo en uno simplificado como los estudiados, y se les podrá analizar como se ha visto hasta ahora.

Otra característica de los circuitos simples analizados, es que en ellos no hay fuentes o funciones de excitación presentes; la fuente que los alimentó previamente, se eliminó en un tiempo al que hemos llamado $t = 0$, para continuar con el estudio del circuito simple en el cual quedaba solamente una energía almacenada en el inductor o en el capacitor. A este proceso de desenergización del inductor, o bien del capacitor, sobre un resistor, se le llama *respuesta natural* del circuito *RL* (o *RC)* simple, porque su comportamiento sólo depende de la naturaleza del mismo circuito; es decir, de las características de *R*, de *L* o de *C*, según el caso, y de la energía *inicial* almacenada.

Esta sección trata el caso de circuitos *RL* o *RC* a los que se les aplica o deja de aplicar súbitamente alguna fuente de energía, de voltaje o de corriente de cd, situación que se presenta muchas veces en la ingeniería electrónica y de sistemas. Por ejemplo, cuando se trate de un generador de pulsos rectangulares de voltaje que se necesitan para representar un número o una instrucción en una computadora digital.

Al referirnos a la aplicación *súbita* de una fuente de energía, hablamos de una fuente que se conectará o se desconectará repentinamente en un instante dado, al que se le puede llamar *cero* (o bien, $t = 0$), como punto de referencia. Por ejemplo, si un dispositivo es alimentado por una batería (voltaje de cd) y entre estos dos elementos se tiene un interruptor conectado en serie, mientras el interruptor esté abierto no habrá transferencia de energía de la fuente al dispositivo. Si repentinamente el interruptor se cierra, la energía se transferirá al dispositivo, y esta transferencia permanecerá mientras el interruptor permanezca cerrado. Observa la figura 4.25. Veamos más detenidamente esta ejemplificación:

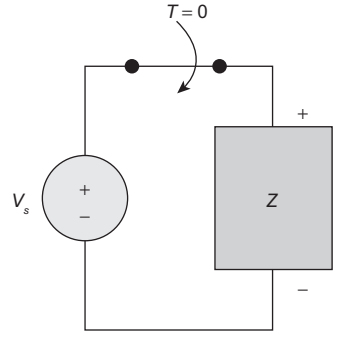


Figura 4.25 Diagrama a bloques de un dispositivo o sistema *Z* alimentado por una fuente V_S, con un interruptor en serie, que es cerrado en $t = 0$.

Si se considera que el interruptor se cierra en un tiempo $t = 0$, se dice que para todo tiempo $t < 0$, el interruptor está abierto, y el voltaje en el dispositivo será cero; y para todo tiempo $t > 0$, después de que el interruptor cierra el circuito, el dispositivo recibirá el voltaje que le proporcione la fuente. Esto se ilustra en la figura 4.25. En el tiempo $t = 0$ no está definido el valor del voltaje, ya que se considera un instante de transición de *cero* a un valor *máximo*. Por tanto, se dice que el voltaje será cero hasta el instante $t(0^-)$, y será valor máximo a partir del instante $t(0^+)$. Una función de excitación como la que se ejemplifica es del tipo de *funciones singulares*, pues tienen *derivadas discontinuas*.

En las apreciaciones anteriores se ha considerado una fuente y la existencia de un interruptor que se encarga de activar el efecto de dicha fuente; y quizá, en algunos casos, el uso de un interruptor no produzca el efecto de cambio súbito de valor en el voltaje de la fuente, como lo representa la figura 4.26. Sin embargo, existen circuitos o generadores diversos que son capaces de producir este fenómeno, al generar *funciones singulares*. De estas funciones, una de aplicación frecuente es la *función escalón unitario.*

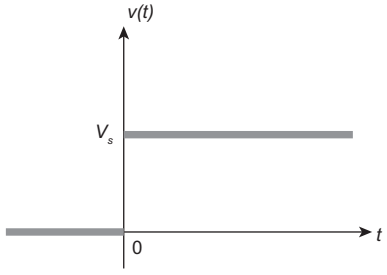


Figura 4.26 Representación del voltaje entregado por una fuente de *cd* con un cambio súbito de 0 a V_S, en $t = 0$.

La *función de excitación escalón unitario* es una función del tiempo que tiene sólo dos valores: 0 y 1. Adquiere el valor de *cero* cuando su argumento es de signo negativo, y vale *uno* cuando su argumento es

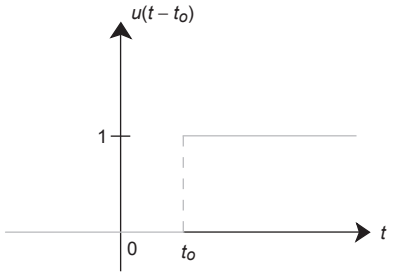


Figura 4.27 Representación de la función de excitación escalón unitario $u(t - t_o)$.

positivo. Matemáticamente esta función se representa de la siguiente manera:

$$u(t - t_o) = \begin{cases} 0 \text{ } para \text{ } t < t_o \text{ (argumento negativo)} \\ 1 \text{ } para \text{ } t > t_o \text{ (argumento positivo)} \end{cases}$$

Y su representación gráfica es la que se muestra en la figura 4.27. Observa que la función escalón unitario $u(t - t_o)$ tendrá un argumento negativo cuando $t < t_o$; en este caso la función adquiere el valor de *cero*. Cuando $t > t_o$, el argumento de la función es positivo, y la función tendrá el valor de *uno*. Al aplicar esta función a algún dispositivo es como si se tuviera una fuente que está desconectada y súbitamente se pusiera en contacto mediante un interruptor. Aquí no existe tal interruptor, sino que la función misma propicia el cambio repentino de *cero* a *uno*.

EJEMPLO 4.12

Evalúa cada una de las siguientes funciones para $t = 0.5$ s

$$a)\ f(t) = 5u(t), \quad b)\ f(t) = 2.4u(2 - 4t), \quad c)\ f(t) = 3.5u(t) \text{ sen } \pi t$$

Solución

Planteamiento:

Al sustituir el tiempo $t = 0.5$ s en cada una de las funciones dadas podrás evaluar su argumento. Cada función tendrá el valor de cero cuando su argumento es negativo, o bien, será de valor uno cuando su argumento es positivo.

Desarrollo:

Para $t = 0.5s$

a) $5u(t) = 5u(0.5) \rightarrow$ el argumento es positivo. La función escalón unitario tiene el valor de 1, entonces la función tendrá el valor de $5(1) = 5$.

b) $2.4u(2 - 4t) = 2.4u[2 - 4(0.5)] \rightarrow$ el argumento es cero. La función escalón unitario no tiene valor definido

c) $3.5u(t)$ sen $\pi t = 3.5u(0.5)$ sen $\pi(0.5) \rightarrow$ el argumento es positivo. La función escalón unitario tiene el valor de 1, entonces la función tendrá el valor de $3.5\left(\text{sen}\frac{1}{2}\pi\right) = 3.5(1) = 3.5$.

Al emplear dos funciones escalón unitario en forma combinada y apropiada puede lograrse otro tipo de señales; por ejemplo, una *función de excitación de pulso rectangular*. Si se considera la diferencia entre dos señales escalón unitario es de la siguiente manera:

$$f(t) = u(t - t_1) - u(t - t_2).$$

donde

$$u(t-t_1)=\begin{cases}0 \text{ para } t<t_1\\ 1 \text{ para } t>t_1\end{cases} \qquad u(t-t_2)=\begin{cases}0 \text{ para } t<t_2\\ 1 \text{ para } t>t_2\end{cases}$$

se obtiene una gráfica como la que se muestra en la figura 4.28. En esta figura, la señal $u(t-t_1)$ dibujada en azul, tiene un valor de *cero* para todo tiempo $t<t_1$, y vale 1 para todo $t>t_1$. La señal de excitación $-u(t-t_2)$ tiene un valor de *cero* para todo $t<t_2$, y vale -1 para todo $t>t_2$. El resultado de combinar las dos señales es que se tiene una señal que vale 1 para todo $t_1<t<t_2$, y será *cero* para cualquier otro tiempo t. Se ha dibujado en gris oscuro. Y así como este ejemplo, se pueden obtener diversas aplicaciones para las señales de excitación escalón unitario, cuando se combinan apropiadamente.

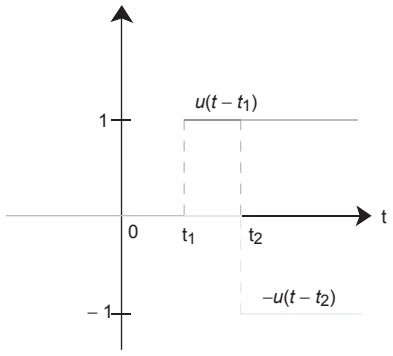


Figura 4.28 Representación de las funciones de excitación escalón unitario $u(t-t_1)$ y $u(t-t_2)$, que se combinan para dar por resultado un pulso rectangular de amplitud igual a uno y duración (t_2-t_1). La señal vale cero para cualquier otro tiempo t.

Ahora se puede hacer una observación final: esta función es sólo un modelo matemático que representa el comportamiento de una operación real que en un momento dado realiza un interruptor; y desde luego que, físicamente no existe ningún elemento real que pueda hacer una operación de conmutación tan súbita que su tiempo de transición sea de cero, como lo representa la *función matemática de excitación escalón unitario*, que pasa de un valor *cero* a un valor 1 en un tiempo $t=0$. Así como tampoco existe un inductor, un resistor o un capacitor que se comporte exactamente como lo representa su modelo matemático, tampoco puede llevarse a cabo una operación de conmutación en un tiempo *cero*.

Sin embargo, muchos circuitos se caracterizan por tener tiempos de conmutación menores que 1 nanosegundo (1×10^{-9} s); lo que resulta ser un tiempo suficientemente pequeño comparado con las constantes del resto del sistema del cual forman parte; periodos tan cortos que, desde el punto de vista práctico o experimental, son despreciables y pueden considerarse como *cero*. De ahí que la función escalón unitario adquiere relevancia en los circuitos físicos para operaciones de conmutación en tiempos prácticamente de cero. En las siguientes secciones se verán algunas aplicaciones de esta función de excitación.

4.6 Circuito *RL* excitado por una función escalón unitario

COMPETENCIAS:

- Conocer la respuesta de un circuito *RL* simple ante una excitación debida a una función escalón unitario. [1]
- Calcular la respuesta de un circuito *RL* simple a una función de excitación escalón unitario. [2]

En esta sección se estudiará el efecto que puede tener la *función de excitación escalón unitario* en un *circuito RL* simple; para lo cual, procederemos a hacer el análisis de una red sencilla *RL* a la cual se le aplica *repentinamente* la diferencia de potencial eléctrico de una fuente de voltaje de cd.

Iniciemos por representar simbólicamente el circuito correspondiente, como se muestra en la figura 4.29*a*, donde la fuente V_o está inicialmente desconectada de la serie *RL* hasta el tiempo $t=0$, en el que el interruptor cambia de posición y cierra el circuito, desarrollando así una intensidad de corriente $i_R(t)$ en el resistor. Desde luego que esta corriente vale cero para todo tiempo $t<0$.

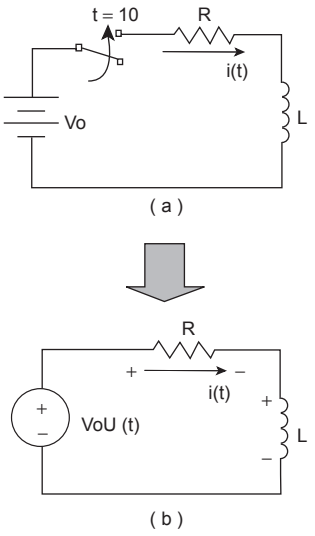


Figura 4.29 *a*) Circuito *RL* alimentado por una fuente de cd con interruptor. *b*) Circuito equivalente utilizando la función de excitación escalón unitario.

Si el inductor no estuviera presente, la corriente se elevaría rápidamente en el resistor hasta un valor estacionario $i = (V_o/R)$. Pero, a causa del inductor, aparece de manera transitoria una fuerza electromotriz (voltaje) inducida v_L en el circuito y, de acuerdo a la ley de Lenz[5] este voltaje se opone a la elevación de la corriente, lo que significa que se opone al voltaje de la fuente V_o, ya que es de polaridad opuesta. De este modo, la corriente en el resistor depende de la suma de dos voltajes, uno constante (V_o) debido a la fuente de alimentación y uno variable (v_L) de signo opuesto, debido a la inductancia. Mientras esté presente este segundo voltaje, la corriente en el resistor será $i < (V_o/R)$.

Conforme pasa el tiempo la corriente a través del resistor aumenta, cada vez menos rápidamente, debido a que el voltaje inducido v_L, que es proporcional a di/dt se hace menor. La corriente en el circuito entonces, tiende a alcanzar de una manera exponencial el valor de $i = (V_o/R)$ (ecuación 4.10).

El circuito de la figura 4.29*a*, que incluye un interruptor, puede ser sustituido por un circuito sin interruptor y en el cual se realice la misma operación de "activar" la fuente de alimentación en un tiempo $t = 0$; simplemente afectando a la fuente V_o con una función de excitación escalón unitario que tenga su transición en el tiempo $t = 0$ precisamente, como se representa en el inciso b de la figura 4.29.

En la red de la figura 4.29*b* se presentan dos situaciones en función del tiempo, por efecto de la función de excitación escalón unitario:

Primera para todo $t < 0$. La función $u(t) = 0$, por lo que el voltaje de la fuente tiene valor cero (como si la fuente estuviera desconectada de la sección *RL*). Por consecuencia, la corriente $i(t) = 0$.

Segunda para todo $t > 0$. La función $u(t) = 1$. La fuente se "activa" y alimenta a la red. La corriente $i(t)$ adquiere un valor diferente de cero, el cual variará y dependerá de los valores de V_o, de R, de L y de las condiciones iniciales del circuito, en función del tiempo.

Al aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes se obtiene la ecuación de la malla de la figura 4.29*b*.

$$-V_o + Ri + L\frac{di}{dt} = 0 \qquad \text{(ecuación 4.28)}$$

donde V_o es el voltaje debido a la fuente de alimentación, Ri es el voltaje en el resistor (por ley de Ohm), y $L\frac{di}{dt}$ es el voltaje inducido que aparece en el inductor, según la ley de Lenz.

Al dividir la expresión entre L se tiene

$$\frac{R}{L}i + \frac{di}{dt} = \frac{Vo}{L}$$

donde $\tau = \frac{L}{R}$. Para simplificar el proceso matemático llamemos $Z = \frac{V_o}{L}$ y sustituyamos estas dos expresiones en la ecuación de malla anterior.

$$\frac{di}{dt} = Z - \frac{i}{\tau},\ o\ bien\ \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{Z\tau - i}{\tau}$$

[5] Heinrich Friedrich Lenz (1804-1865), estableció que "en un circuito conductor cerrado, la corriente inducida aparece en una dirección tal que ésta se opone al cambio que la produce".

Al separar las variables se obtiene:

$$di = \left(\frac{Z\tau - \mathrm{i}}{\tau}\right)dt$$

$$\frac{\tau di}{Z\tau - i} = dt, \text{ o bien} \rightarrow \frac{di}{i - Z\tau} = -\frac{dt}{\tau}$$

Ahora integra ambos miembros de la última expresión:

$$\int \frac{di}{i - Z\tau} = -\frac{1}{\tau}\int dt$$

y obtienes: $ln(i - Z\tau) = -\frac{1}{\tau} + k$, o también $i - Z\tau = e^{(-t/\tau + k)}$

Donde k es una constante de integración.
También se puede escribir de la siguiente manera:

$$i - Z\tau = e^{-t/\tau}\, e^{k}$$

Y si hacemos $e^{k} = K$, la expresión ahora se escribe así:

$$i = Z\tau + Ke^{-t/\tau}$$

Retoma las expresiones para Z y para τ, y la última expresión queda así:

$$i = \frac{V_o}{R}\frac{L}{R} + ke^{-Rt/L}$$

es decir

$$i = \frac{V_o}{R} + ke^{-Rt/L} \qquad \text{(ecuación 4.29)}$$

El valor para K estará dado por las condiciones iniciales del circuito que se analiza. Si a la corriente en el tiempo $t = 0$ la llamamos $i(0) = I_o$ se puede tener una expresión en particular para K. Entonces, al sustituir $t = 0$ en la ecuación 4.29 tienes que:

$$i = \frac{V_o}{R} + K, \text{ o sea} \rightarrow K = I_o - \frac{V_o}{R} \qquad \text{(ecuación 4.30)}$$

Al sustituir la ecuación 4.30 en la ecuación 4.29 resulta:

$$i = \frac{V_o}{R} + \left(I_o - \frac{V_o}{R}\right)e^{-Rt/L}$$

Entonces tienes una expresión para la corriente $i(t)$ en la red, en función del tiempo:

$$i(t) = \frac{V_o}{R} + \left(I_o - \frac{V_o}{R}\right)e^{-Rt/L} \qquad \text{(ecuación 4.31)}$$

La ecuación 4.31 proporciona una expresión para el valor de la corriente en el inductor de la red de la figura 4.29*b* para todo tiempo $t \geq 0$. Se

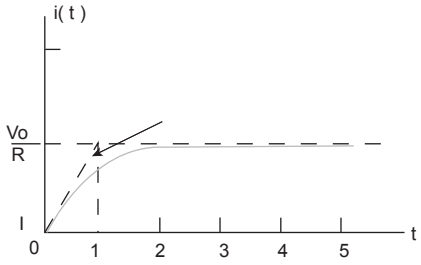


Figura 4.30 Respuesta natural del circuito *RL* de la figura 4.29*b*. En condiciones iniciales la corriente en el inductor es t_o para $t = 0$. La línea que se prolonga con la pendiente inicial se encuentra con la respuesta forzada constante en $t = \tau$.

observan en ella dos términos, que corresponden a dos partes que caracterizan a la corriente; se interpreta de la siguiente manera:

El término $\frac{V_o}{R}$ (observa que según la ley de Ohm corresponde a una corriente), es el valor de la corriente cuando ya no se tiene en la red la respuesta transitoria del inductor y éste se comporta como un cortocircuito (recuerda que está alimentado por voltaje de cd), quedando solamente el efecto de la resistencia *R*. Esta situación se presentará para un tiempo $t >> 5\tau$ (figura 4.30). Este término corresponde a la *respuesta forzada* (forzada por la fuente de alimentación), o también conocida como *respuesta de estado estable* o *respuesta permanente* y se representa como $i(\infty)$.

El término $\left(I_o - \frac{V_o}{R}\right)e^{-Rt/L}$ es de la misma forma que tiene la ecuación 4.10, a la cual le hemos llamado *respuesta natural*, y corresponde al comportamiento de la corriente cuando el inductor está induciendo una fuerza electromotriz y de polaridad opuesta[6] a la fuente de alimentación, debida a la misma corriente, en un rango comprendido desde el valor de la corriente I_o (para el tiempo $t = 0$), el cual se representa como $i(0)$, hasta el valor de $\frac{V_o}{R}$ (en un tiempo $t >> 5\tau$), con una variación de *tipo exponencial* ($e^{-Rt/L}$) según se puede observar en el eje vertical de la figura 4.30. A esta parte del comportamiento de la corriente en el inductor se le conoce *como respuesta natural o transitoria*. Algunos autores le llaman *respuesta de entrada cero*.

De lo anterior, se puede representar a la ecuación 4.31 como

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0) - i_L(\infty)]e^{-Rt/L} \qquad \text{(ecuación 4.32)}$$

La ecuación 4.31 representa la respuesta de un circuito *RL* a una fuente de cd que cambia súbitamente su valor (fuente conmutada), o bien, a una función de excitación escalón, en términos de los valores inicial y final de la variable $i(t)$ y la constante τ del circuito. Es válida para todo tiempo $t \geq 0$, a partir del instante en que el interruptor (o los interruptores, en su caso) cambia de posición.

Observa que se presentarán fenómenos semejantes al conectar o retirar súbitamente una fuente de alimentación de una red *RL*. Habrá una respuesta transitoria para la elevación o la caída de la corriente y de forma exponencial. Para ambos casos, cuando una fuente enciende o apaga, o se conecta o desconecta de una red *RL* el análisis se realiza de la misma manera.

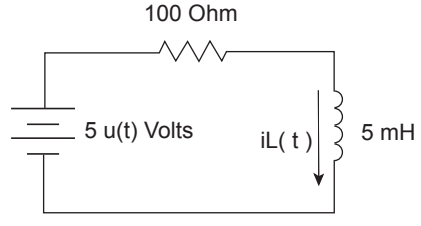


Figura 4.31 Circuito *RL* con fuente conmutada por una función escalón unitario, para el ejemplo 4.13.

EJEMPLO 4.13

¿Cuál será la respuesta de la corriente $i_L(t)$ en el inductor de 10 mH para la red de la figura 4.31?

[6] Se le llama también fuerza contraelectromotriz, por el hecho de oponerse a la fuerza electromotriz que proporciona la fuente de alimentación.

Solución
Datos:

$V_s = 5u(t)$ V
$R = 100\ \Omega$
$L = 5$ mH

Planteamiento:

Es el caso de un circuito *RL* con fuente conmutada por una función escalón unitario, cuya respuesta está dada por la ecuación 4.31. Por tanto hace falta determinar primero cada uno de los términos que conforman a esta expresión; o sea, la corriente en cada tiempo *t*.

Desarrollo:

La ecuación 4.32 nos ayuda a encontrar la respuesta:

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-Rt/L},$$

así que el valor para cada uno de los términos se calcula como sigue:

Para $t < 0$ (valores negativos para el argumento *t*), la función escalón unitario tiene el valor de cero; por tanto la fuente de alimentación está inactiva ($V_s = 5u(t) = 5(0) = 0$ V. La corriente inicial en el inductor $i_L(0^-) = i_L(0) = 0$ A.

Para $t > 0$ (valores positivos para el argumento *t*), la función escalón unitario tiene valor 1; entonces se activa la fuente de alimentación y se tiene que $V_s = 5u(t)$ V $= V_s = 5(1)$ V $= 5$ V; por tanto, la corriente en el inductor variará desde un valor inicial de cero hasta un valor final dado por $i_L(\infty) = \dfrac{5\text{ V}}{100\ \Omega} = 50$ mAs

La constante de tiempo para la sección *RL* es $\tau = 0.005$ H/100 Ω, $\tau = 5 \times 10^{-5}$ s.

Al sustituir estos valores y los datos del problema en la ecuación 4.31 se tiene:

$$i_L(t) = 50\text{ mA} + [\,0 - 50\text{ mA}]\ \text{e}^{-t/5\times10^{-5}}$$

La corriente en el inductor para todo $t \geq 0$ es

$$i_L(t) = 50\text{ mA} - 50e^{-20\,000t}\text{ mA}$$

EJEMPLO 4.14

Para la red *RL* de la figura 4.31 dibuja la gráfica correspondiente a la corriente $i_L(t)$ en el inductor y determina su valor para $t = 0$ y para $t = 75\ \mu$s.

Solución
Datos:

$R = 100\ \Omega$
$L = 5\ \text{mH}$

Otro dato importante es la expresión para $i_L(t)$ obtenida en el ejemplo 4.12:

$$i_L(t) = 50\ \text{mA} - 50e^{-20\,000t}\ \text{mA}$$

Las incógnitas por determinar son:

$i_L\,(t \geq 0) = ?$
$i_L\,(75\ \mu\text{s}) = ?$

Planteamiento:

La gráfica de la corriente en el inductor se obtiene con 5 puntos, por lo menos, para 5 tiempos diferentes. Se pueden considerar entre ellos los tiempos $t = 0$ y $t = 75\ \mu\text{s}$. También es conveniente determinar el valor de la corriente para $t(\tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau$ y $5\tau)$.

Desarrollo:

Obtén la gráfica de la corriente en el inductor.

donde la constante de tiempo $\tau = \dfrac{L}{R} = \dfrac{0.005\ \text{H}}{100\ \Omega} = 50\ \mu\text{s}$

Al sustituir valores para $t = \tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau$ y 5τ.

En la expresión: $i_L(t) = 50\ \text{mA} - 50e^{-20\,000t}\ \text{mA}$ que se obtuvo en el problema 4.12, resultan los datos de la tabla 4.7.

Tabla 4.7 Valores de la corriente en el inductor de la figura 4.31 para $t \geq 0$.

t (en términos de τ)	$i_L(t) = (50 - 50e^{-20\,000t})$ mA
0	0
τ	31.606
75 μs	38.843
2τ	43.233
3τ	47.510
4τ	49.084
5τ	49.663
6τ	49.870

A partir de los datos de la tabla 4.7 se traza la gráfica que representa a la respuesta del circuito *RL*, como se muestra en la figura 4.32. En esta figura se destacan los valores, inicial para $t = 0$ y $t = 75\mu s$.

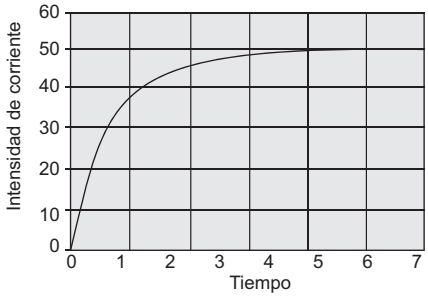


Figura 4.32 Respuesta del circuito *RL* de la figura 4.31, para t ≥ 0, donde $\tau = 50\ \mu s$.

4.7 Circuito *RC* excitado por una función escalón unitario

COMPETENCIAS:

- Conocer la respuesta de un circuito *RC* simple ante una excitación debida a una función escalón unitario. [1]
- Calcular la respuesta de un circuito *RC* simple a una función de excitación escalón unitario. [2]

El análisis de una red *RC* que recibe un voltaje repentino, ya sea desde una fuente conmutada o mediante una función escalón unitario, es muy semejante al que se hizo para la red *RL* en la sección anterior, ya que el modelo matemático que describe el comportamiento de la respuesta tiene la misma forma para ambas clases de circuitos; se trata de una ecuación diferencial de primer orden.

Veamos la red *RC* representada en la figura 4.33. Existe para este circuito una situación parecida a la que se vio para el circuito *RL*. La fuente de voltaje V_S, establecerá un voltaje *repentino* en el capacitor, para continuar en esas condiciones indefinidamente. Esto se representa en la figura 4.33*a*, donde la fuente V_S está inicialmente desconectada de la red *RC*, o sea que el voltaje en el capacitor es $v_C(t) = 0$ hasta el tiempo $t = 0$, instante en que el interruptor se cierra, estableciendo una diferencia de potencial entre placas del capacitor $v_C(t) > 0$. Este circuito, que contiene un interruptor, puede ser sustituido por un circuito *sin interruptor* en el cual se realice la misma operación de "activar" la fuente de alimentación en un tiempo $t = 0$; simplemente afectando a la fuente V_S con una función de excitación escalón unitario $u(t)$ que tenga su transición en el tiempo $t = 0$, como se representa en el inciso *b* de la figura 4.33.

En la red de la figura 4.33*b* se presentan dos situaciones en función del tiempo, por efecto de la función de excitación escalón unitario:

Primera para todo $t < 0$. El argumento de la función escalón unitario es negativo; la función $u(t) = 0$, y $V_s = 0$ volts. Entonces, el voltaje $v_C(t) = 0$.

Segunda para todo $t > 0$. El argumento de la función escalón unitario es positivo; la función $u(t) = 1$. La fuente se "activa" y alimenta a la red, con $V_s = 6$ volts. El voltaje $v_C(t)$ adquiere un valor diferente de cero, el cual dependerá de los valores de V_S, de R_{eq}, de C_{eq} y de las *condiciones iniciales* del circuito, en función del tiempo.

En estas condiciones, y de acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltajes, se puede obtener la ecuación de la malla (figura 4.33*b*).

$$-V_o + R_1 i + C\frac{dv}{dt} = 0 \qquad \text{(ecuación 4.33)}$$

La ecuación 4.33 es de la misma forma que la ecuación 4.28, sólo que ahora la incógnita de la ecuación es un voltaje en el capacitor $v_C(t)$. Así que con un desarrollo semejante al que se siguió en la sección 4.6 para el circuito *RL*, se puede llegar a una expresión como la siguiente:

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0) - v_C(\infty)]e^{-t/RC} \qquad \text{(ecuación 4.34)}$$

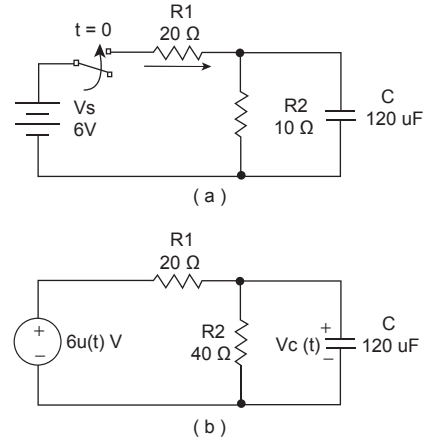


Figura 4.33 *a*)Circuito *RC* alimentado por una fuente de voltaje con interruptor. *b*) El mismo circuito *RC* alimentado por una fuente asociada a una función escalón unitario. Ejemplo 4.14.

La ecuación 4.34 representa la respuesta de un circuito *RC* a una fuente de *cd* que cambia súbitamente su valor (fuente conmutada), o bien a una función de excitación escalón, en términos de los valores inicial y final de la variable $v_C(t)$ y la constante τ del circuito. Es válida para todo tiempo $t > 0$, a partir del instante en que el interruptor (o los interruptores, en su caso) cambia de posición. Esto dará la *respuesta natural* o *transitoria* de la red *RC*.

EJEMPLO 4.15

Determina una expresión algebraica que represente el comportamiento del voltaje en el capacitor de la red mostrada en la figura 4.33 y haz la representación gráfica de ese voltaje.

Solución
Datos:

$v_S = 6u(t)$ V, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $C = 120\ \mu$F
Expresión algebraica del voltaje $v_C(t) = ?$

Planteamiento:

La expresión solicitada será de acuerdo con la ecuación 4.34, la cual se conformará de la siguiente manera:

Desarrollo:

Paso 1. Cálculo de la R_{eq}, C_{eq} y constante de tiempo τ.
Paso 2. Cálculo de los términos de la ecuación 4.34.
Paso 3. Elaboración de la tabla de valores (tabla 4.8).

1. **Cálculo de la R_{eq}, C_{eq} y constante de tiempo τ**
   Al desactivar la fuente de voltaje el suministro de voltaje será igual a cero; esto da por resultado que R_1 y R_2 queden conectadas en paralelo, así que la resistencia total equivalente será:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(20\ \Omega)(40\ \Omega)}{20\ \Omega + 40\ \Omega} = 13.333\ \Omega \quad C_{eq} = 120\ \mu\text{F}$$

   Por tanto, la constante de tiempo:

$$\tau = (R_{eq})(C_{eq}) = 13.333\ \Omega \times 120\ \text{mF} = 1.6\ \boxtimes\text{s}$$

2. **Cálculo de los términos de la ecuación 4.34**
   $v_C(0)$ es el voltaje en el instante inmediato anterior al tiempo $t = 0$ en el que se da la discontinuidad en la función escalón unitario; es decir, para $t < 0$. Al sustituir este valor del tiempo en la función:

$$v_s u(t) = v_s u(t < 0)$$

   Como el argumento de la función escalón unitario es negativo, entonces el valor de la función será cero. Así que $v_C(0^-) = 0$.

v_C **(∞)** es el voltaje que habrá entre placas del capacitor en un tiempo $t >> 0$; el argumento de la función escalón unitario vale 1, por tanto el voltaje en la fuente será de 6 volts cd. El capacitor se comporta como un circuito abierto, y entre sus placas habrá un voltaje igual al de R_2, por estar ambos en paralelo. Así que se puede calcular el voltaje en R_2 mediante un divisor de voltaje:

$$v_{R2} = \frac{(vs)(R_2)}{R_1 + R_2} = \frac{(6\text{ V})(40\ \Omega)}{20\ \Omega + 40\ \Omega} = 4\text{ volts} \quad \text{así que } v_c\,(\infty). = 4\text{ volt}$$

Se sustituyen, en la ecuación 4.34, los valores obtenidos para $v_C(0)$ y $v_C(\infty)$

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0^+) - v_C(\infty)]e^{-t/RC}$$
$$v_C(t) = 4\text{V} + [0 - 4\text{V}]e^{-t/1.6\,\mu s} = 4 - 4e^{-625t}\text{ volts}$$
$$v_C\,(t) = 4 - 4e^{-625t}\text{ volts}$$

Con base en la expresión obtenida para v_C(t) se sustituyen valores para $t = 0$, $t = \tau$, 2τ, 3τ, 4τ y 5τ para obtener puntos en un plano cartesiano así como la gráfica del voltaje en el capacitor. Los resultados se muestran en la tabla 4.8 y en la figura 4.34.

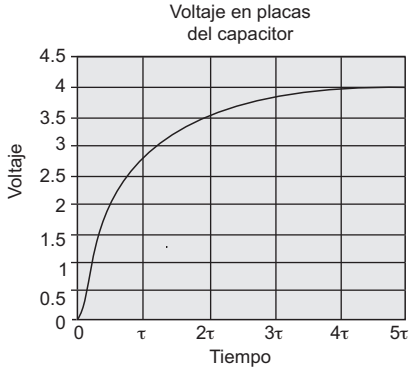


Figura 4.34 Gráfica de valores de voltaje en el capacitor del ejemplo 4.15, obtenida a partir de los datos de la tabla 4.8.

Tabla 4.8 Valores de $v_C(t)$ para diferentes tiempos en función de *t*. Ejemplo 4.14.

T	**0**	**τ**	**2*t***	**3*t***	**4*t***	**5*t***
$v_C(t) = 4 - 4e^{-625t}$ V	0 V	2.528 V	3.458 V	3.800 V	3.926 V	3.973 V

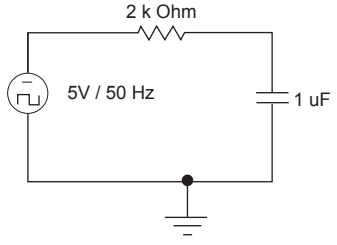


Figura 4.35 Circuito *RC* alimentado por una fuente que proporciona una señal cuadrada no simétrica de 5V y frecuencia de 50 Hz.

Para observar en el laboratorio el efecto de una función de excitación escalón unitario sobre un circuito *RL* o *RC* real puede sustituirse la función por una señal cuadrada no simétrica cuyos valores son cero y un valor máximo determinado. Los súbitos cambios de valores de cero a su valor máximo y viceversa pueden simular a la función de excitación escalón unitario. Como ejemplo puede observa el caso de la red *RC* que se presenta en la figura 4.35. Esta red ha sido analizada por medio de la simulación del circuito, obteniéndose los resultados que presenta la figura 4.36, que se pueden interpretar de la siguiente manera:

El inciso *a* de la figura 4.36 presenta la forma de onda cuadrada con una amplitud de 5 volts y un frecuencia de 50 Hz que entrega la fuente de alimentación *Vs*. Esto significa que la duración de cada uno de sus ciclos (periodo) es de t = 20 ⊠s; es decir, se comporta como una señal que cambia súbitamente su valor de 0 a 5 V y viceversa. Permanece 10 ⊠s (medio ciclo) en valor *cero*, y luego 10 ⊠s (medio ciclo) con valor de 5 volts, y se repite el fenómeno 50 veces en un segundo.

Por otro lado, observa que la constante de tiempo del circuito de la figura 4.35 es de τ = 2 ⊠s, lo cual significa que el capacitor del circuito se energizará en aproximadamente 5τ = 10 ⊠s, mismo tiempo

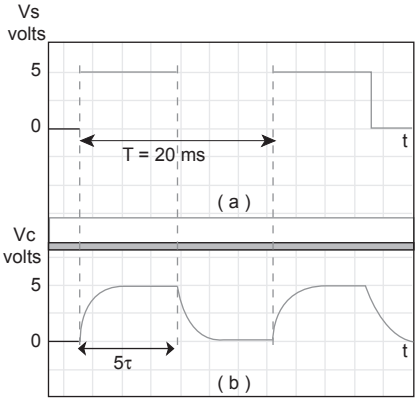


Figura 4.36 *a*) Señal cuadrada que proporciona la fuente de la red mostrada en la figura 4.35. *b*) Forma de la onda observada en el capacitor.

en que se desenergizará sobre el resistor. El inciso *b* de la figura 4.36 muestra la forma de señal que se observará en el capacitor a través de un osciloscopio.

4.8 Energía almacenada en un capacitor

En el proceso de carga de un capacitor hay una transferencia de electrones de una placa a otra del dispositivo; fenómeno que requiere un gasto de energía, ya que toda vez que se ha acumulado el total de la carga que es capaz de soportar cada placa, cualquier carga adicional que pretenda incorporarse a ella es repelida por las cargas eléctricas previamente acumuladas en la placa. En el fenómeno de repulsión entre cargas del mismo signo se genera una fuerza que realiza un trabajo físico, y este trabajo demanda la presencia de cierta cantidad de energía, misma que se encuentra almacenada como energía potencial en forma de campo eléctrico por la capacitancia.

La energía almacenada puede recobrarse cuando el exceso de cargas negativas fluya desde la placa cargada negativamente hacia la placa positiva; esto es, estableciendo un camino que ponga en contacto a ambas placas, como sucede con una red *RC* como la mostrada en la figura 4.35.

De manera semejante a como sucede con un inductor, la energía almacenada por un capacitor se calcula mediante la expresión

$$w = \frac{1}{2} Cv^2 \qquad \text{(ecuación 4.35)}$$

Donde w es la energía expresada en joules, C es el valor de la capacitancia en Farad y v es el voltaje entre las placas del capacitor, en volts.

EJEMPLO 4.16

Calcula la energía en joules que se requiere en el proceso de carga o de descarga en el capacitor de la red de la figura 4.35.

Solución
Datos:

$V_S = 5$ volts, $R = 2$ kΩ, $C = 1$ μF
$w_C = ?$

Planteamiento:

La energía desarrollada en el capacitor será de acuerdo con la ecuación 4.35, $w = \frac{1}{2} Cv^2$

Desarrollo:

Al sustituir los datos en la expresión se tiene:

$$w = \frac{1}{2}(1 \times 10^{-6}\ \text{F})(5\ \text{V})^2$$
$$w = 2.5 \times 10^{-6}\ \text{J}$$

4.9 Aplicaciones de los inductores y los capacitores

COMPETENCIA:
Apreciar la importancia que tienen los inductores y capacitores en sistemas electrónicos. [3]

Existe mucha información publicada acerca de inductancias y capacitancias respecto de sus formas, tamaños, magnitudes, maneras de calcular sus valores y de medirlas. Sin embargo, es de particular importancia mencionar que algunas actividades propias del laboratorio de electrónica requieren de la medición de inductancias y capacitancias.

4.9.1 Medición de inductancias y capacitancias

Aunque la mayoría de las veces el valor de cada elemento viene dado por el fabricante, existen casos en los que se carece de esta información; es cuando el experimentador requiere medir el valor o magnitud de estos dispositivos. La inductancia y la capacitancia pueden medirse por medio de instrumentos electrostáticos o por métodos indirectos. Como ejemplo de métodos indirectos se tiene el análisis de una red *RL* o *RC* como se vio en secciones anteriores; aunque estos métodos pueden introducir errores considerables, sobre todo si el experimentador no tiene la experiencia suficiente para ello.

Una forma práctica y sencilla, con mínimo porcentaje de error, de medir inductancias o capacitancias es utilizar los *circuitos puente*. Estos equipos, que comúnmente se encuentran en un laboratorio de electrónica, pueden ser de uso específico para medición de inductancias (o capacitancias), o también de uso general para hacer varios tipos de mediciones, como capacitancias, resistencias e inductancias. Este último recibe el nombre de puente universal. Cada puente tiene su propia forma de operarse, de ahí que para cada caso se requerirá de consultar el instructivo de operación.

En la actualidad existen medidores de capacitancias integrados a los equipos conocidos como *multímetros digitales*; los que, además de medir voltajes, corrientes, resistencias, algunos parámetros de dispositivos semiconductores, o temperatura, también miden capacitancias, de manera directa y entregando el resultado en forma digital. Es una forma sencilla y práctica de conocer el valor de una capacitancia desconocida.

4.9.2 Algunas aplicaciones de los capacitores en los circuitos electrónicos

Bloqueo de cd

Un capacitor conectado en serie con una rama de un circuito evita que las componentes de *cd* de la corriente fluyan por esa rama. Mientras que las componentes de *ca* no son bloqueadas en su totalidad. Estos elementos de bloqueo se usan comunmente en amplificadores, rectificadores y en osciladores.

Almacenamiento de energía

Existen circuitos electrónicos cuya función depende de estar recibiendo energía a intervalos, como los destelladores luminosos, los aceleradores de cargas eléctricas, lámparas láser y otros. Esta energía puede ser almacenada lentamente durante la carga de un capacitor y liberarse de manera rápida a través de una descarga acelerada de las placas del capacitor.

Generación de pulsos

En cierto tipo de computadoras que requieren alimentación de energía mediante pulsos eléctricos, o en los generadores de tiempo, se emplean las características transitorias de los capacitores, cuya energía almacenada puede desacargarse de manera controlada hacia estos dispositivos.

Desviar componentes de ca

Cuando a través de una rama de un circuito circulan señales con componentes tanto de ca como de cd, un capacitor se coloca en paralelo con esta rama, funcionando como un camino alterno de fácil acceso (baja impedancia) para el paso de las componentes de *ca*, mientras que bloquea a las componentes de cd.

Como filtros

Un uso muy común de los capacitores es para *filtrar* una señal; es decir, para disminuir la magnitud de sus variaciones, alisándola y mejorando sus valores. Este uso es frecuente en las fuentes de alimentación o en salidas de amplificadores.

4.9.3 Algunas aplicaciones de las inductancias en circuitos electrónicos

Los inductores tienen diversidad de aplicaciones tanto en ingeniería eléctrica como en la electrónica; algunas de las más comunes son:

Como elementos de deflexión electrónica

Se usan para producir deflexión en un haz de electrones, sobre todo en los tubos de rayos catódicos (*TRC*), conocido como cinescopio en los receptores de televisión, o en los osciloscopios.

Almacenamiento de energía en forma de campo magnético

Principalmente en los circuitos osciladores (circuitos capaces de generar señales de ca con diversidad de formas de onda y de frecuencia).

Como elementos para producir altos voltajes

Esta aplicación se encuentra en los sistemas de encendido de los automóviles, para alimentar con una diferencia de potencial elevada a los electrodos de las bujías.

Como elementos de filtro

Junto con los capacitores se utilizan para permitir el paso de señales eléctricas con determinadas características y eliminar las no deseadas. O bien como elementos de bloqueo para señales de frecuencias seleccionadas.

En transformadores

Un transformador es un dispositivo formado básicamente por dos bobinas devanadas alrededor de un nucleo de hierro, cuya función es elevar o bajar una diferencia de potencial en un circuito, manteniendo el producto $V_{r\,\mu s} I_{r\,\mu s}$[7] esencialmente constante, figura 4.37.

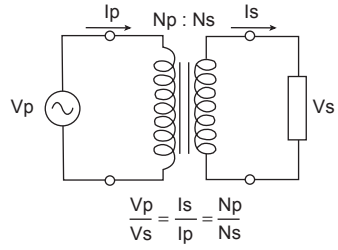


Figura 4.37 Símbolo de un transformador.

Estos dispositivos tienen tal importancia que su estudio forma parte de una gran área la ingeniería eléctrica. Si una *corriente alterna* fluye en el devanado primario, se crea un campo magnético limitado únicamente al núcleo alrededor del cual está embobinado el primario. Si el embobinado secundario se dispone en el mismo núcleo, el campo magnético creado por el primario afectará al devanado secundario. Si la corriente en el primario es de cd (estacionaria), no afectará a la bobina secundaria porque el campo magnético será también constante, no fluirá corriente en el secundario.

Es muy importante la razón de número de vueltas del devanado primario (N_P) al número de vueltas del secundario (N_S), ya que determina si el transformador operará con un elevador o un reductor de voltaje. La expresión que relaciona los voltajes con las corrientes y con el número de vueltas en ambos devanados es la ecuación 4.36.

$$\frac{V_P}{V_S} = \frac{I_P}{I_S} = \frac{N_P}{N_S} \qquad \text{(ecuación 4.36)}$$

En la cual

V_P : voltaje en el devanado primario,
V_S : voltaje en el secundario,
N_P : número de vueltas en el devanado primario,
N_S : número de vueltas en el secundario,
I_P : intensidad de corriente en el primario, e
I_S : intensidad de corriente en el secundario.

[7] El subíndice *rms* corresponde a las iniciales del nombre en ingléz *root* mean *square* que se refiere al valor promedio cuadrático de una señal alterna. Ver capítulo 5.

EJEMPLO 4.17

¿Cuál será la magnitud del voltaje en el devanado secundario de un transformador, si en el primario cuenta con 200 espiras y en el secundario tiene 1200?

Solución
Datos:

$N_P = 200$ espiras
$N_S = 1200$ espiras

Desarrollo:

De acuerdo con la ecuación 4.36:

$$\frac{V_P}{V_S} = \frac{N_P}{N_S}$$

$$V_S = \frac{V_P N_S}{N_P} = \frac{1200\ V_P}{200}$$

$$V_S = 6\ V_P$$

Este resultado indica que en el devanado secundario se tendrá un voltaje 6 veces el valor del voltaje en el primario. Es el caso de un transformador elevador de voltaje.

Actividades para la evaluación de competencias

Nota: Utiliza la simulación de circuitos para comprobar el resultado de los ejercicios que requieran de cálculos numéricos.

Inductancia

4.1 Explica en qué consisten los descubrimientos de Oersted y Ampère sobre los campos magnéticos. [2]
4.2 Explica en qué consisten los descubrimientos de Michael Faraday acerca de los campos magnéticos. [2]
4.3 Expresa en términos matemáticos cómo es el voltaje inducido en una bobina, en función de la corriente que lo induce. Explica tu descripción. [2]
4.4 Explica la equivalencia dimensional para la unidad de la inductancia, llamada *henry*. [2]
4.5 En una bobina cuya inductancia es de 10 mH, a través de la cual se hace circular una corriente variable en el tiempo, cuyos valores se representan en la figura 4.4, ¿cómo será la forma del voltaje que se induce a partir del campo magnético generado alrededor de este inductor? [2]
4.6 Dado el arreglo inductivo que muestra la figura 4.38, calcula el valor de la inductancia total equivalente entre los puntos *A* y *B*. [2]

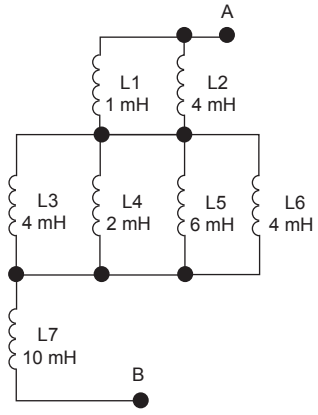


Figura 4.38 Red inductiva para la actividad de aprendizaje 4.5

Capacitancia

4.7 Explica el concepto de capacitor. [3]
4.8 Calcula la cantidad de electrones en exceso (carga negativa) que adquirirá la placa negativa de un capacitor de 0.230 mF que es conectado a una diferencia de potencial de 40 V. [2]
4.9 Calcula el valor de la capacitancia de un condensador de placas cuadradas y paralelas de 0.5 cm por lado, separadas entre sí una distancia de 1 mm, cuando entre ellas existe como dieléctrico papel con parafina. [3]
4.10 ¿Cuál será la carga eléctrica expresada en coulombs que se almacenará en el capacitor del ejercicio 4.8, cuando se conecta a una diferencia de potencial de 50V? [3]
4.11 ¿Qué cantidad de electrones en exceso se acumularán en la placa negativa de un condensador de forma cilíndrica de 2.5 cm de longitud que se conecta a un voltaje de 50 volts? El radio de la placa interna es de 0.5 cm mientras que el radio de la placa externa es de 0.58 cm, y entre ellas existe un dieléctrico polietileno. [2]
4.12 Explica con tus propias palabras qué es la permitividad de un material. [3]
4.13 ¿Qué se entiende por dieléctrico en un capacitor? [1]
4.14 ¿Cómo se evalúa la eficacia de un dieléctrico? [1]
4.15 ¿A qué se le llama rigidez dieléctrica de un material? [1]
4.16 Calcula la energía almacenada en el capacitor del ejercicio 4.10. [2]
4.17 Calcula la energía almacenada en el arreglo capacitivo de la figura 4.39, si entre los puntos *A* y *B* se aplica un voltaje de 15 volts. [2]
4.18 Encuentra la magnitud de la carga acumulada en cualquiera de las placas del capacitor *C*2 de la red capacitiva de la figura 4.39, cuando entre los puntos *A* y *B* se aplica un voltaje de 15 volts. [2]
4.19 ¿De qué valor debe ser un capacitor que por sí solo sea equivalente a la red mostrada en la figura 4.39, entre los puntos *A* y *B*? [2]

El circuito *RL* simple

4.20 Una bobina solenoide que tiene una inductancia de 45 mH se conecta en serie con una resistencia de 0.5 Ω y una fuente de voltaje de cd. ¿Cuánto tiempo le tomará a la corriente a través del inductor alcanzar el 60% de su valor final de equilibrio? [3]
4.21 A una bobina con inductancia $L = 45$ mH y $R = 200$ Ω se le aplica súbitamente un voltaje de 30 volts. ¿Qué valor tendrá la corriente a través del inductor cuando han transcurrido 0.35 ☒s después de haber activado la fuente? [2]
4.22 En $t = 0$ se ha conectado una batería a un inductor y un resistor conectados en serie. Los datos mostrados en la tabla 4.9 indican el voltaje medido en las terminales del inductor en función del tiempo transcurrido después de haber conectado la batería. Encuentra el valor del voltaje de la batería usada y determina la constante de tiempo del circuito *RL*. [2]
4.23 El interruptor de la red mostrada en la figura 4.40 ha estado en la posición actual durante un largo tiempo. Para el tiempo $t = 0$ cambia su posición, dejando "desconectada" la fuente del resto de

Tabla 4.9 Datos para la actividad 4.22.

t(ms)	v_L(volts)
1.0	18.2
2.0	13.8
3.0	10.4
4.0	7.9
5.0	5.98
6.0	4.53
7.0	3.43
8.0	2.60

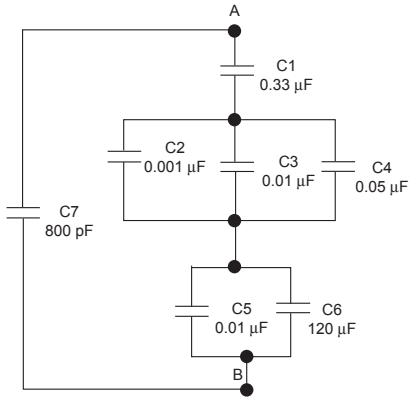


Figura 4.39 Arreglo capacitivo para la actividad 4.17.

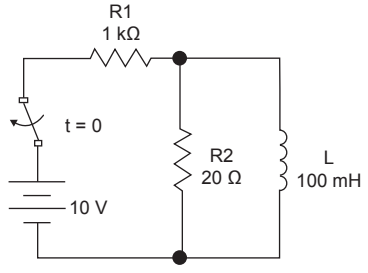


Figura 4.40 Circuito *RL* para la actividad 4.23.

la red. Encuentra la expresión para la corriente $i_L(t > 0)$ y para el voltaje $v_L(t > 0)$. Calcula la corriente y el voltaje en el inductor para 6 μs después de que el interruptor ha cambiado de posición. [3]

El circuito *RC* simple

4.24 El interruptor de la red mostrada en la figura 4.41 ha estado en la posición actual durante un largo tiempo. Para el tiempo $t = 0$ cambia su posición, dejando *desconectada* la fuente del resto de la red. Encuentra la expresión para el voltaje $v_C(t > 0)$. Calcula la corriente en R_2 y el voltaje en el capacitor para $2\mu s$ después de que el interruptor ha cambiado de posición. [2]

4.25 En la red de la figura 4.41, ¿cuál es el voltaje en el capacitor para el tiempo $t(0^+)$?, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir para la descarga total del capacitor? [2]

4.26 En la red de la figura 4.41, calcula el tiempo que ha de transcurrir, a partir de $t = 0$ para que el voltaje en el capacitor tenga un valor de 2 volts. [2]

4.27 Haz la simulación del circuito mostrado en la figura 4.41 y verifica los resultados de los ejercicios 4.24 y 4.25. Obtén el porcentaje de error de tus cálculos respecto de los resultados del simulador. [3]

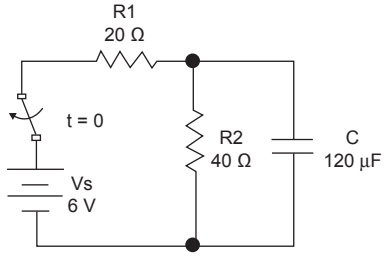


Figura 4.41 Circuito *RL* para la actividad 4.24.

La función escalón unitario

4.28 Evalúa cada una de las siguientes funciones para $t = 0.6$. [3]
a) $f_1(t) = 4u(t) - 2u(t) - 0.5u(2 - t)$
b) $f_2(t) = 3u(\cos \pi t) + 2u(t^2 - .1\ ) - 1.5u\ (\text{sen}\ \pi t - t)$
c) $f_3(t) = 4u(3t^3 - 4t^2) - 2u(e^{\,t-1}) - 0.5u\ (2 - t)$

4.29. Elabora una gráfica para cada uno de los incisos del ejercicio 4.28. [2]

4.30 Utiliza dos funciones escalón unitario para encontrar una función $v(t)$ que genere un pulso de 2.5 volts y una duración de 3.5 *s* a partir de un tiempo $t_1 = 8.3$ s. [2]

4.31 Encuentra una expresión matemática para la función de excitación que sea capaz de provocar un pulso de corriente, de acuerdo con la figura 4.42. [3]

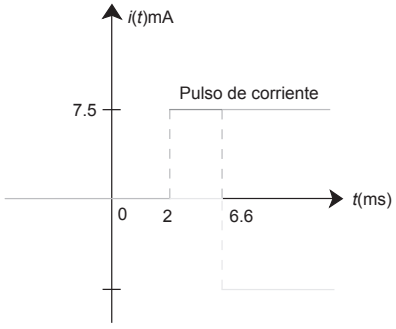


Figura 4.42 Representación de dos funciones de excitación escalón unitario que se combinan para dar por resultado un pulso rectangular de amplitud igual a 7.5 mA y duración 4.6 μs. El pulso está dibujado en gris oscuro. Actividad 4.31.

El circuito *RL* excitado por una función escalón unitario

4.32 Para la red mostrada en la figura 4.43 encuentra el valor de i_A para $t = 0.2$ s y $t = -0.7$ s. Elabora una gráfica completa de la corriente i_A para el periodo $-3\ \mu s < t < 3\ \mu s$. [2]

4.33 Calcula la energía instantánea almacenada en el inductor de la red mostrada en la figura 4.43 para $t = 0.2$ s. [2]

4.34 Encuentra una expresión general para $i_L(t)$ en la red de la figura 4.44. [2]

4.35 Traza una gráfica para $i_L(t)$ correspondiente a la red de la figura 4.44. [2]

4.36 Traza una gráfica para la energía $w_L(t)$ almacenada en la bobina de la figura 4.44. [2]

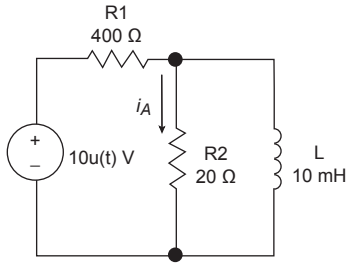


Figura 4.43 Red para la actividad 4.32.

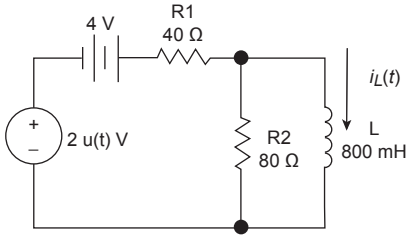


Figura 4.44 Red para la actividad 4.34.

El circuito *RC* excitado por una función escalón unitario

4.37 El interruptor de la red en la figura 4.45 cambia de la posición "*a*" a la posición "*b*" en $t = 0$. Halla:
   a) La carga q (coulomb) acumulada en el capacitor C, para $t(0^+)$.
   b) La expresión para el voltaje en el capacitor para $t > 0$.
   c) El voltaje $v_C(t)$ para $t = 0.25$ s. [2]

4.38 Halla una expresión completa para el voltaje $v_C(t)$, del capacitor en la figura 4.45. [3]

4.39 Calcula el valor de $i(t)$ en la red de la figura 4.43, para un tiempo de $t = 0.15$ segundos. [2]

4.40 Calcula la energía almacenada en el capacitor de la figura 4.45 para $t = 0.125$ segundos. [2]

4.41 Elabora una gráfica para el voltaje $v_C(t)$ del capacitor en la figura 4.45. [2]

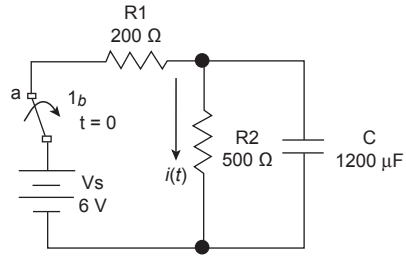


Figura 4.45 Red para la actividad 4.37.

Notas:

[1] Competencias de la dimensión Instrumental.
[2] Competencias de la dimensión Sistémica.
[3] Competencias de la dimensión Interpersonal.

Capítulo 5

Señales eléctricas en los circuitos

Estructura

Temas	CONTENIDOS	
	Conceptuales	
5.1 Señales periódicas 5.1.1 Descripción y características.	• Concepto de corriente alterna. • Concepto de señal eléctrica. • Conceptos amplitud, período, ciclo, frecuencia, cresta, valle, nodo y simetría en una señal eléctrica. • Unidades de medición para las señales.	
5.2 Valor instantáneo, medio y eficaz en las señales eléctricas 5.2.1 Valor medio de una señal. 5.2.2 Valor eficaz de una señal.	• Conceptos valor *medio* y valor *eficaz* en una señal. • Expresiones matemáticas que modelan el comportamiento de las señales periódicas más comunes.	
5.3 Generadores de señales	• Descripción de un generador de señales.	
5.4 Medición de las señales eléctricas 5.4.1 Mediciones con el osciloscopio. 5.4.2 Medición de voltajes de ca. 5.4.3 Medición del periodo y la frecuencia de una señal. 5.4.4 Medición de una señal de ca asociada a un voltaje de cd. 5.4.5 Medición de pulsos. 5.4.6 Medición de señales no senoidales. 5.4.7 Medición del ángulo de fase entre señales senoidales.	• Descripción de las características principales de un osciloscopio. • Concepto de *pulsos.*	

	temática
	CONTENIDOS

	Procedimentales	**Actitudinales**
	• Formación de una señal periódica en el tiempo.	• Elementos para apreciar el valor que representan las herramientas matemáticas para modelar fenómenos físicos reales.
	• Cálculo de los valores instantáneo, medio y eficaz en una señal como función del tiempo.	• Elementos para autoevaluar el trabajo personal y de equipo.
	Procedimiento para la aplicación del osciloscopio en la medición de: • Voltajes de ca. • Período y frecuencia de una señal. • Pulsos. • Una señal de ca asociada a un voltaje de cd. • Señales no senoidales. • Angulo de fase entre señales senoidales.	• Elementos que propician el desarrollo de una cultura de evaluación y autoevaluación en el trabajo.

Estructura

Temas	CONTENIDOS	
	Conceptuales	
5.5 Función de excitación senoidal	• Expresión matemática que modela a una función de excitación senoidal. • Argumento de una función senoidal. • Ángulo de fase entre señales senoidales.	
5.6 Respuesta de un circuito *RLC* a una excitación senoidal 5.6.1 Función de excitación compleja.	• Descripción de una *fuente compleja* de alimentación.	
5.7 Relaciones fasoriales para *R, C* y *L*	• Concepto ***fasor*** aplicado a los circuitos.	
5.8 Diagramas fasoriales	• Concepto de diagrama fasorial.	
5.9 Impedancia y admitancia 5.9.1 Impedancia de un elemento. 5.9.2 Admitancia de un elemento.	• Conceptos *impedancia* y *admitancia* en un elemento de circuito.	
Actividades para evaluación de competencias		

temática

	CONTENIDOS	
	Procedimentales	**Actitudinales**
	• Cálculo del ángulo de fase entre señales senoidales.	• Actividades que fomentan el interés por desarrollar tareas en equipos de trabajo.
	• Análisis de un circuito *RL* simple alimentado por una fuente de voltaje compleja. • Proceso de simulación de un circuito *RL* simple alimentado por una fuente de voltaje compleja.	• Actividades que permiten valorar el esfuerzo y el trabajo individual mediante cálculos de exactitud y precisión en el planteamiento, desarrollo y resolución de problemas relacionados con los temas correspondientes.
	• Proceso para la transformación fasorial para el análisis de circuitos ***RLC***.	• Elementos para la valoración del trabajo personal y en equipos.
	• Procedimiento para la elaboración de un diagrama fasorial aplicado a los circuitos.	• Elementos representar y valorar fenómenos físicos reales a través de apoyos matemáticos.
	• Cálculo de la impedancia y la admitancia en elementos de un circuito, por el método de fasores. • Análisis de un circuito alimentado por fuente de voltaje senoidal, por el método de fasores.	• Actividades que fomentan el interés por desarrollar tareas en equipos de trabajo.

Orientación general

Desarrollar en el estudiante la capacidad de análisis de circuitos resistivos *RLC* y su respuesta en estado senoidal permanente, su interpretación y su aplicación.

Competencias

Dimensión Instrumental [1]

Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:

1.1 Comprender los conceptos *corriente alterna* y *señal eléctrica*.
1.2 Identificar las características esenciales en una señal eléctrica y sus unidades de medida.
1.3 Comprender el concepto ***valor medio*** de una señal.
1.4 Comprender el concepto ***valor eficaz*** de una señal.
1.5 Comprender las expresiones matemáticas que modelan el comportamiento de las señales periódicas más comunes.
1.6 Hacer una descripción general de un generador de señales.
1.7 Comprender las técnicas para medir las características esenciales de las señales más comunes en circuitos eléctricos y electrónicos básicos, mediante el uso de un osciloscopio.
1.8 Comprender la expresión matemática que modela el comportamiento de una señal senoidal.
1.9 Comprender el concepto *ángulo de fase* entre señales senoidales.
1.10 Comprender el concepto de función de excitación compleja aplicado a circuitos *RL* y *RC*.
1.11 Comprender el método de transformación fasorial con aplicación en el análisis de circuitos *RLC* y *RC*
1.12 Describir los conceptos impedancia y admitancia mediante fasores.

Dimensión Sistémica [2]

Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:

2.1 Describir cómo se forma una señal periódica en el tiempo.
2.2 Aplicar las técnicas básicas para la medición de características esenciales en señales de uso común en circuitos eléctricos y electrónicos.
2.3 Calcular el ángulo de fase entre dos señales senoidales dadas, aplicando los modelos matemáticos correspondientes.
2.4 Analizar circuitos *RLC* y *RC* simples asociados a una fuente de excitación senoidal, por medio de la transformación fasorial.
2.5 Transformar una función dada en el dominio del tiempo a su forma fasorial.
2.6 Elaborar el diagrama fasorial correspondiente a señales senoidales relacionadas entre sí.
2.7 Calcular la impedancia de elementos resistivos, capacitivos e inductivos asociados a una fuente de excitación senoidal permanente.
2.8 Calcular la admitancia de elementos resistivos, capacitivos e inductivos asociados a una fuente de excitación senoidal permanente.

Dimensión Interpersonal [3]

Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:

3.1 Valorar la importancia de los estudios de investigadores en materia de electromagnetismo y sus aportaciones al desarrollo de la tecnología.
3.2 Apreciar la importancia que tienen los inductores y capacitores en sistemas electrónicos.

Introducción

En los capítulos anteriores se han visto los fundamentos para el análisis de los circuitos eléctricos lineales: los circuitos resistivos alimentados por fuentes de cd, se buscó la respuesta en cada caso y luego se estudió la respuesta natural en circuitos que contienen elementos que almacenan energía, como el inductor o el capacitor.

Ahora sabemos que un inductor en cd se comporta como un cortocircuito y, por su parte, el capacitor es como un circuito abierto en cd. Sin embargo, al ser alimentados por alguna fuente que proporcione una corriente eléctrica que esté cambiando su sentido de circulación en función del tiempo, su comportamiento será diferente. Nos estamos refiriendo a las *señales de corriente alterna* (*ca*).

El presente capítulo se enfoca en las técnicas básicas para el análisis de circuitos que contienen elementos que almacenan energía, alimentados por fuentes de ca. Se inicia con la descripción de las señales eléctricas más usadas, como las senoidales, las cuadradas y las triangulares y sus principales características, para continuar con la forma de medirlas, y terminar con su aplicación en circuitos de tipo resistivo-inductivo-capacitivo (*RLC*) y su respectivo análisis.

Un estudio especializado de las señales eléctricas se lleva a cabo en cursos de física o de ingeniería eléctrica; en este capítulo veremos los fundamentos de estas señales.

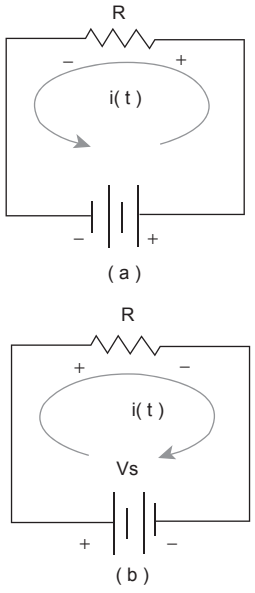


Figura 5.1 Circuito resistivo alimentado por una fuente de cd cuya polaridad se alterna en forma periódica. El sentido de la corriente cambia de la misma manera.

5.1 Señales periódicas

5.1.1 Descripción y características

COMPETENCIAS:

- Comprender los conceptos *corriente alterna y señal eléctrica*. [1]
- Identificar las características esenciales en una señal eléctrica y sus unidades de medida. [1]
- Describir cómo se forma una señal periódica en el tiempo. [2]

Consideremos el circuito mostrado en la figura 5.1; es un circuito resistivo alimentado por una fuente independiente de voltaje de cd, V_S. En el inciso *a* se representa una intensidad de corriente $i(t)$ que circula en sentido contrario a las manecillas de un reloj (*levógiro o positivo*), al que se le da el nombre de sentido convencional de la corriente, cuyo valor será $i(t) = \dfrac{v_s(t)}{R}$. Si de manera súbita y por alguna razón, que de momento no debe interesarnos, la polaridad de la fuente cambia en un instante definido, según se muestra en la figura 5.1*b*, el sentido de la corriente cambiará también como efecto del cambio de polaridad; ahora circulará en el sentido de las manecillas de un reloj (*dextrógiro o negativo*). Si se cambia de nuevo la polaridad de la fuente en un tiempo, y la regresa a su posición original (inciso *a*), la corriente volverá a circular con un sentido *levógiro,* y si la polaridad vuelve a la posición del inciso *b*, también la corriente volverá a cambiar su sentido de circulación. Así se *repetirá* el fenómeno cada vez que la fuente de alimentación *alterne* su polaridad. Observa que se está resaltando la manera de escribir los términos *repetir* y *alternar*, que son dos conceptos fundamentales que caracterizan a las señales que ahora estudiamos.

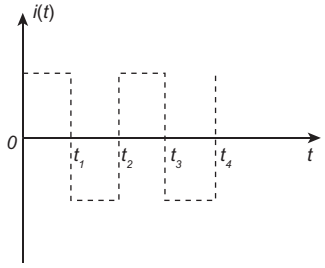


Figura 5.2 Gráfica que representa a la corriente en el circuito mostrado en la figura 5.1.

Al colocar un amperímetro analógico con escala de *cero al centro* para medir la intensidad de corriente en el circuito de la figura 5.1, podrás observar que la aguja indicadora se desplazará hacia la derecha del cero en la escala[1] cuando registra la situación del inciso *a* mientras que, por el contrario tendrá un desplazamiento hacia la izquierda del cero cuando se tiene la polaridad mostrada en el inciso *b*. Un amperímetro digital simplemente mostraría un valor de la intensidad con signo positivo para el inciso *a* y la misma magnitud, pero con signo negativo para el inciso *b*.

De la misma manera, si se conecta un voltímetro para registrar el voltaje en las terminales del resistor *R*, observarás una alternancia *periódica* en la polaridad del voltaje, ya sea con un instrumento analógico o uno digital.

Al graficar la corriente registrada por cualquier amperímetro se tiene una forma como la mostrada en la figura 5.2. En la gráfica se identifican los instantes en los que se produce la alternancia en la polaridad de la fuente como t_1, t_2, t_3, t_4. A este tipo de corriente eléctrica se le denomina *corriente alterna* (ca); por el hecho de alternar su sentido de circulación, o bien alternar la polaridad en el voltaje, tanto de la fuente como del elemento resistivo.

El caso descrito e ilustrado en las figuras 5.1 y 5.2 es sólo una manera de ejemplificar la *alternancia* en la polaridad de una fuente y en el sentido de circulación de la corriente en el circuito. Es una situación ideal, en la que el cambio de polaridad es súbito, y pasa de un valor máximo positivo a uno máximo negativo. En la realidad se puede provocar este tipo de alternancia mediante una fuente de alimentación de corriente alterna, para generar una *señal eléctrica*, ya sea de voltaje o de corriente. ¿Cómo lo hacen estas fuentes? No debe preocupar al lector por ahora saber cómo funcionan este tipo de fuentes de ca, ya que entre los objetivos de un curso básico de *circuitos eléctricos y electrónicos* no se contempla conocer el funcionamiento de estos dispositivos, sino más bien su aplicación a los circuitos y la respuesta de éstos a una función de excitación alterna.

El concepto de señal eléctrica se expresa de la siguiente manera:

> Una *señal eléctrica* es un conjunto de valores instantáneos de energía eléctrica que se presentan en sucesión en función del tiempo, que bien pueden ser en forma de voltaje, de corriente o de potencia. Estos valores instantáneos son generados por una fuente cuya salida obedece a algún sistema físico que puede modelarse matemáticamente a través de una función del tiempo. Dicho sistema tiene un periodo cuya duración es bien definida, o sea que se repite con una frecuencia determinada.

[1] La corriente con sentido levógiro puede denominarse *positiva*, mientras que la corriente con sentido dextrógiro puede denominarse corriente *negativa*, por convencionalismo.

Hay señales simétricas y no simétricas, como se verá en los siguientes párrafos.

Los aspectos relevantes de una señal periódica son:

- La polaridad de la fuente no permanece fija sino que alterna constantemente.
- Entonces, el valor de la señal es una función del tiempo. Sus valores instantáneos varían con el tiempo.
- La alternancia en la polaridad de la fuente provoca que el sentido de la corriente también tenga alternancias al mismo ritmo.
- La alternancia es un fenómeno que se repite periódicamente; tiene una frecuencia determinada por el número de veces que se presenta el fenómeno o ciclos en cada unidad de tiempo (ciclos/segundo). Por tanto, en términos matemáticos, como consecuencia de la periodicidad, se expresa como

$$f(t) = f(t + nT) \qquad \text{(ecuación 5.1)}$$

donde

$n \rightarrow$ entero positivo que representa el número de veces que se repite el fenómeno o número de *ciclos*.

$T \rightarrow$ *periodo* o tiempo de duración de cada *ciclo* o presentación del fenómeno.

La ecuación 5.1 significa que la función que representa a la señal eléctrica será igual en cualquiera de los ciclos que se le observe.

- La forma de la señal (voltaje o corriente) estará dada por las características propias de la fuente que la genera. En la figura 5.3 se muestran algunas formas de onda periódicas.

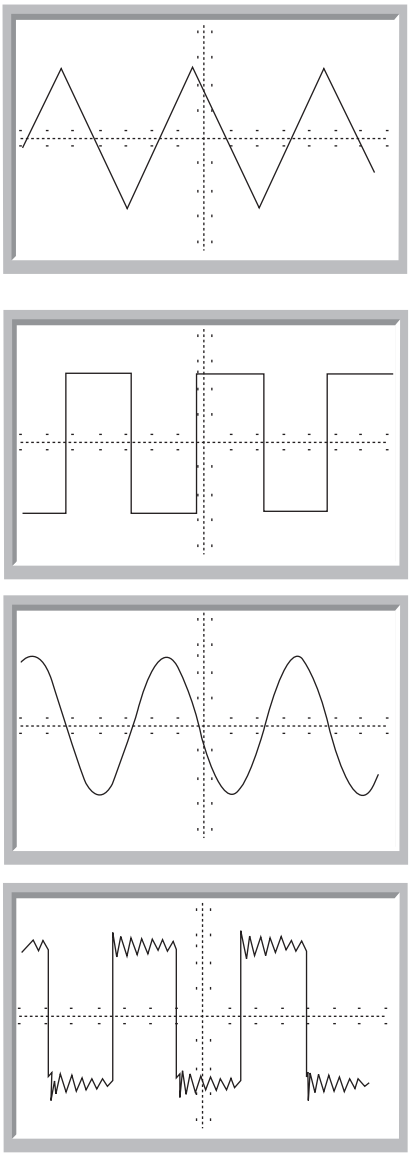


Figura 5.3 Ejemplos de formas de onda periódicas.

Las formas de onda típicas y de uso más común, aunque no las únicas, en los circuitos electrónicos son la *senoidal*, la *cuadrada* y la *triangular*. Cualquiera de ellas, para quedar bien definida, deberá presentar las siguientes características, figura 5.4.

- **Amplitud** (A_0). Característica que indica el valor máximo instantáneo que puede alcanzar la señal en algún tiempo. Se mide desde el nivel cero hasta el punto de valor máximo en la señal. Se expresa en las mismas unidades que corresponden a la señal (voltaje, corriente, potencia, joules, etcétera). A este valor también se le conoce como *valor pico* (V_p); así que, dependiendo del tipo de señal, expresa un voltaje pico, una corriente pico, potencia pico, etcétera.
- **Periodo** (T). Tiempo de duración de un ciclo o del fenómeno, antes de iniciar su repetición. Se mide entre dos puntos contiguos que poseen características iguales. Por ejemplo, entre dos crestas, entre dos nodos, entre dos valles, o entre un par de puntos cualesquiera con las mismas características, como mismo

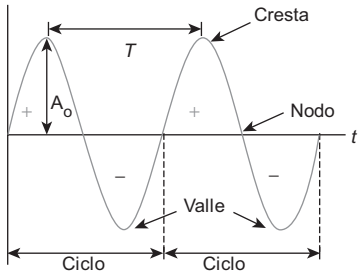


Figura 5.4 Principales características de una onda periódica y simétrica.

valor, misma dirección, mismo sentido. Se expresa en unidades de tiempo (en segundos o submúltiplos, s, m, μs, etcétera).

- **Ciclo** (C). Conjunto de valores instantáneos de una señal, o puntos de su gráfica que conforman el fenómeno o evento completo. Se mide entre dos puntos contiguos que poseen características iguales, como mismo valor, misma dirección, mismo sentido. Equivale a una vuelta completa (360° o 2π radianes) en el movimiento circular. El ciclo es una unidad para medir a un evento. Puede hablarse de un ciclo completo, ¼ ciclo, ¾ ciclo, ½ ciclo, etcétera.
- **Frecuencia**. Número de veces que se presenta el fenómeno en una unidad de tiempo. Se puede expresar de dos maneras:

$$f \Rightarrow \text{(ciclos/segundo)}.$$

$$1 \text{ hertz} = \frac{1 \text{ ciclo}}{\text{segundo}}$$

$$\text{o también} \Rightarrow \omega = 2\pi f \qquad \text{(ecuación 5.2)}$$

donde ω se mide en (radianes/segundo)

Existe una relación entre la frecuencia y el periodo de una señal donde se observa que uno es el inverso del otro, de la siguiente manera:

$$\text{frecuencia} = \frac{1}{\text{período}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T} \qquad \text{(ecuación 5.3)}$$

entonces, al sustituir la ecuación 5.2 en la 5.3, se tiene:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(ecuación 5.4)}$$

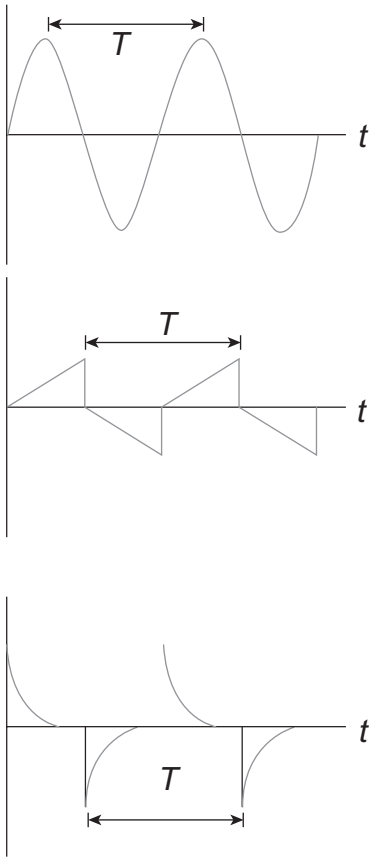


Figura 5.5 Ejemplos de señales periódicas simétricas.

- **Cresta** (V_p). Es el nombre que se le da al punto de valor máximo positivo en una onda periódica simétrica. Equivale a A_o. También nos da el *valor pico* de la señal.
- **Valle** ($-V_p$). Es el nombre que se le da al punto de mínimo valor o máximo negativo en una onda periódica simétrica. Equivale a $-A_o$. La cresta se localiza en el punto del *valor pico negativo*. Al valor de la señal que se mide desde una cresta hasta un valle se le conoce también como *valor pico a pico* (V_{pp}).
- **Nodo**. Es el punto en la gráfica donde la figura de la señal cruza al eje del tiempo. Tiene un valor *cero*, y *en cada ciclo se encuentran dos nodos*: uno cuando la onda pasa de valores positivos a negativos y el otro en el sentido contrario.

Una señal periódica puede ser:

Simétrica, cuando sus semiperiodos son simétricos respecto al eje del tiempo, y en cuyo caso tienen un valor promedio igual a *cero*. Un se-

miciclo negativo es como la imagen de espejo del semiciclo positivo o viceversa. La función *seno* es el ejemplo más característico de este tipo de ondas. En la figura 5.5 se muestran algunas de estas señales.

No simétrica, cuando sus semiperiodos no presentan simetría alguna respecto al eje del tiempo, figura 5.6.

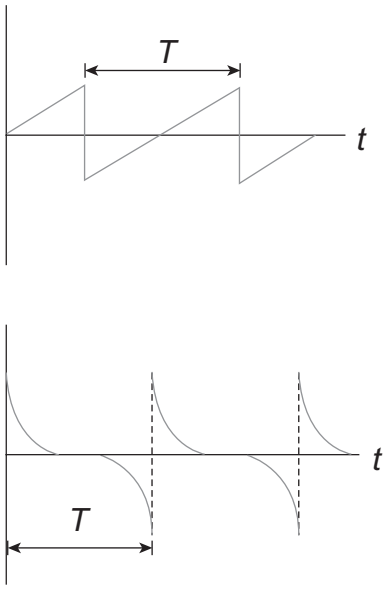


Figura 5.6 Señales no simétricas, cuando sus semiperiodos no presentan simetría alguna respecto al eje del tiempo.

5.2 Valor instantáneo, medio y eficaz en las señales eléctricas

En resumen, una *señal eléctrica* es un conjunto de valores instantáneos de energía eléctrica, que se presentan en sucesión como una función del tiempo, que bien pueden ser en términos de voltaje, de corriente o de potencia, son generados por alguna fuente que sigue un patrón de salida, el cual, a su vez, obedece a un modelo matemático bien definido. Por ejemplo, una señal muy común en los circuitos eléctricos y electrónicos es la *senoidal,* que obedece a un modelo matemático que está dado por

$$f(t) = A_o \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{(ecuación 5.5)}$$

La ecuación 5.5 representa a una señal cuyos valores instantáneos varían, conforme transcurre el tiempo, obedeciendo a un patrón dado por la función trigonométrica llamada *seno,* donde $f(t)$ representa a la función del tiempo, A_o es la amplitud de la señal, ω representa la frecuencia de la señal expresada en *rad/s,* y t es el tiempo, la variable independiente de la función. A partir de este modelo puede determinarse el valor instantáneo de la señal para un tiempo t dado, figura 5.7. Considera el siguiente ejemplo ilustrativo.

EJEMPLO 5.1

¿Cuál será el voltaje en el tiempo t = 5.7 ms de la señal mostrada en la figura 5.7?

Solución

Datos:

$A_o = 10$ V

$T = 10$ ms

$T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$v(5.7 \text{ ms}) = ?$

Planteamiento:

La señal obedece a un patrón dado por una función senoidal en el tiempo. Por tanto se puede modelar por la ecuación 5.5:

$$f(t) = A_0 \operatorname{sen} (\omega t + \phi)$$

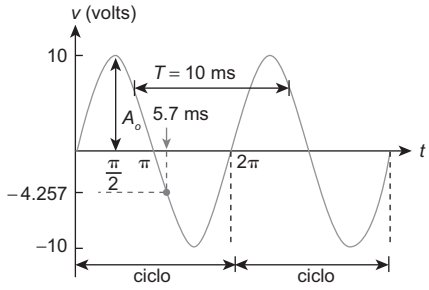


Figura 5.7 Onda senoidal con amplitud A_o y periodo T.

Desarrollo:

Según las ecuaciones 5.2 y 5.3 la frecuencia de la señal es:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10 \times 10^{-3} s} = 100 \text{ Hz}$$

o también:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \text{ (100 Hz)} = 628.32 \text{ rad/s}$$

Al sustituir los datos en la ecuación 5.5 el modelo de esta señal en particular será:

$$v(t) = 10 \text{ sen } 628.32\, t \text{ volts} \qquad \text{(ecuación 5.6)}$$

Así que el voltaje instantáneo para $t = 5.7$ ms, será:

$$v(5.7 \text{ ms}) = 10 \text{ sen } [(628.32 \text{ rad/s})(5.7 \times 10^{-3} \text{ s})] \text{ volts}$$
$$v(5.7 \text{ ms}) = 10 \text{ sen } (3.5814 \text{ rad}) \text{ volts}$$

Resultado:

$$v(5.7 \text{ ms}) = -4.257 \text{ V}$$

La representación gráfica de este resultado se muestra en la figura 5.7 mediante un punto en gris claro, cuyas coordenadas son respectivamente

$$t = 5.7 \text{ ms}, \; v(t) = -4.257 \text{ V} .$$

.....

Como se muestra en el ejemplo 5.1, una vez definido el modelo particular de una señal, puede calcularse el valor instantáneo del voltaje en cualquier instante al sustituir el valor del tiempo t de interés particular. Esto significa que para cada tiempo se tiene un valor de voltaje; de ahí que *el voltaje sea una función del tiempo* y que la señal es un conjunto de valores instantáneos que obedecen a un patrón bien definido.

Sin embargo, en muchos casos prácticos, cuando se tiene una señal eléctrica no interesa un *valor instantáneo* en particular, se requiere conocer el efecto neto de esta señal sobre algún dispositivo o sistema que esté alimentando; es cuando se habla del *valor de la señal.* Este valor será el resultado que en conjunto producen la totalidad de los valores instantáneos, durante el tiempo en que se aplique la señal. Se trata de un valor promedio de la señal, el cual se expresa de diferentes maneras:

a) Valor medio (o promedio aritmético).
b) Valor eficaz (o promedio cuadrático).

Existe una relación directa entre estas formas de expresar el valor de una señal; por lo que, una vez conocido el modelo particular de una

señal, es posible encontrar las diferentes formas de expresar su valor; o bien, conociendo alguna de las formas de expresar el valor de la señal se determinan otros, incluso valor pico, o valor pico a pico, por ejemplo.

5.2.1 Valor medio de una señal

COMPETENCIA:
Comprender el concepto *valor medio* de una señal. [1]

Se da el nombre de *valor medio* de una señal al promedio aritmético del conjunto de valores instantáneos que configuran a la señal, y se obtiene al sumar el total de los valores instantáneos y dividirlo entre el número de ellos. Su representación matemática es:

$$V_{med} = \frac{\Sigma n}{n} \qquad \text{(ecuación 5.7)}$$

Donde V_{med}: representa el valor medio de la señal.
Σn: es la suma total de los valores instantáneos.
n: es el número de valores instantáneos.

La ecuación 5.7 proporciona el promedio aritmético del conjunto de *n valores discretos* distribuidos en función del tiempo y que constituyen a una señal. Sin embargo, al tratarse de una función *continua*, donde cada uno de los valores instantáneos de la señal es de una duración infinitesimal en el tiempo, deberá hacerse un ajuste en la manera de obtener la suma de estos valores, dado por el numerador de la ecuación 5.7; el manejo matemático deberá ser también infinitesimal:

$$V_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad \text{(ecuación 5.8)}$$

Donde:

V_{med}: representa el valor medio de la señal.
T: es el periodo o tiempo de duración de un ciclo completo.
$f(t)$: es la función del tiempo considerada

$\int_0^T$: integral que representa la suma de los valores instantáneos de la función $f(t)$ comprendidos de 0 a T.

Las formas de onda tales que $f(t) = -f(t + ½\ T)$, es decir, aquellas señales cuyos semiperiodos son simétricos respecto al eje del tiempo, tienen un *valor medio igual a cero*. Un caso típico de estas señales es la onda senoidal $f(t) = A_0 \operatorname{sen} \omega t$, como se ve a continuación. Se aplica la ecuación 5.8:

$$V_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T A_o \operatorname{sen}\omega t\,dt$$

Donde $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, entonces:

$$V_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T A_o \operatorname{sen}\frac{2\pi}{T}t\,dt = \frac{A_o T}{2\pi T}\left|-\cos\frac{2\pi}{T}t\right|_0^T$$

$$V_{med} \quad -\frac{A_o}{2\pi}\left[\cos\frac{2\pi}{T}T - \cos 0\right] = -\frac{A_o}{2\pi}\left[(1)-(1)\right] = 0$$

De la misma manera a cualquier función periódica y simétrica $f(t)$ se le aplica la ecuación 5.8 y nos conducirá a un resultado igual a cero.

COMPETENCIAS:
- Comprender el concepto *valor eficaz* de una señal. [1]
- Comprender las expresiones matemáticas que modelan el comportamiento de las señales periódicas más comunes. [1]

5.2.2 Valor eficaz de una señal

Antes de tratar el concepto de *valor eficaz* en una señal eléctrica, pensemos primero en una intensidad de corriente que sea constante (que no varíe su valor con el tiempo), y que circula por algún elemento de circuito, que puede ser por ejemplo un resistor; este resistor disipará cierta cantidad de potencia eléctrica con un valor constante al que podemos llamar P. Ahora bien, si a través del mismo resistor se hace circular una corriente, ya no de valor constante, sino de una señal alterna y periódica como la senoidal, el resistor podrá disipar una potencia que le llamaremos p(t).

Observa que la expresión P, para la potencia disipada en el resistor se refiere a un valor constante, es decir que no varía con el tiempo; mientras que $p(t)$ proporciona valores instantáneos de potencia que varían en función del tiempo, dado que el valor de la corriente también es variable con el tiempo.

Ahora piensa en el efecto que producen sobre el mismo resistor del ejemplo las dos señales mencionadas, una de valor constante y otra variable con el tiempo. Cuando el promedio del conjunto de valores instantáneos en la potencia $p(t)$ produce el mismo efecto que el producido por la potencia constante P, se dice que los efectos producidos por ambos tipos de corriente, son equivalentes.

¿Por qué una señal periódica y simétrica tiene un valor promedio diferente de cero? Si en la señal alterna citada nos referimos al *promedio aritmético*, éste deberá ser *cero*; pero si es al *promedio de los valores instantáneos elevados al cuadrado* (lo que anula los signos negativos) obtenemos un valor diferente de cero. A este promedio se le llama *valor eficaz* de la señal o bien *el valor promedio cuadrático* (*rms*) que se representa por V_{rms}[2]. El valor *eficaz* o *rms* de una señal se obtiene mediante:

$$V_{rms} \quad \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[f(t)\right]^2 dt} \qquad \text{(ecuación 5.9)}$$

Por ejemplo, si $f(t) = A_o \operatorname{sen} \omega t$, su valor eficaz se obtiene mediante la ecuación 5.9 de la siguiente manera:

[2] *rms* son las iniciales de los términos en inglés *root-mean-square* (raíz media de cuadrados) usadas para denominar a un valor eficaz, tanto de voltaje como de corriente.

$$V_{rms} \quad \sqrt{\frac{1}{T} \; {}_0^T \left[A_o \, sen \quad t \right]^2 dt}$$

Tabla 5.1

Nombre	Modelo	Valor promedio	Valor eficaz (*rms*)
Senoidal	$f(t) = A_o \operatorname{sen}\omega t$ Periodo: $0 < \omega t < 2\pi$	$V_{med} = 0$	$V_{rms} = \frac{A_o}{\sqrt{2}}$ $V_{rms} = 0.7071\, A_o$
Senoidal rectificada en onda completa.	$f(t) = A_o \operatorname{sen}\omega t$ Periodo: $0 < \omega t < \pi$	$V_{med} = \frac{2A_o}{\pi}$ $V_{med} = 0.636\, A_o$	$V_{rms} = \frac{A_o}{\sqrt{2}}$ $V_{rms} = 0.7071\, A_o$
Senoidal rectificada en media onda.	$f(t) = A_o \operatorname{sen}\omega t$ Periodo: $0 < \omega t < 2\pi$	$V_{med} = \frac{A_o}{\pi}$ $V_{med} = 0.318\, A_o$	$V_{rms} = \frac{A_o}{\pi}$ $V_{rms} = 0.5\, A_o$
Cuadrada	$f(t) = A_o$ periodo: $0 \rightarrow T$	$V_{med} = 0.5 A_o$	$V_{rms} = \frac{A_o}{2}$ $V_{rms} = 0.5 A_o$
Exponencial	$f(t) = A_O e^{\frac{A_O t}{T}}$ Periodo: $0 \rightarrow T$	$V_{med} = 1 + e^{-Ao}$	$V_{rms} = \sqrt{\frac{A_o}{2}}$
Triangular	$f(t) = \frac{2A_O}{T/2} + A_O$ Para $-t_1 < t < t_1$ $f(t) = -\frac{2A_O}{T/2} + A_O$ Para $t_1 < t < t2$	$V_{med} = 0$	$V_{rms} = \frac{A_o}{\sqrt{3}}$

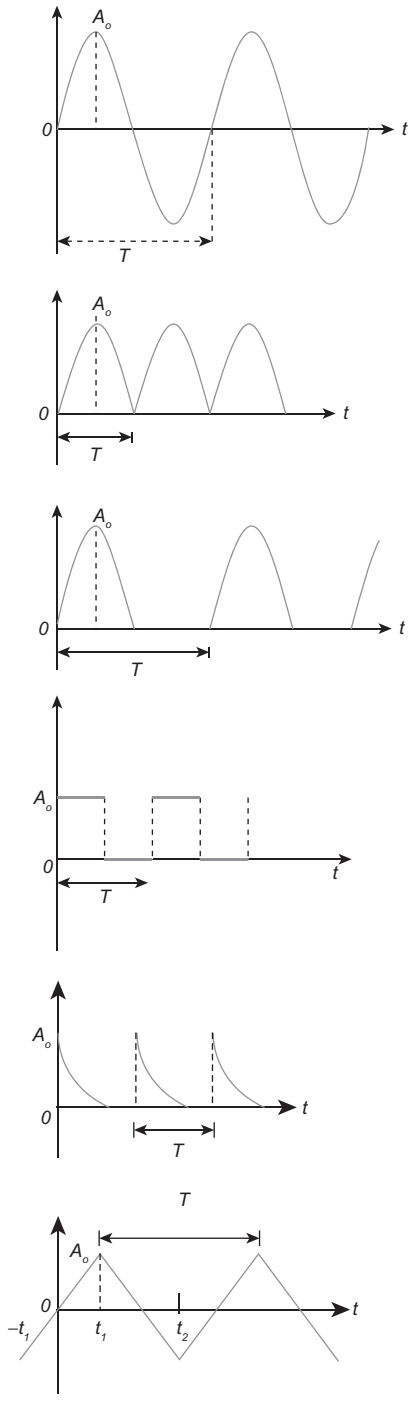


Figura 5.8 Algunas formas de onda con sus respectivos valores medio y eficaz.

COMPETENCIA:
Hacer una descripción general de un generador de señales. [1]

Al desarrollar la expresión anterior se tiene la forma que permite calcular el valor eficaz de toda señal que obedezca a un patrón $f(t) = A_o$ sen ωt, que es:

$$V_{rms} = \frac{A_o}{\sqrt{2}} \qquad \text{(ecuación 5.10)}$$

Así, el valor *rms* de toda señal periódica se puede obtener al sustituir en la ecuación 5.9 la función $f(t)$ que corresponda a esa señal en particular. En la figura 5.8 se muestran algunas formas de onda con sus respectivos valores medio y eficaz. Estos resultados se obtienen con el desarrollo matemático de las ecuaciones 5.8 y 5.9, en cada caso. En la tabla 5.1 se muestran el modelo, valor promedio y eficaz de diferentes formas de onda.

Para medir voltajes o corrientes en señales alternas en el laboratorio se utilizan los instrumentos de medición de ca (voltímetro de ca, amperímetro de ca). Las lecturas que registran y reportan los instrumentos de medición de ca, tanto analógicos como digitales, son valores *rms*. Aunque debe mencionarse que estos medidores no registran señales en todas las frecuencias sino que tienen una capacidad limitada para su operación a rangos que en promedio no van más allá de 1200 o 1500 Hz. Cada instrumento tiene su propia sensibilidad y es necesario verificarla en el instructivo de operación que proporciona su fabricante.

Para observar tanto los valores como la forma de las señales eléctricas se utiliza el osciloscopio, instrumento cuya sensibilidad varía según el tipo y la marca. Algunos osciloscopios son sensibles a frecuencias hasta del orden de los gigahertz (10^9 Hz).

5.3 Generadores de señales

Para la realización de muchos experimentos en el laboratorio de electrónica se utilizan los *generadores de señales*, equipos que producen voltajes alternos en diferentes frecuencias y formas. Los más comunes son los que entregan tres tipos de señales: senoidales, cuadradas y triangulares.

Los generadores que se utilizan para producir voltajes senoidales en el rango de bajas frecuencias (entre 10 Hz y 100 kHz), consisten en circuitos osciladores como parte de un conjunto de circuitos formados por resistencias y capacitores (circuitos *RC*). Los voltajes que se obtienen de estos equipos dependen en mucho de su tipo y modelo, así como también del fabricante.

Actualmente se pueden encontrar equipos que entregan voltajes que pueden ser del orden de los microvolts hasta los 10 volts *rms*; con una selección de precisión desde 1 hasta 10% sin carga con gran estabilidad en el tiempo.

Desde luego que al aplicar una carga al generador variará la precisión de éste en función de su calidad; de ahí que los fabricantes especifican

el valor de la resistencia de carga mínima ($RL_{mín}$) que deberá conectarse a un generador de señales. Por ejemplo, si un fabricante especifica una $R_{Lmín} = 1\ k\Omega$ con 1% de precisión significa que cuando se aplique una carga de $1\ k\Omega$ a la salida del generador, el voltaje que éste entregará no disminuirá en más de 1% del valor de salida a circuito abierto.

Los generadores que producen señales alternas de altas frecuencias (100 kHz a 100 MHz) contienen normalmente osciladores que funcionan en conjunto con circuitos formados por bobinas y capacitores (circuitos *LC*). Estos equipos tienen controles de ajuste para la frecuencia de manera similar a los generadores *RC*. La amplitud del voltaje de salida puede variar en valores que van desde el orden de los microvolts hasta un poco más de 1 volt con precisiones de 10% aproximadamente. Su impedancia de salida es del orden de los 50 o 75 Ω. Los fabricantes recomiendan que la carga para estos equipos tenga el mismo valor con el propósito de lograr un eficaz acoplamiento entre generador y receptor.

En algunos experimentos de electrónica en los laboratorios escolares y de investigación se requieren los generadores de señales diferentes a las senoidales; por ejemplo, la señal cuadrada o la triangular, figura 5.8, cuyo funcionamiento y características son muy similares a los generadores de señal senoidal.

También es muy común el uso de *generadores de pulsos* (de voltaje), entre los que destacan los de pulsos rectangulares. Los más utilizados en los laboratorios de experimentación proporcionan salidas que van desde 0.1 volts hasta los 10 volts, normalmente con opción de elegir polaridad. Su precisión es del orden de 10 % aproximadamente. El rango de frecuencias de este tipo de generadores lo expresan en función de sus periodos, que son en un rango de 100 nanosegundos (ηs) hasta los 100 milisegundos (ms) (equivalente a frecuencias de 10 Hz a 10 MHz), con un ajuste del ancho de pulso de 50 ηs a 50 ms. La impedancia interna de estos generadores es relativamente baja (50 Ω aproximadamente), lo que permite usarlos como fuentes de voltaje.

Es recomendable que el uso de estos equipos se haga previa consulta del instructivo de operación correspondiente, que emite el fabricante, con la finalidad de aprovecharlos óptimamente y evitar su deterioro o destrucción.

5.4 Medición de las señales eléctricas

COMPETENCIAS:

- Comprender las técnicas para medir las características esenciales de señales de uso común en circuitos eléctricos y electrónicos básicos, mediante el uso de un osciloscopio [1]
- Aplicar las técnicas básicas para la medición de características esenciales en señales de uso común en circuitos eléctricos y electrónicos. [2]

Antes de aplicar la señal de algún generador a un dispositivo, equipo o circuito en particular es recomendable verificar las características de la señal que se aplicará; esto es, observarla con el osciloscopio para asegurarse de lo que el generador está entregando a su salida. Con el osciloscopio pueden realizarse mediciones diferentes, entre las que se destacan las siguientes: medición de voltajes con dependencia temporal arbitraria, de fases y desfasamientos entre señales, de atenuación o ganancia, de frecuencias e intervalos de tiempo.

Con un osciloscopio, y el apoyo de algunos equipos adicionales, también puedes realizar mediciones de corriente, o bien representar las

curvas características de componentes semiconductores o las curvas de respuesta de frecuencia. En la actualidad es común disponer en los laboratorios escolares de osciloscopios de doble canal, mediante los cuales se visualizan simultáneamente dos señales de dependencia temporal arbitraria. Las dos señales se aplican por separado en las entradas del osciloscopio.

5.4.1 Mediciones con el osciloscopio

Al utilizar el osciloscopio como instrumento de medición debes tomar las siguientes precauciones:

1. Todo osciloscopio posee en la parte posterior un interruptor selector de voltaje de alimentación que puede ser para 110 V o 220 V; hay que asegurarse de que tenga la posición correcta de este selector, antes de conectar la clavija al tomacorriente de la red. Las redes de energía eléctrica en los laboratorios escolares en la República Mexicana son de 117 V_{rms} a una frecuencia de 60 Hz.
2. Verificar que el interruptor de "encendido-apagado" (ON/OFF) en la parte frontal del instrumento se encuentre en la posición OFF (apagado) antes de conectar la clavija al tomacorriente.
3. Antes de accionar el interruptor (ON/OFF) a la posición ON (encendido) debes manipular los controles de la siguiente manera:

   a) Los controles INT (intensidad), FOCUS (enfoque) VERT POS (posición vertical) y HOR POS (posición horizontal), deberán colocarse en una posición media entre el mínimo (posición extrema en sentido levógiro) y el máximo (posición extrema en sentido dextrógiro).
   b) AC-GND-DC (corriente alterna-tierra-corriente directa) deberá estar en posición GND (tierra o común).
   c) TRIG (disparo) colocar en posición AUTO (automático).
   d) TRIG SOURCE (fuente de disparo) colocar en posición INT (disparo interno).
   e) TIME/DIV (tiempo/división) iniciarla en posición entre 0.5 ms/div y 1 ms/div.

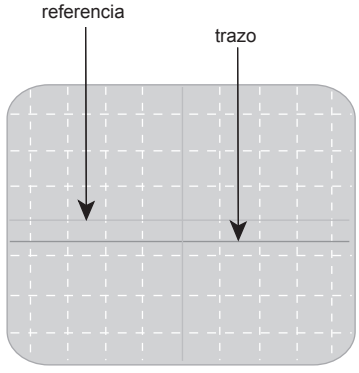


Figura 5.9 Trazo que se observa al encender el osciloscopio.

4. Colocar el interruptor de encendido en posición ON (encendido) y esperar de 30 segundos a 1 minuto de calentamiento para el filamento emisor de electrones cuando el osciloscopio es de tubo de rayos catódicos (TRC). Girar entonces el control de intensidad (INT) en ambos sentidos hasta que aparezca un trazo recto horizontal en la pantalla, figura 5.9.
5. Ajustar el enfoque (FOCUS) hasta que el trazo en la pantalla sea una línea nítida y brillante. Con el control de posición vertical VERT POS desplazar el trazo para que éste coincida con la línea horizontal de referencia de la pantalla, figura 5.10.
6. En ocasiones el trazo no queda totalmente horizontal, por lo que habrá que accionar el control TRACE ROTATION hasta lograr la coincidencia con la línea de referencia.

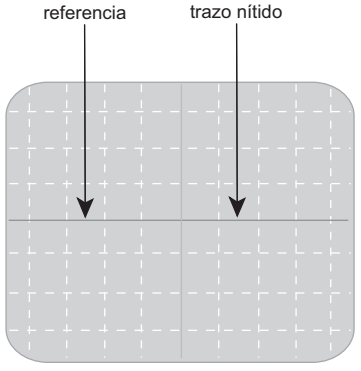


Figura 5.10 Trazo nítido ubicado en el nivel de referencia o cero.

7. Colocar las puntas de prueba del osciloscopio a través de las cuales se le aplicará la señal a medir, procurando que cada conector terminal quede debidamente fijo. Las puntas de prueba están formadas por un cable coaxial, cuyo hilo central se considerará como positivo (+) y la malla que le cubre será tomada como negativo (–) o común (tierra). Hay puntas convencionales, para medir pequeños voltajes, y las puntas atenuadas para medición de voltajes mayores (consulta el instructivo de operación de cada equipo).

El osciloscopio quedará preparado para recibir señales desde el exterior, a través de sus puntas de prueba.

5.4.2 Medición de voltajes de ca

Ahora debes seguir los siguientes pasos para utilizar el osciloscopio como instrumento de medición para voltajes de ca:

1. Para medir el voltaje entregado por un generador de señales, deberás colocar el selector AC-GND-DC en la posición AC y proseguir de la siguiente manera:

   a) Colocar el selector VOLT/DIV (volts por división). en la posición apropiada según la magnitud del voltaje a medir. Si se desconoce esta magnitud, el selector se colocará en la posición de mayor capacidad

   b) Se conecta directamente la punta de prueba del osciloscopio a la salida del generador, positivo de la punta con positivo de la salida del generador, y la tierra con tierra, figura 5.11. Cuando se mide una señal en un circuito impreso deberá colocarse la punta de prueba en el punto de interés, procurando que la terminal de tierra (–) se ubique en la posición de *común* más cercana posible al positivo de la punta de prueba, para evitar la superposición de señales no deseadas que puedan perturbar la medición.

   c) Una vez que aparece la señal del generador en la pantalla (o display) del osciloscopio, se irá cambiando de posición la perilla VOLT/DIV hasta encontrar la escala que permita ver el trazo completo y ampliamente, como se puede ver en la figura 5.12.

   d) Cuando se ha logrado tener en pantalla la señal completa, de pico a pico, (en lo vertical) se accionará la perilla TIME/DIV (base de tiempo) para lograr ampliar o disminuir horizontalmente el trazo hasta que se distinga la forma de la señal y conseguir que se aprecie por lo menos un ciclo completo, figura 5.12.

2. En este caso no es indispensable hacer coincidir el trazo con la línea horizontal principal de referencia. De hecho *se puede tomar cualquiera de las líneas auxiliares horizontales como referencia*, y a partir de ésta contar el número de divisiones, en dirección vertical, que abarca la señal de pico a pico y esto multiplicarlo por el valor que indique la perilla selectora VOLT/DIV. Por ejemplo, en la figura 5.12 se tiene un trazo senoidal que accionando la perilla VERT POS (posición

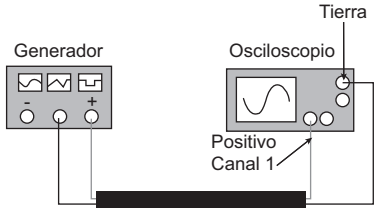


Figura 5.11 Conexión de las puntas de prueba a la salida del generador de señales. Positivo con positivo y tierra con tierra.

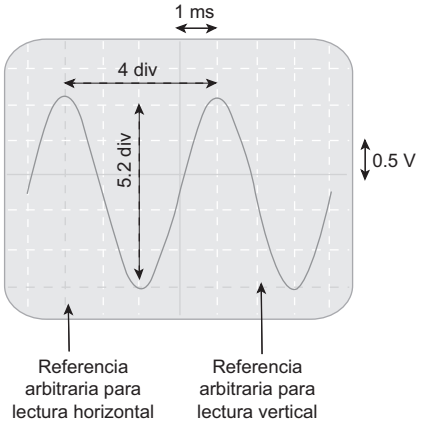


Figura 5.12 Lectura de las características de una señal senoidal con el osciloscopio.

vertical) se ha ubicado de manera tal que sus valles coinciden con una línea de referencia tomada arbitrariamente (se señala en la figura), y a partir de ésta se cuentan hacia arriba un total de 5.2 divisiones que abarca la señal de pico a pico. Si la perilla VOLT/DIV estuviera en la posición 0.5 V/div, entonces, el voltaje de pico a pico de esta señal deberá ser:

$$\underbrace{(5.2\ \text{div})}_{\Uparrow} \times \underbrace{0.5\text{V}/\text{div}}_{\Uparrow} = \underbrace{2.6\text{V}_{pp}}_{\Uparrow}$$

Número de divisiones del trazo en dirección vertical.	Posición del selector VOL/DIV.	Valor de la lectura del *voltaje pico a pico.*

Este voltaje de *pico a pico* puede convertirse a su equivalente expresado como *voltaje pico* y *voltaje eficaz*, de acuerdo con lo visto en secciones anteriores:

$$V_p = \frac{1}{2} V_{pp} = \frac{1}{2}(2.6\text{V}pp) = 1.3\text{V}_p$$

$$\text{V}_{rms} = 0.7071\ \text{V}_\text{p} = 0.7071\ (1.3\ \text{V}_\text{p}) = 0.9192\ \text{V}_{rms}.$$

5.4.3 Medición del periodo y la frecuencia de una señal

Cuenta el número de divisiones que en lo horizontal abarca un ciclo completo de la señal. El ciclo puede considerarse entre dos puntos cualesquiera que tengan las mismas características. Por ejemplo en la figura 5.12 se toma la distancia horizontal entre dos crestas, en este caso son cuatro divisiones. Si el control de base de tiempo TIME/DIV estuviera en la posición 1 ms/div, se deberá interpretar que el periodo de este ciclo es de

$$\underbrace{(\ 4\ )}_{\Uparrow} \times \underbrace{(\ 0.001\,\text{s}\ )}_{\Uparrow} = \underbrace{0.004\ \text{s} = 4\,\text{ms}}_{\Uparrow}$$

Número de divisiones del trazo en dirección horizontal.	Posición del selector TIME/DIV.	Valor de la lectura del PERÍODO.

Se tiene entonces que $T = 4$ ms, por tanto, la frecuencia de la señal será:

$$f = \frac{1}{T} = = 250\ \text{Hz}$$

5.4.4 Medición de una señal de ca asociada a un voltaje de cd

Es el caso de una señal de ca que se encuentra superpuesta a un trazo de cd. El efecto de los dos trazos será que la señal alterna conservará sus propias características sólo que no tendrá su eje horizontal en un voltaje de *cero*, sino que éste se trasladará hasta el trazo de voltaje de cd. Por ejemplo, si se tratara de una señal senoidal como la ejemplificada anteriormente, de 1.3 Vp y ésta estuviera superpuesta a un voltaje de +5 volts de cd, el efecto de la combinación de voltajes de cd y ca será que el eje de simetría de la onda se verá trasladado hacia la parte superior (sentido positivo) de la pantalla del osciloscopio, tantas divisiones de la escala como el equivalente a los 5 volts de cd (figura 5.13*a*); entonces su cresta se encontrará a un valor de

$$(5\ \text{V} + 1.3\ \text{V}) = 6.3\ \text{V},$$

y su valle estará en

$$(5\ \text{V} - 1.3\ \text{V}) = 3.7\ \text{V}$$

Si el caso fuera el de la misma señal superpuesta a un voltaje de –5Vcd, se tendrá el efecto contrario, la onda desplaza su eje hacia la parte inferior de la pantalla (sentido negativo) del osciloscopio, su cresta se ubicará en

$$(-5\ \text{V} + 1.3\ \text{V}) = -3.7\ \text{V}$$

su valle se ubicará en

$$(-5\ \text{V} - 1.3\ \text{V}) = -6.3\ \text{V}$$

como muestra la figura 5.13*b*.

Tomemos como ejemplo el caso de la señal que se superpone a un voltaje de +5Vcd. Si el control VOLT/DIV estuviera en la posición 0.5 V/div, como se ejemplificó en el paso (5), el trazo de 5 Vcd debería estar 10 divisiones arriba del eje principal que se toma como referencia o *cero*. Esto provoca que el trazo "salga" de la pantalla del osciloscopio.

Es una situación parecida a la que se presenta en todo medidor analógico cuando la magnitud de la energía que se mide supera a la escala que se utiliza. Esto requiere que se haga un cambio de escala; por tanto el control VOLT/DIV deberá pasar a una posición que permita registrar la superposición de los dos voltajes; por ejemplo a 2.5 V/div (o un valor que permita el osciloscopio que se use).

Al tener el control AC-GND-DC en posición dc, la señal senoidal se verá superpuesta al trazo de cd 5 volts; es decir, 5 V hacia arriba de la línea de referencia, lo que equivale a dos divisiones de la escala, como muestra la figura 5.14*a*. Si se cambia el control a la posición *ac*, automáticamente el instrumento eliminará el efecto del trazo de cd y desplegará únicamente el trazo senoidal, ubicándolo en la línea que se haya escogido como nivel de referencia *cero* (figura 5.14*b*). Ahora se podrá tomar la lectura de la señal senoidal únicamente. Al hacer

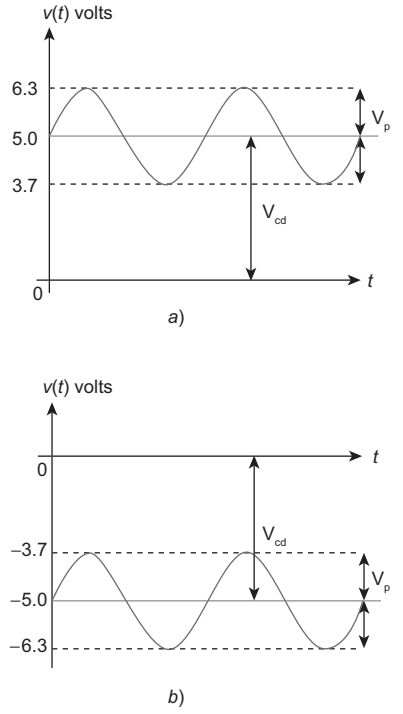


Figura 5.13 *a)* Señal senoidal superpuesta a un voltaje de +5Vcd. *b)* Señal senoidal superpuesta a un voltaje de –5Vcd.

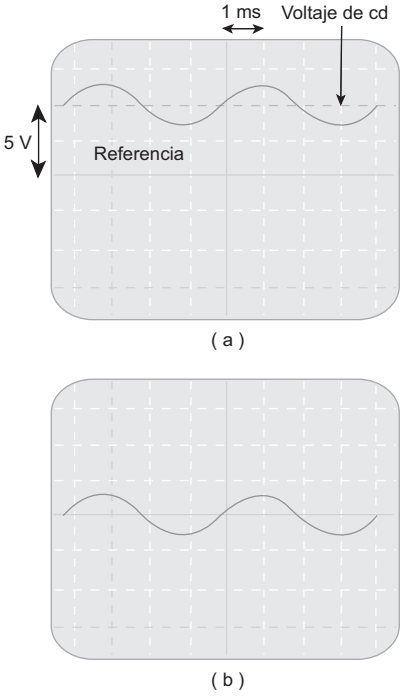


Figura 5.14 *a)* Señal superpuesta a un voltaje de cd lectura en cd. *b)* Lectura en ca, se elimina el trazo del voltaje de cd.

lecturas en *ac* probablemente se requiera aumentar el tamaño del trazo para mejorar los detalles. Puede cambiarse la escala VOLT/DIV, sin que se altere la magnitud real de la señal que se estudia; recuerde que el efecto del trazo de cd es eliminado en esta posición.

5.4.5 Medición de pulsos

En los circuitos lógicos utilizados en los sistemas digitales es muy común encontrar pulsos eléctricos que representan alguna información que deberá ser procesada o interpretada como parte de un sistema de procesamiento de datos. Pueden ser pulsos de diferentes características, estar aislados, o bien, sobrepuestos a algún otro tipo de señal. En los sistemas computacionales, la mayoría de las veces se tiene pulsos rectangulares, lo que simplifica su estudio a través del osciloscopio. Para ello se procede de manera muy similar a lo que se ha descrito anteriormente.

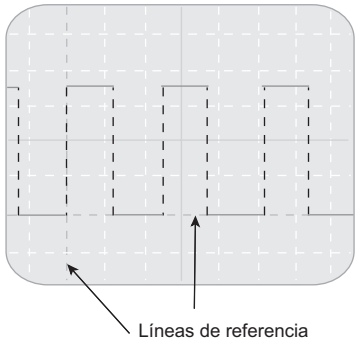


Figura 5.15 Vista de pulsos rectangulares en el osciloscopio. El trazo se ubica respecto a líneas de referencia cualesquiera.

1. La perilla de control AC-GND-DC se coloca en posición DC.
2. La punta de prueba del osciloscopio se coloca en el punto del circuito o sistema donde se tiene la presencia del pulso en consideración. Recuerda colocar la terminal negativa (tierra o común) en un punto apropiado y próximo al punto donde se observará el pulso.
3. Mediante la perilla VOL/DIV se ajusta la sensibilidad vertical para tener una escala apropiada a la magnitud del pulso, hasta poder ver en pantalla la *altura* total del mismo.
4. Manipulando la perilla TIME/DIV se logrará ampliar o disminuir lo *ancho* del pulso para poder apreciar en pantalla dos o tres pulsos completos, figura 5.15.
5. Con los controles de VERT POS (posición vertical o *Y*) y HOR POS (posición horizontal o *X*) se ubica el trazo respecto a la cuadrícula de la pantalla del osciloscopio hasta apreciar el trazo claramente. Recuerda que no es forzoso que el trazo esté referido a las dos líneas o ejes principales que están centradas en la pantalla; pueden tomarse cualesquiera líneas, horizontal y vertical, como referencia para medir las características del trazo que se estudia. En la figura 5.15 se muestra un pulso rectangular cuya altura es de 3.5 divisiones (dimensión vertical) y su anchura de 1.2 divisiones (dimensión horizontal). Estas dimensiones deberán ser multiplicadas por el valor que tienen las perillas VOLT/DIV y TIME/DIV, para obtener el *voltaje* y el *periodo* del pulso, respectivamente.
6. Cuando se necesita conocer las características (amplitud y periodo) de un pulso que está sobrepuesto a una señal, como se ve en la figura 5.16, se procederá de la misma manera, manipulando los controles necesarios hasta "aislar" en la pantalla el sector de la imagen que nos interesa.

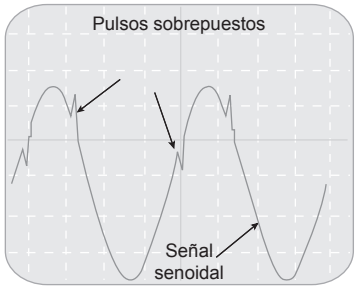


Figura 5.16 Pulsos sobrepuestos a una señal senoidal.

5.4.6 Medición en señales no senoidales

Para medir tanto voltaje como periodo (o frecuencia) en señales que no tienen una forma senoidal o en general una forma regular, se procede

de la misma manera que se hace con las señales senoidales, para ver el trazo completo y claro en la pantalla del osciloscopio. En estos casos basta con identificar los puntos donde inicia y termina un ciclo completo de la señal de interés, así como los puntos de mayor y menor valores. Una vez identificado un ciclo, se manipulan los diversos controles ya conocidos para posicionar al trazo en niveles de referencia apropiados para determinar sus dimensiones a lo vertical y a lo horizontal. En la figura 5.17 se muestra un ejemplo de señal irregular, pero periódica, para su estudio.

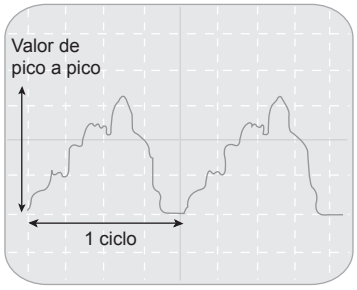


Figura 5.17 Para medir las características de una señal periódica de forma no regular se procede con el osciloscopio de igual manera que en el caso de las señales senoidales.

5.4.7 Medición del ángulo de fase entre señales senoidales

Cuando se tienen dos señales senoidales, *A* y *B* de la misma frecuencia, sin importar su amplitud, y alguna de ellas, por ejemplo *A*, "inicia" en el tiempo antes que la *B,* se dice que la señal *A* adelanta a la *B* con un ángulo determinado que se conoce como *ángulo de fase* entre señales (no tiene sentido hablar de *ángulo de fase* entre dos señales de diferente frecuencia). Este ángulo se expresa tanto en *grados* como en *radianes*, y se mide con el osciloscopio por dos métodos, el de *barrido disparado* y el de las *figuras de Lissajous*, cuyos procedimientos se describen a continuación:

5.4.7.1 Método del barrido disparado

1. Una de las señales (*A*) se aplica al osciloscopio a través de la entrada del canal 1, mientras que la segunda señal (*B*) se aplica al canal 2.
2. Al manipular los controles VOLT/DIV en cada canal se logrará ver el trazo completo de cada señal en la dimensión vertical.
3. Al manipular el control TIME/DIV (sólo hay uno para los dos canales) se ampliarán o reducirán simultáneamente las dos señales en la dimensión horizontal, figura 5.18*a*.
4. Una vez que se tienen en pantalla las dos señales, se posicionan para hacer coincidir sus ejes de simetría sobre alguna línea horizontal de referencia en la carátula. Para esto se manipula el control vertical (*Y*) en cada canal, figura 5.18*b*.
5. El siguiente paso será manipular el control horizontal (*X*) que desplazará las dos señales simultáneamente hacia la izquierda o a la derecha hasta posicionarlas de manera que el inicio de ciclo de la señal *A* (que es la que se ha tomado como referencia) coincida con alguna línea vertical.
6. A continuación se activa la perilla *Uncal* (ubicada junto al control TIME/DIV, identificada en color rojo, o algún otro color), con la cual se pueden "alargar" o "contraer" las señales en la dimensión horizontal sin que se altere ninguna de sus características. Esta operación es solamente para *ajustar* en lo horizontal el trazo de la señal, de manera que un ciclo completo abarque un número entero de divisiones. Sabemos que un ciclo completo de cada señal equivale a 360º; por tanto, si se ajusta el trazo de 1 ciclo a 9 divisiones, por

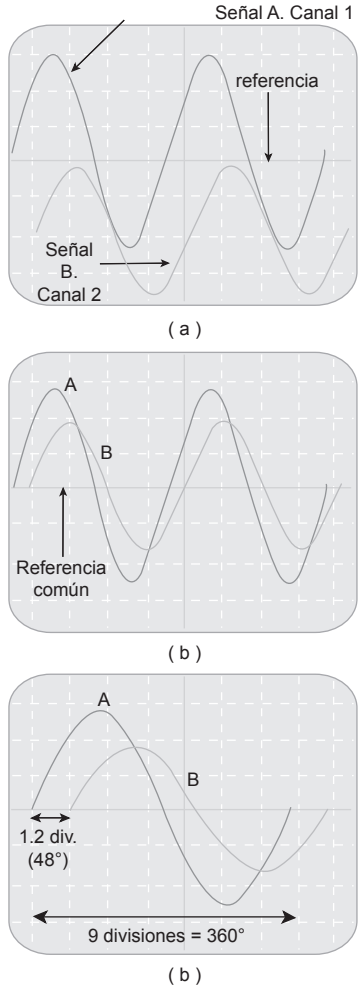


Figura 5.18 *a)* Dos señales senoidales de la misma frecuencia. *b)* Se hacen coincidir los ejes de simetría. *c)* Se ajusta la longitud de un ciclo a nueve divisiones y se considera el ángulo de fase entre las señales.

ejemplo, cada una de ellas equivaldrá a $\frac{360^{\circ}}{9} = 40^{\circ}$. De hecho, el experimentador puede elegir el número de divisiones horizontales que mejor se ajuste a sus necesidades de estudio. Ocasionalmente es necesario manipular simultáneamente la perilla *Uncal* y la de posición horizontal (*X*) para lograr la ubicación del inicio del trazo en el punto deseado, figura 5.18*c*.

7. El paso final consiste en contar el número de divisiones y subdivisiones que existe entre el inicio de la señal *A* y el inicio de la *B*. Este número se multiplica por el valor de 40º de cada división, y se tendrá el valor del ángulo de fase entre las dos señales; ya sea de adelanto o de atraso de una respecto a la otra. Para el caso que se está ejemplificando existe una distancia de 1.2 divisiones entre el inicio de la señal *A* y el de *B*; lo que corresponde a un ángulo de (1.2 div × 40°/div) = 48º. Éste es el ángulo que *adelanta* la señal *A* a la *B*.

El ángulo de fase puede ser medido también entre un nodo de A y uno de B, o bien entre crestas, o entre los puntos que mejor se adecuen a las necesidades del experimentador y del equipo en uso. Según la posición de las dos señales, se sabe que la que está a la izquierda es la que está adelantada con respecto a la otra.

5.4.7.2 Método de figuras de Lissajous

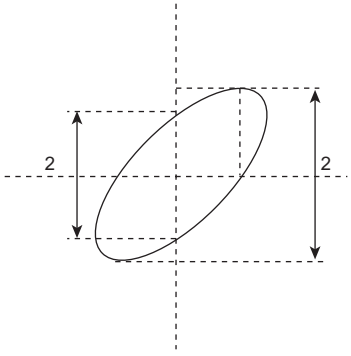


Figura 5.19 Patrón de Lissajous para determinar el ángulo de fase entre dos señales senoidales de la misma frecuencia.

Este método se utiliza tanto para medir el ángulo de fase entre dos señales senoidales de la misma frecuencia, como para determinar la frecuencia de una señal desconocida respecto de una frecuencia conocida. Las *figuras de Lissajous* son trazos que se producen en la pantalla del osciloscopio cuando se le aplican dos señales senoidales simultáneamente, una en cada canal. Estos trazos pueden ser desde una línea recta, hasta una circunferencia, o bien una elipse cuyas dimensiones estarán determinadas por las características de las señales que se estudian en las figuras 5.19 y 5.20. En este método, la perilla de base de tiempo se coloca en la posición de *modo X-Y*.

Sean las señales *K* y *L*:

$$K = X \operatorname{sen} \omega t$$
$$L = Y \operatorname{sen} (\omega t + \theta)$$

La frecuencia de ambas señales es ωt, pero la señal *L* se encuentra fuera de fase respecto a la *K* con un ángulo θ. La diferencia de fase se encuentra a partir de la ecuación 5.11,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{a}{b} \qquad \text{(ecuación 5.11)}$$

Los valores de *a* y *b* de la ecuación 5.11 están dados por el patrón de Lissajous que se obtiene como el mostrado en la figura 5.19. El valor de *a* corresponde al punto (la ordenada) donde la elipse cruza con el eje vertical "Y" de referencia (se mide del origen hacia arriba o del origen hacia abajo). Observa que si el trazo fuera una elipse tan "estrecha"

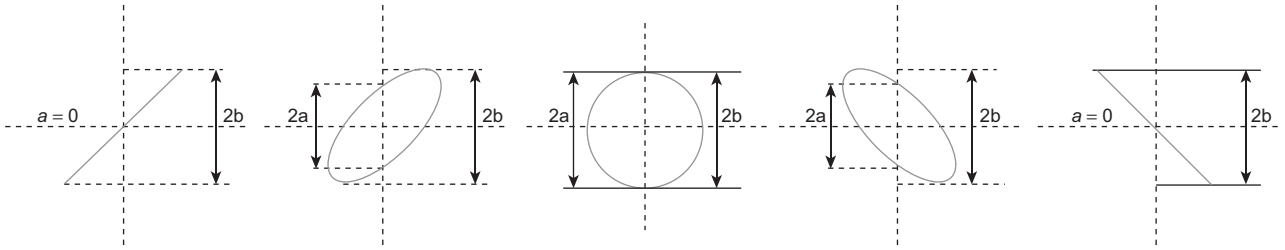


Figura 5.20. Posibles posiciones de los patrones de Lissajous. (a) a = 0º, para θ = 0º o θ = 360º. (b) En ángulos de fase 0º<θ < 90º y 270º<θ < 360º. (c) a = b, para θ = 90º, y θ = 270º. (d) En ángulos de fase 90º<θ < 180º y 180º<θ < 270º. (e) a=0º, θ = 180º.

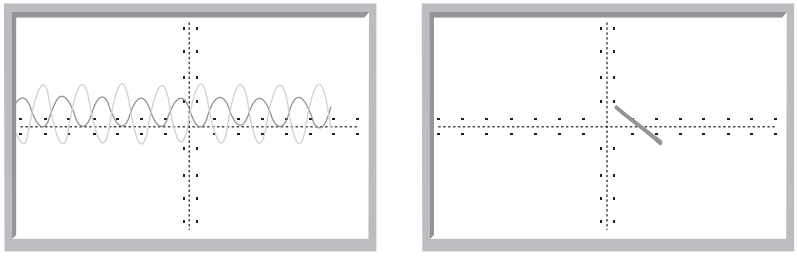


Figura 5.21 Dos señales senoidales con un ángulo de fase de 180º observadas simultáneamente en el simulador. *a*) Método del barrido disparado, *b*) Figura de Lissajous.

que se convirtiera simplemente en una línea diagonal, donde $a = 0$, el cociente $a/b = 0$, por tanto, la ecuación 5.11 daría por resultado sen $(0^o) = 0$, el ángulo de fase entre señales es 0º; se tendrían dos ondas senoidales que están en fase.

El valor de *b* está dado por el punto más alto que alcanza el trazo del patrón, como se ve en la figura 5.19. Observa que si el trazo mostrara un círculo, donde $a = b$, es decir que el cociente $a/b = 1$, el resultado de la ecuación 5.11 indica que $sen\ \theta = 1$, entonces **sen (90º) = 1**; lo que significa que el ángulo de fase entre las dos señales es de θ = 90º. Los trazos que se pueden obtener mediante el patrón de Lissajous se muestran en la figura 5.20, los cuales, obedecen a la ecuación 5.11 dada.

La figura 5.21 es la imagen que presentará un osciloscopio en simulación, al cual se le aplican dos señales senoidales de manera simultánea. En el inciso *a* se tiene el resultado del método de barrido disparado, mientras que en el *b* se muestra la figura de Lissajous correspondiente a un ángulo de fase de 180º. En este último el resultado se presenta como una línea en gris oscuro, con lo cual, el simulador indica que la señal en este color es la que se toma como referencia; es decir que, la señal en gris claro es la que se encuentra fuera de fase 180º respecto a la señal en gris oscuro.

COMPETENCIAS:

- Comprender la expresión matemática que modela el comportamiento de una señal senoidal. [1]
- Comprender el concepto *ángulo de fase* entre señales senoidales. [1]
- Calcular el ángulo de fase entre dos señales senoidales dadas, aplicando los modelos matemáticos correspondientes. [2]

5.5 Función de excitación senoidal

En ingeniería eléctrica las funciones senoidales son de particular importancia, ya que las fuentes de poder generan señales de este tipo. Lo mismo

en las comunicaciones y que en los sistemas electrónicos, las señales se transmiten generalmente como senoides o senoides modificadas.

Ahora se presentan algunas características adicionales de las funciones senoidales que es necesario conocer y manejar para determinar la respuesta que tienen los circuitos a la aplicación de una de estas funciones.

Se tiene una señal senoidal cuyo modelo matemático es

$$v(t) = A_o \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{(ecuación 5.12)}$$

La ecuación 5.12 indica que se trata de una señal de voltaje variable en el tiempo $v(t)$ con una amplitud A_o y un argumento ωt, que se representa gráficamente como una función del tiempo, con un periodo T, figura 5.22*a*. La figura 5.22*b*, es la gráfica de la misma señal en función de su argumento ωt; la función se repite cada 2π radianes, por lo que se dice que su periodo es de 2π radianes. Y también puede representarse una señal expresando su periodo en grados, figura 5.22*c*. Éstas son las formas más usadas para representar el periodo de una señal senoidal.

De lo que se observa en la figura 5.22 se puede concluir que

$$T(\text{s}) = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

Una manera más completa de expresar a la función senoidal es aquella que en su argumento explicita el ángulo de fase θ , como sigue:

$$v(t) = A_o \operatorname{sen} (\omega t + \theta) \qquad \text{(ecuación 5.13)}$$

Se puede observar, entonces, que la ecuación 5.12 corresponde a una señal senoidal con un argumento ωt y un ángulo de fase $\theta = 0$ rad. Al graficar las señales dadas por las ecuaciones 5.12 y 5.13 se obtiene un trazo como el de la figura 5.23. En ella se observa que la señal $v_1(t)=A_o \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$, representada en gris oscuro, *adelanta* a la señal $v_2(t)=A_o \operatorname{sen}\omega t$, (en gris claro), por un ángulo θ rad; este adelanto queda representado por el desplazamiento que la primera señal tiene hacia la izquierda en la gráfica. Aquí se toma como referencia a la señal $v_1(t) = A_o \operatorname{sen} \omega t$.

De otra manera, pero equivalente, se puede decir que la señal $v_2(t)=A_o \operatorname{sen} \omega t$ está *atrasada* respecto a la señal $v_1(t) = A_o \operatorname{sen} (\omega t + \theta)$ por

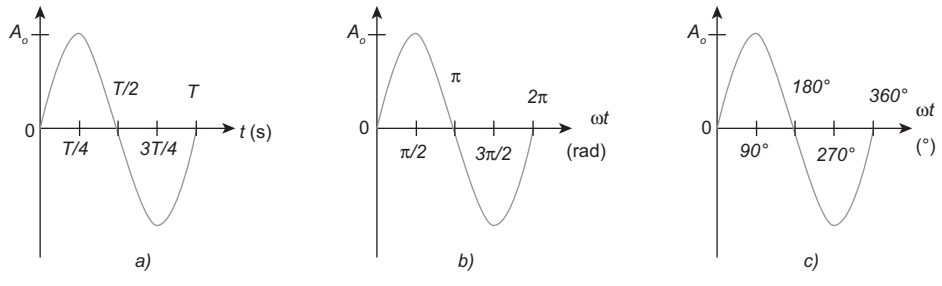


Figura 5.22 Representación gráfica de la función $v(t) = Ao \operatorname{sen} \omega t$.
a) desplazamiento respecto a *t*, *b*) argumento ωt en radianes *c*) argumento ωt en grados.

un ángulo θ. De cualquier manera, se dice que las señales están *fuera de fase*.

Dadas las formas de expresar el argumento de una función, tanto en *radianes* como en *grados*, deberá tenerse el cuidado de expresar los argumentos de las señales que se manejen, en las mismas unidades, cualesquiera que fueran; por tanto, no deberá olvidarse hacer la transformación correspondiente entre una unidad y otra, cuando sea necesario.

De la misma manera, dada la equivalencia que existe entre una función senoidal y una cosenoidal, al comparar la fase entre dos señales, deberá tenerse cuidado en manejar un solo tipo de función; haciendo las transformaciones necesarias para ello, según lo indica la ecuación 5.14.

$$A_o \cos(\omega t) = A_o \operatorname{sen}(\omega t + 90^\circ) \qquad \text{(ecuaciones 5.14)}$$

O bien

$$A_o \operatorname{sen}(\omega t) = \mathrm{A_o} \cos(\omega t - 90^\circ)$$

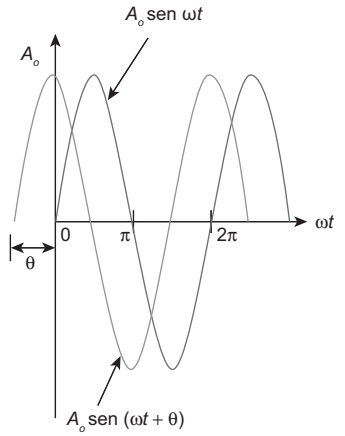


Figura 5.23 La señal senoidal A_o sen(ωt + θ), en gris oscuro, adelanta por θ radianes a la señal A_o sen ωt, en gris claro.

EJEMPLO 5.2

Calcula el ángulo de fase, expresado en grados y en radianes, que existe entre la señal de la corriente $i = 1.6 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{8}\pi t - 60^\circ\right)$ A y la del voltaje $v = 75 \cos\left(\frac{3}{8}\pi t - 40^\circ\right)$ V, en una sección de un circuito.

Solución

Datos:

$$i = 1.6 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{8}\pi t - 60^\circ\right) \mathrm{A}$$

$$v = 75 \cos\left(\frac{3}{8}\pi t - 40^\circ\right) \mathrm{V}$$

$\theta = ?$

Planteamiento:

1o. Son dos señales expresadas con diferente función, a saber, seno y coseno, pero con la misma frecuencia $\left(\frac{3}{8}\pi t\right)$, por tanto se puede hablar de un ángulo de fase entre ellas.
2o. Deberá hacerse una conversión a una de las dos funciones para estandarizar las operaciones; por ejemplo, expresar las dos en forma de coseno.

Desarrollo:

Si eliges hacer el análisis con ambas señales como funciones coseno, la corriente se expresará de la siguiente manera:

$$i \quad 1.6 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{8}\pi t - 60^{\circ}\right) \text{A}$$

$$i \quad 1.6 \cos\left(\frac{3}{8}\pi t - 60^{\circ} - 90^{\circ}\right) \text{A}$$

$$i \quad \cos\left(\frac{3}{8}\pi t - 150^{\circ}\right) \text{A}$$

Al comparar el ángulo de fase de la corriente (–60º) respecto al ángulo de fase del voltaje (–150º), se aprecia que la corriente está atrasada 110º de la onda del voltaje, figura 5.24.

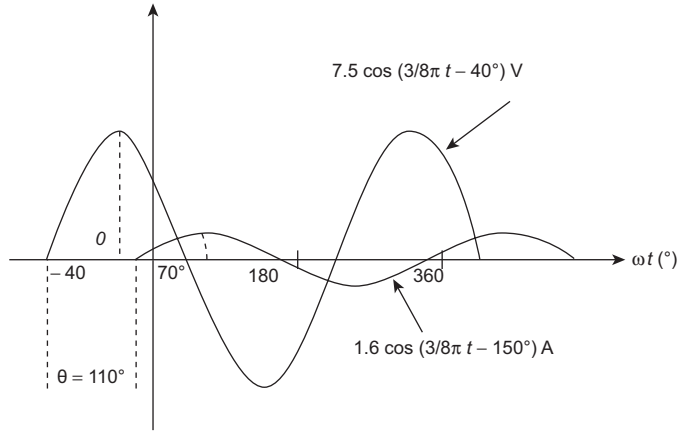


Figura 5.24 El voltaje (en gris claro) adelanta a la corriente (en gris oscuro) por 110º. Ejemplo 5.2.

Al expresar este ángulo de fase en radianes, se tiene:

$$\theta = 110^{\circ} = (110^{\circ})\frac{2\pi}{360^{\circ}} = 1.92 \text{ rad}$$

.....

Cuando se aplica una diferencia de potencial o voltaje senoidal en las terminales de alguno de los elementos pasivos (R, L o C) se provoca una intensidad de corriente a través del elemento, cuyo valor será, de acuerdo a la ley de Ohm, directamente proporcional al valor del voltaje e inversamente proporcional a la oposición que presente el elemento. Desde luego que, a una excitación o voltaje senoidal corresponderá una corriente también como función senoidal en el tiempo y de la misma frecuencia. Si se representan gráficamente al voltaje y a la corriente en un elemento, se va a encontrar que aparece un desplazamiento de una respecto a la otra. Dicho desplazamiento es el *ángulo de fase* y éste no puede ser mayor que $90^{\circ}\left(\frac{}{2}\text{radianes}\right)$.

En la figura 5.25 se muestran las señales de voltaje y de corriente en cada uno de los elementos pasivos de un circuito. En un inductor o bobina (L) la intensidad de corriente se retrasa $90^{o}\left(\frac{}{2}\text{radianes}\right)$ respecto al voltaje. Mientras que en un capacitor o condensador la intensidad de corriente adelanta en $90^{o}\left(\frac{\pi}{2}\text{radianes}\right)$ al voltaje. En una resistencia, la intensidad de corriente y el voltaje están en fase.

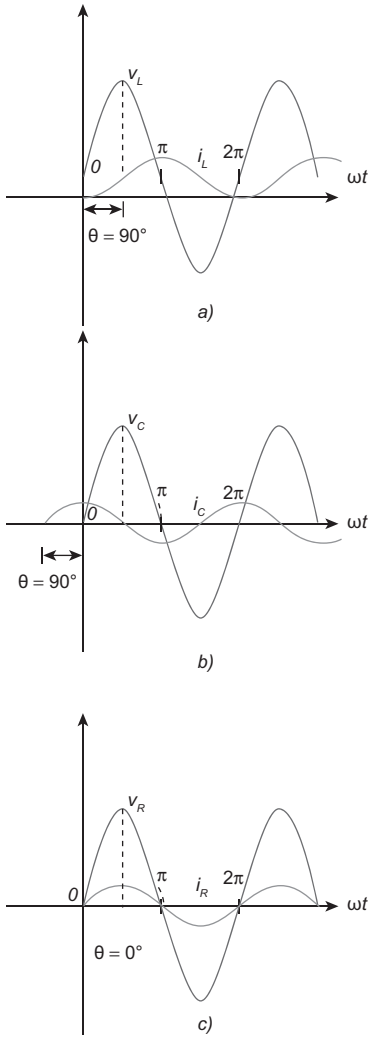


Figura 5.25 Por convenio, el ángulo de fase se considera al que forma la corriente con el voltaje. *a*) En un inductor el voltaje adelanta a la corriente por 90°. *b*) En un capacitor la corriente adelanta al voltaje por 90°. *c*) En un resistor la corriente y el voltaje están en fase.

5.6 Respuesta de un circuito *RLC* a una excitación senoidal

En el capítulo 4 se trataron los aspectos relacionados con la respuesta a una señal de excitación, y se mencionó que al aplicar una señal de alimentación a un circuito que contiene elementos de almacenamiento de energía y de carácter resistivo (L, C, R), se presenta una *respuesta natural* debida a las características dinámicas internas del circuito, pero también habrá otro tipo de respuesta en el circuito, la *respuesta forzada*, causada por las características de la fuente. Normalmente, la respuesta natural desaparecerá al cabo de cierto periodo, pero la *respuesta forzada* continúa mientras la señal de excitación (fuente de alimentación) esté presente. En esta sección se tratarán los fundamentos de la *respuesta forzada*, causada por una *fuente forzante*, generadora de una señal senoidal.

Existen diferentes métodos para el análisis de un circuito alimentado en estas condiciones, en esta sección se estudiará el análisis por medio de la transformación fasorial. Este método evita análisis que impliquen la derivación o la integración de expresiones generadas por los modelos matemáticos, tanto de la corriente como del voltaje en los inductores y capacitores; utiliza números complejos para representar una función de excitación senoidal y su correspondiente respuesta, como se verá a continuación.

5.6.1 Función de excitación compleja

Un circuito que tiene una función de excitación forzante del tipo

$$v(t) = V_{\text{m}} \cos(\omega t + \theta) \text{ volts},$$

tendrá una respuesta forzada del tipo

$$v_{fo} = a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{(ecuación 5.15)}$$

donde *cos* ωt y *sen* ωt son componentes de la respuesta, que responden al tipo de señal de la fuente forzante, cuya frecuencia es ωt, mientras que los coeficientes a y b están relacionados de la siguiente forma:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{(ecuación 5.16)}$$

COMPETENCIAS:

- Comprender el concepto de función de excitación compleja aplicado a circuitos *RL* y *RC*.[1].
- Analizar circuitos *RL* y *RC* simples asociados a una fuente de excitación senoidal, por medio de la transformación fasorial. [2].

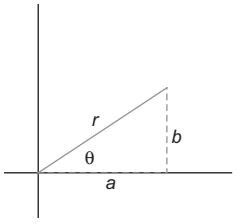


Figura 5.26 Un punto puede representarse en el plano polar mediante un segmento de magnitud *r* y un ángulo θ.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{(ecuaciones 5.17)}$$

Las ecuaciones 5.16 y 5.17 se interpretan fácilmente si se hace una representación de un punto cualquiera, correspondiente a un valor determinado de la respuesta de una función senoidal, en el plano polar, mediante un segmento de magnitud *r* con un ángulo θ como muestra la figura 5.26.

Para llegar a obtener la expresión dada por la ecuación 5.15 se requiere de realizar un análisis que implica procedimientos matemáticos, cuyo tratamiento está fuera de los propósitos del presente libro.

Sin embargo, estos resultados son considerados como base para el desarrollo del método que se estudia en la siguiente sección, el cual consiste en una *transformación fasorial*, cuyos procedimientos son más sencillos y rápidos, con los mismos resultados que mediante la solución de ecuaciones que involucran el manejo de integrales y diferenciales.

Si se multiplica y divide la ecuación 5.15 por $\sqrt{a^2+b^2}$ se obtiene

$$v_{fo} \quad \sqrt{a^2 \quad b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos\omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{sen}\omega t \right)$$

Al sustituir luego las ecuaciones 5.17 en esta expresión se obtiene que:

$$v_{fo} \quad \sqrt{a^2 \quad b^2} \cdot \left(\cos\theta \cdot \cos\omega t \quad \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\omega t \right)$$

Lo que finalmente nos conduce a obtener la ecuación:

$$v_{fo} \quad \sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos(\omega t - \theta) \qquad \text{(ecuación 5.18)}$$

Ambas expresiones, la 5.15 y la 5.18, se refieren a la respuesta forzada que se genera en un circuito *RCL* cuando es excitado por una función

$$V_m \cos\omega t.$$

Se abordará en esta sección un método matemático que se utiliza para simplificar el análisis de los circuitos *RCL* alimentados por alguna señal de tipo senoidal (o cosenoidal), denominado *transformación fasorial*, o simplemente *fasor*. Este método evita realizar análisis que impliquen la derivación o la integración de expresiones generadas por los modelos matemáticos, tanto de la corriente como del voltaje en los inductores y capacitores; utiliza números complejos para representar una función de excitación senoidal y su correspondiente respuesta.

Para explicar mejor esta idea, veamos primero lo que es una *función de excitación compleja*. Considera un circuito *RL* alimentado por una

fuente *real* de voltaje senoidal $V_m \cos(\omega t + \theta)$ (figura 5.27), donde V_m es la amplitud de la señal (en volts), ω es la frecuencia de la señal (en rad/s) y θ es el ángulo de fase de la señal de voltaje (en rad o en grados). Una función de excitación cosenoidal provocará una respuesta también cosenoidal y de la misma frecuencia; por tanto, este voltaje ocasiona que a través de la malla circule una corriente *real* de valor $I_m \cos(\omega t + \phi)$, donde I_m es la amplitud de la señal (en amperes), ω es la frecuencia de la señal (en rad/s) y ϕ es el ángulo de fase de la señal de corriente (en rad o en grados). Observa que los ángulos de fase de la función de excitación (voltaje) y de la respuesta (corriente) se denominan de diferente manera, θ y ϕ cada uno, porque no necesariamente deben ser iguales, como se podrá ver más adelante.

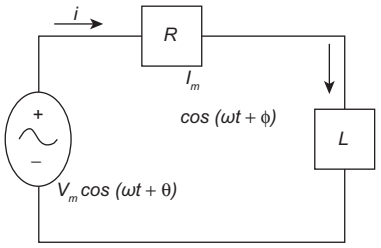


Figura 5.27 Representación de un circuito *RL* alimentado por una fuente de voltaje cosenoidal con un ángulo de fase θ, que provoca una corriente también cosenoidal con ángulo de fase φ.

Ahora, pensemos que a la función de excitación se le aplica un desplazamiento de fase, se le retrasa en 90º, lo que transforma a la función de cosenoidal a senoidal:

$$V_m \cos(\omega t + \theta - 90^\circ) = \mathrm{V_m}\ \mathrm{sen}(\omega t + \theta)$$

Si a la red considerada ahora se le aplicara esta función de excitación, daría como respuesta una intensidad de corriente dada por la función

$$I_m \cos(\omega t + \phi - 90^\circ) = I_m\ \mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

Puesto que el método de *transformación fasorial*, que se verá a continuación, es solo un apoyo matemático y no físico, requiere que se construya una *fuente compleja*, con una parte real y una imaginaria, la que provocará, desde luego, una respuesta también compleja. Así que además de la fuente *real* de alimentación, se requiere de una fuente *imaginaria* de alimentación, que se puede construir fácilmente con tan solo multiplicar la fuente $V_m\ \mathrm{sen}(\omega t + \theta)$ por el factor *j* (operador imaginario), para obtener

$$j\ V_m \mathrm{sen}(\omega t + \theta)$$

donde V_m es la amplitud de la señal (en volts), ω es la frecuencia de la señal (en rad/s), θ es el ángulo de fase de la señal de voltaje (en rad o en grados), *j* es la unidad de los números imaginarios (se usa la letra *j* para no confundir en algún momento con la letra *i,* que en eléctrica y electrónica se emplea para representar a una corriente), cuyo valor es $\sqrt{-1}$.

Esta fuente provocará una respuesta también imaginaria del tipo

$$j\ I_m \mathrm{sen}(\omega t + \phi),$$

donde I_m es la amplitud de la señal (en amperes), ω es la frecuencia de la señal (en rad/s), ϕ es el ángulo de fase de la señal de corriente (en rad o en grados) y *j* es la unidad de los números imaginarios.

Puesto que se trata de redes lineales, es factible aplicar el principio de superposición; por tanto la suma de los efectos individuales de las fuentes *real* e *imaginaria* será equivalente al efecto de una sola fuente

conformada por una parte real y una imaginaria, a la que se le llama una *fuente compleja* y cuyo valor es

$$V_m \cos(\omega t + \theta) + j\, V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$

El mismo principio de superposición permite obtener como respuesta a una excitación compleja, una señal también compleja.

$$V_m \cos(\omega t + \phi) + j\, V_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

Desde luego que este tipo de fuente de alimentación no existe en ningún laboratorio, ya que en ellos se cuenta con fuentes reales; sin embargo, es muy fácil construirla, desde el punto de vista matemático, basta con agregar a la *parte real* de una fuente, una *parte imaginaria* de la misma.

Aun cuando no es tan simple, desde el punto de visto matemático, llegar a obtener la expresión para una fuente compleja, se presenta a continuación una explicación gráfica al respecto. Si consideramos que una *señal senoidal* es el resultado de una sucesión de valores instantáneos de energía eléctrica (voltaje o corriente) que varían con el tiempo obedeciendo a un patrón que tiene la forma de una función precisamente senoidal, cada uno de estos valores instantáneos puede representarse en el *plano complejo*, (el eje horizontal corresponde a valores reales y el eje vertical a valores imaginarios) mediante coordenadas polares, en las cuales, cada punto queda plenamente representado por un segmento de recta de magnitud *r*, que describe un ángulo θ, respecto a un origen del sistema, como se muestra en la figura 5.28.

Así que si consideramos toda una sucesión de valores que varían en el tiempo, de una señal senoidal dada, se tendrá un segmento de recta "girando" en sentido contrario a las manecillas del reloj (levógiro o positivo) con una velocidad angular constante (ω) expresada en rad/s.

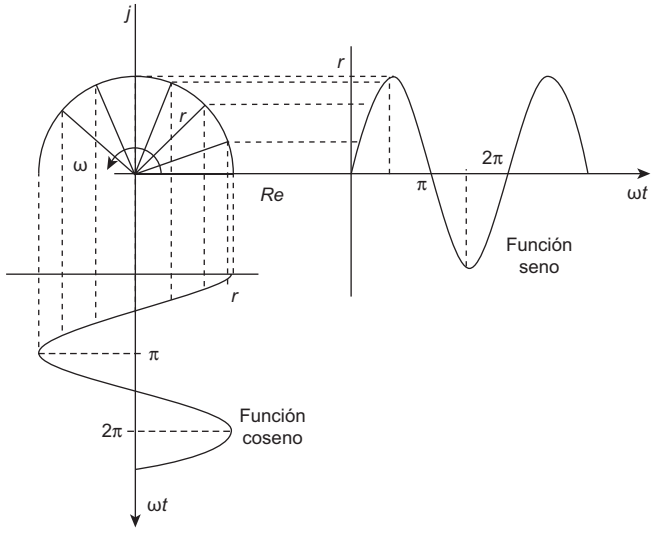


Figura 5.28 Relación que existe entre los valores de una función seno y otra coseno, respecto a las posiciones de un segmento que gira en sentido positivo, con velocidad angular ω.

Si en esta figura se observan las proyecciones de este segmento giratorio sobre los ejes vertical y horizontal, se notará que las posiciones de los distintos puntos en el círculo coinciden con los términos *coseno* y *seno*, respectivamente dados por la funciones cos ωt y sen ωt. Por ejemplo, cuando el segmento *r* se encuentra formando un ángulo $\theta = 0^o$, la gráfica de la función *seno* tiene un valor igual a *cero* (sen $0^o = 0$), mientras que la función *coseno* adquiere su valor máximo de *r* (cos $0^o = 1$); cuando el segmento *r* se localiza formando un ángulo $\theta = 90^o$, la función *seno* adquiere su máximo valor de *r* (sen $90^o = 1$), mientras que la función coseno tiene el valor de *cero* (cos $90^o = 0$) ; cuando el segmento *r* se ubica con un ángulo $\theta = 45^o$ ambas funciones adquieren el valor de 0.7071 *r* (cos 45^o = sen 45^o = 0.7071), etcétera.

Ahora respecto del concepto *fuente de excitación compleja*, conviene agregar que, según la identidad de Euler ($e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$), esta fuente se puede expresar:

$$V_m \cos(\omega t + \theta) + j\, V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta) = V_m e^{\,j(\omega t + \theta)} \qquad \text{(ecuación 5.19)}$$

Lo que ocasionará una respuesta compleja:

$$I_m \cos(\omega t + \phi) + j\, I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = I_m e^{\,j(\omega t + \phi)} \qquad \text{(ecuación 5.20)}$$

Con las expresiones 5.19 y 5.20 se puede hacer una nueva representación de la red, como muestra la figura 5.29.

EJEMPLO 5.3

Encuentra el voltaje complejo correspondiente a la fuente de la red mostrada en la figura 5.29, si se tiene un resistor de 100 Ω y un inductor de 50 mH, a través de los cuales circula una corriente compleja de $4\, e^{j500t}$ mA.

Solución

Datos:

$R = 100\ \Omega$
$L = 50$ mH.
$i_{compleja} = 4\, e^{j500t}$ mA
$v_{s(compleja)} = ?$

Planteamiento:

Al aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes en la malla presentada en la figura 5.29 se obtiene la ecuación de voltajes. A partir de esta ecuación se obtiene la expresión para el voltaje complejo, el cual tendrá una amplitud de V_m, y un ángulo de fase $\theta \rightarrow V_m\, e^{\,j(500t\, +\, \theta)}$ volts.

La frecuencia de la corriente es de $\omega = 500$ rad/s; por tanto, la frecuencia del voltaje generador deberá ser la misma.

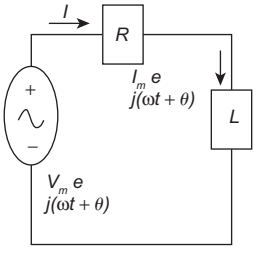


Figura 5.29 Representación de un circuito *RL* alimentado por una fuente de voltaje compleja con un ángulo de fase θ, que provoca una corriente también compleja con ángulo de fase ϕ.

Desarrollo:

La ecuación de malla

$$Ri + L\frac{di}{dt} = v_s$$

Al sustituir valores y la expresión de la corriente en la ecuación de malla se tiene:

$$(100\ \Omega)(0.004\ e^{j500t}\ \text{A}) + (0.050\ \text{H})\frac{d(0.004e^{j500t})}{dt} = V_m\, e^{j(500t+\theta)}$$

Al derivar se tiene:

$$0.4\ e^{j500t} + j\,0.1\ e^{j500t} = V_m\, e^{j(500t+\theta)}$$

factorizando $\quad e^{j500t}(0.4 + j0.1\ e) = V_m\, e^{j500t}\, e^{j\theta}$

$\therefore \qquad V_m e^{j\theta} = 0.4 + j\,0.1$

Aplicando las ecuaciones 5.16 y 5.17 en esta última expresión, se tiene que:

$$r = \sqrt{(0.4)^2 + (0.1)^2} \qquad r = 0.4123$$

el ángulo de fase es

$$\theta = \text{sen}^{-1}\frac{0.1}{\sqrt{(0.4)^2 + (0.1)^2}} = \text{sen}^{-1}\,0.2425 = 14.03^o$$

Al sustituir estos valores en la expresión para el voltaje:

$$0.4123\, e^{j14.03^o} = 0.4 + j\,0.1\ \text{V}$$

donde ωt = 500t.

Al desglosar esta expresión en sus partes real e imaginaria se obtiene:

$$Re[0.4123\, e^{(500\text{t}+14.03^\text{o})}\ ] = 0.4123\cos(500\text{t} + 14.03^\text{o})\ \text{V}$$
$$Im[0.4123\, e^{(500\text{t}+14.03^\text{o})}\ ] = 0.4123\ \text{sen}\ (500\text{t} + 14.03^\text{o})\ \text{V}$$

O bien, la expresión completa en el dominio del tiempo será:

$$v_s(t) = 0.4123\cos(500t + 14.03^\text{o}) + \text{j}\ 0.4123\ \text{sen}\ (500t + 14.03^\text{o})\ \text{V}$$

……..

En el ejemplo 5.3 se ha obtenido la expresión para un voltaje complejo solicitado; el resultado encontrado se ha expresado de tres maneras distintas, pero equivalentes, a saber:

$1^a \Rightarrow \mathbf{V_s} = 0.4123\, e^{(500\,t\,+14.03^\circ)}\text{V}$

$2^a \Rightarrow \mathbf{V_s} = 0.4 + \text{j}\,0.1\ \text{V} \Rightarrow \text{para } \omega t = 500t$

$3^a \Rightarrow \mathbf{V_s} = 0.4123 \cos(500t + 14.03^\circ) + j0.4123 \text{ sen } (500t + 14.03^\circ)\ \text{V}.$

La primera de ellas es la representación *exponencial* del voltaje complejo, del tipo $V_m e^{j(\omega t+\theta)}$, donde la amplitud de la señal es $V_m = 0.4123$ V, la frecuencia es $\omega = 500$ rad/s, y el ángulo de fase es $\theta = 14.03^\circ$. La letra e representa a la base de los logaritmos naturales ($e = 2.71828.....$).

La segunda corresponde a una expresión de forma *rectangular* del mismo voltaje complejo $\mathbf{V} = a + j\,b$, en la cual $a = 0.4$, $b = 0.1$. Y la tercera es la expresión del voltaje complejo en el *dominio del tiempo*, cuyas partes real e imaginaria son:

$$\text{Re}[\mathbf{Vs}] = 0.4123 \cos(500t + 14.03^\circ)\ \text{V}$$
$$\text{Im}\,[\mathbf{Vs}] = 0.4123 \text{ sen } (500t + 14.03^\circ)\ \text{V}$$

Una manera más de expresar a este voltaje complejo es la forma *polar*, que está determinada por un segmento de recta de magnitud r con un desplazamiento angular de valor θ. Así, el voltaje complejo encontrado en el ejemplo 5.3 se puede expresar también de esta forma:

$$v_{s(\text{complejo})} = \mathbf{V_s} = \text{r}\angle\theta^\circ\ \text{V} \qquad \text{(ecuación 5.21)}$$

Se puede representar gráficamente como se ve en la figura 5.30, donde r es la magnitud del segmento que equivale a la amplitud de la onda, y θ es el ángulo de desplazamiento del vector, o bien el ángulo de fase de la señal.

Al sustituir, se tiene:

$$\mathbf{V_s} = 0.4123\angle 14.03^\circ\ \text{V}$$

En todas las formas de expresión las unidades de medida para el voltaje son volts.

Como resumen de lo anterior, la fuente de voltaje

$$v(t) = 0.4123 \cos(500t + 14.03^\circ)\ \text{volts}$$

se puede expresar como una fuente de voltaje compleja, de las siguientes formas equivalentes:[3]

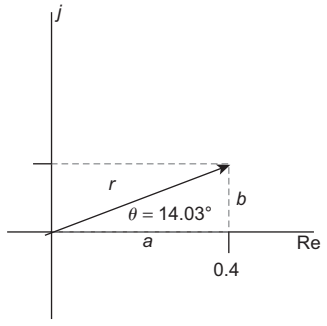


Figura 5.30 Representación gráfica del voltaje complejo proporcionado por la fuente del ejemplo 5.3, por medio de coordenadas polares (r,θ).

[3] Nota: Para representar a un número complejo, como los voltajes que se han manejado anteriormente, se utilizan letras mayúsculas en negritas, si es que es un texto en letra impresa, o bien, cuando se escribe con letra manuscrita, se acostumbra letra mayúscula testada (una barra horizontal encima de la letra).

Forma exponencial $\Rightarrow \mathbf{V} = 0.4123\, e^{(500\,t\,+14.03^\circ)}\text{V}$

Forma rectangular $\Rightarrow \mathbf{V} = 0.4 + j0.1$ V

Forma polar $\Rightarrow \mathbf{V} = 0.4123 \angle{+14.03^\circ}$ V

Comprobación mediante un simulador de circuitos

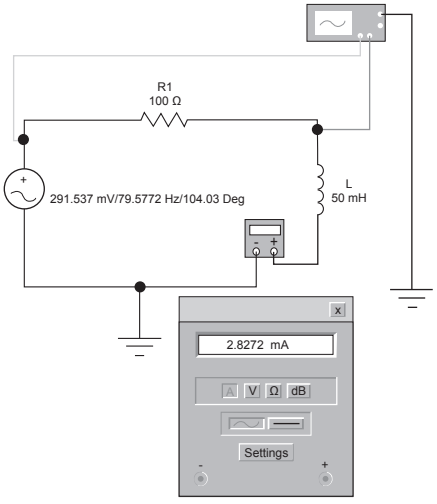


Figura 5.31 Circuito *RL* alimentado por una fuente de voltaje alterno. El osciloscopio se utiliza para observar la señal en la fuente y en el inductor, con respecto al común o tierra. Vea la figura 5.32.

Una manera de comprobar los cálculos teóricos del ejemplo 5.3 es mediante la simulación del circuito analizado. En este ejemplo, al hacer la representación en el simulador se obtiene una imagen como la presentada ahora en la figura 5.31. Observa que los datos presentados en la figura no son iguales a los resultados teóricos que se van a comprobar; esto obedece a las razones que se plantean a continuación.

Puesto que un simulador tiene limitaciones para representar la operación de un circuito, es necesario ajustarse a ellas, sin alterar en esencia el contenido del sistema a simular.

Algunas consideraciones acerca de la simulación del circuito

1a. Se tiene que tomar en cuenta que un simulador podrá representar únicamente a una fuente de alimentación *real*; así que para comprobar si la fuente compleja del ejemplo es la correcta, se tomará de ella sólo la parte real para representarla en el simulador. Recuerda que el hecho de *construir una fuente compleja*, con una parte real y una imaginaria, es un apoyo matemático para facilitar el proceso de análisis teórico de los circuitos que trabajan con funciones senoidales o senoidales modificadas.

Entonces, al tomar la parte real del resultado, la fuente se representará en el simulador por

$$v_s(t) = 0.4123 \cos(500t + 14.03^\circ) \text{ volts},$$

cuya interpretación se resume de la siguiente manera:

amplitud de la señal $V_m = 0.4123$ V,
frecuencia $\omega = 500$ rad/s
ángulo de fase $\theta = 14.03^\circ$

2a. La fuente que utiliza el simulador entrega *valor rms*. La expresión de la función compleja del ejemplo opera con *valor pico*, la *amplitud* de la señal.

3a. El simulador expresa la fuente en función *seno.* El resultado teórico obtenido expresa la función compleja como *coseno*.

4a. La frecuencia de la fuente simulada es expresada en *hertz*. En el cálculo teórico se ha trabajado con frecuencia en rad/s.

5a. Un osciloscopio, tanto en el simulador como en el laboratorio, no muestra en forma directa señales de *corrient*e, sino solamente *voltajes*; por tanto, el simulador, al graficar la señal que toma de la fuente y

del inductor de manera simultánea, estará mostrando dos señales de voltaje. Por otro lado recordemos que en un inductor puro el voltaje adelanta a la corriente por 90º.

Después de estas importantes consideraciones, el experimentador deberá tener la precaución de hacer las transformaciones necesarias para trabajar en términos del simulador con datos equivalentes a los resultados obtenidos en los cálculos teóricos.

Determinación de las especificaciones de la fuente de alimentación en el simulador

A partir del voltaje $v_s(t) = 0.4123 \cos (500t + 14.03º)$ volts, cuya validez se desea comprobar, se procede como sigue:

La magnitud del voltaje:
Con la ecuación 5.10 se transforma el voltaje pico en voltaje *rms*:

$$V_{rms} = 0.7071\ V_p = 0.7071\ (0.4123\ V)$$
$$V_{rms} = 0.291537\ V$$

El ángulo de fase:
Como el cálculo teórico se hizo en función *coseno* y el simulador trabaja solo función *seno*; se tiene que hacer la transformación $\cos \theta \Rightarrow \text{sen}\ \theta$:

$$\cos \theta = \text{sen}\ (\theta + 90º)$$
$$\cos 14.03º = \text{sen}\ (14.03 + 90º) = \text{sen}\ (104.03º)$$
$$\cos 14.03º = 0.9701 \text{ y } \text{sen}\ 104.03º = 0.9701$$

En el simulador se debe manejar un ángulo de fase $\theta = 104.03º$ para la fuente de voltaje.

NOTA: *La mayoría de los simuladores manejan ángulos de fase positivos; así que de tener algún ángulo negativo, deberá buscarse el ángulo positivo cuyo valor seno sea igual al del ángulo que se va a representar. Por ejemplo, si se tiene un ángulo de* $-60º$ *(*$\text{sen}\ -60º = -0.866$*), el simulador no lo va a reconocer, por lo que debe emplearse un ángulo positivo cuyo valor seno sea igual a* -0.866*, como* $\text{sen}\ 240º = -0.866$*,* $\text{sen}\ 300º = -0.866$*. Se recomienda utilizar el más simple.*

La frecuencia en hertz:

$$\omega = 2\pi f \therefore f = \omega / 2\pi \quad \Rightarrow \quad f = 500/2\pi = 79.5772\ \text{Hz}$$

Lectura e interpretación de la información que proporciona el osciloscopio virtual

Al "ensamblar" el circuito en el simulador se obtiene una red como la mostrada en la figura 5.31. En esta figura se incluye un amperímetro digital que registra el valor *rms* de la corriente que circula por la malla

(la lectura es de 2.828 mA). Si se aplica la ecuación 5.10 al valor pico (4 mA) de la corriente planteada por el problema, se obtiene:

$$(0.004\ \text{A})(0.7071) = 2.8284\ \text{mA}$$

que es el mismo valor que registra el amperímetro virtual del simulador; esto indica que la fuente de voltaje $v_s(t) = 0.4123 \cos(500t + 14.03^\circ)$ sí provoca la intensidad de corriente $i = (4\, e^{j500t}\ \text{mA})$ en el circuito *RL*.

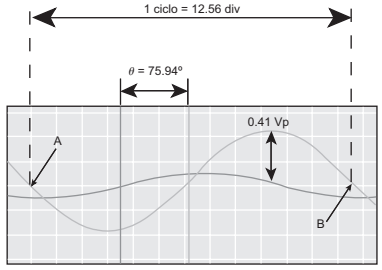


Figura 5.32 Imagen que presenta el simulador para el ejemplo 5.3. El trazo en gris oscuro representa la onda de voltaje de la fuente; el gris claro corresponde al voltaje en el inductor.

Para tomar las lecturas de voltajes, las puntas de prueba del canal 1 del osciloscopio virtual del simulador (línea en gris claro), se han "conectado" de forma que miden el voltaje de la fuente; y las del canal 2 (línea en gris oscuro) para medir el voltaje en el inductor. Las formas de onda que se obtienen se muestran en la figura 5.32. En esta figura se aprecia la pantalla del osciloscopio con el trazo de dos ondas senoidales: En gris claro aparece la correspondiente al *voltaje de la fuente*, mientras que en la línea en gris oscuro el *voltaje en el inductor* de 50 mH. El *voltaje* en el inductor aparece a la izquierda (adelante) del *voltaje* en la fuente con un ángulo de 75.94º que se determina de la siguiente manera.

Entre los nodos señalados por A y B, figura 5.32, se tiene un ciclo completo (360º) de la onda del voltaje de la fuente (gris claro). Se cuenta el número de divisiones horizontales que abarca el ciclo, dando un total de 12.56 divisiones; lo que significa que cada una de estas divisiones vale $\dfrac{360^\circ}{12.56\text{div}} = 28.66^\circ/\text{div}$. Con esta referencia se mide el ángulo de fase entre las dos señales, comparando ahora la distancia horizontal que existe entre un nodo de inicio de la onda del voltaje en el inductor (gris oscuro) y el nodo de inicio más próximo de la onda del voltaje de la fuente (gris claro), y se cuentan 2.65 divisiones, que equivalen a un ángulo de adelanto de (2.65 div) (28.66º/div) = 75.94º. Pero en realidad no estamos queriendo conocer el ángulo de fase entre el voltaje del inductor y el voltaje de la fuente sino más bien el ángulo que existe entre el *voltaje de la fuente* y la *corriente en el inductor*. Si el voltaje en el inductor adelanta con 75.94º al voltaje de la fuente y sabemos que la corriente en el inductor se atrasa 90º respecto a su voltaje, significa entonces que la onda de corriente (que no se puede ver en el osciloscopio) deberá estar desplazada hacia la derecha (atrasada) con 90º.

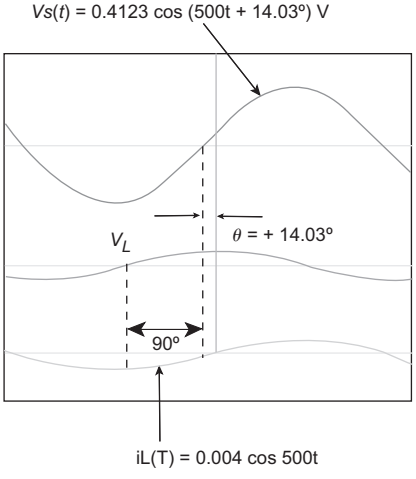


Figura 5.33 En trazo gris claro aparece el voltaje en la fuente, adelantado 14.03º respecto a la corriente en el inductor (trazo gris), la cual se toma como referencia. Ejemplo 5.3.

Dicho de otra manera, si al ángulo de adelanto del voltaje del inductor respecto al voltaje de la fuente se le restan 90º se obtiene (75.94º– 90º) = –14.06º, que es el valor que corresponde al ángulo de fase que existe entre la corriente en el inductor y el voltaje en la fuente. El signo negativo significa que existe un atraso en la corriente. Este resultado apreciado en el simulador con su correcta interpretación permite comprobar que el cálculo teórico es correcto con un amplio porcentaje de confiabilidad.

La onda de corriente en el inductor, que no se puede observar en el osciloscopio, puede ser dibujada, como muestra la figura 5.33, El desplazamiento en la escala del simulador se obtiene de la siguiente manera:

$\dfrac{90^\circ}{28.66^\circ / \text{div}} = 3.14$ divisiones a la derecha del voltaje en el inductor (el trazo en gris oscuro).

Por otro lado, en la figura 5.34 se presenta la figura de Lissajous correspondiente a las dos ondas analizadas, voltaje en la fuente y voltaje en el inductor. En esta figura se aprecian las dimensiones *a* y *b* tratadas anteriormente. El indicador en línea gris claro mide la dimensión *a*, que se puede leer en el medidor digital del osciloscopio identificado por VA2 (98.1199 mV), mientras que la línea vertical en gris oscuro determina la dimensión b, identificado en el medidor por VA1 (101.2215 mV). Sabemos que

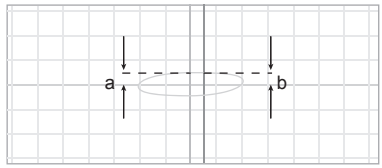


Figura 5.34 Imagen que presenta un simulador para el ejemplo 5.3. Método de las figuras de Lissajous para determinar el ángulo de fase.

$$\text{sen } \theta = \frac{a}{b} = \frac{98.1199 \text{ mV}}{101.2215 \text{ mV}} = 0.9693$$

Por tanto

$$\theta = \text{arc sen } (0.9693) = 75.76^\circ$$

que es un valor para θ, ángulo de fase entre el *voltaje* en el inductor y el *voltaje* en la fuente, muy aproximado al que se obtuvo con el método mostrado en la figura 5.32.

Nuevamente, si deseamos conocer el ángulo de fase de la corriente respecto al voltaje en la fuente debemos recordar que hay que restar 90º por el atraso que la corriente tiene respecto al voltaje en el inductor; y así se obtiene 75.76º – 90º = –14.24º, que es en realidad el ángulo de fase que se está comprobando.

Cabe comentar que las pequeñas desviaciones, que se pueden encontrar entre valores teóricos calculados y los valores medidos por uno y otro método, se deben tanto al recorte de decimales que se hace en los resultados parciales de los cálculos como a la apreciación que el observador hace en el osciloscopio, así como los decimales que maneja el propio instrumento cuando entrega valores numéricos, como en el ejemplo.

5.7 Relaciones fasoriales para *R*, *C* y *L*

COMPETENCIAS:

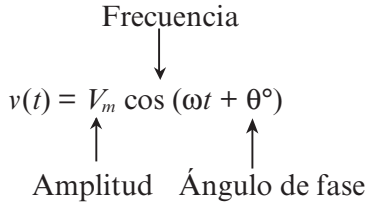
- Comprender el método de transformación fasorial con aplicación en el análisis de circuitos *RL* y *RC*. [1].
- Transformar una función dada en el dominio del tiempo a su forma fasorial. [2].

La forma polar del voltaje es una abreviatura de la forma exponencial, y a su vez ésta es equivalente a la forma rectangular; y las tres se refieren a la misma función en el tiempo. A esta forma abreviada se le llama *fasor*, y es la que se utiliza en el método de *transformación fasorial* para el análisis de circuitos *RLC* en la respuesta senoidal permanente.

Fasor es una expresión numérica que con tan solo especificar la amplitud (A_o) de una señal senoidal y su ángulo de fase (θ), logra una expresión tan completa como la que se pueda tener en función del tiempo.

Dada una función del tiempo de un voltaje $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta^\circ)$ o corriente, para hacer la *transformación fasorial* y llegar a la expresión abreviada o *fasor* se sigue un sencillo procedimiento que consiste en:

1o. Identificar la amplitud y el ángulo de fase de la función:



2o. Suponer que existe una parte imaginaria que transforma a la fuente *real* en una fuente *compleja* $\underbrace{V_m \cos(\omega t + \theta°)}_{\text{Parte real}} + \underbrace{j}_{\text{operador imaginario}} \underbrace{V_m sen(\omega t + \theta°)}_{\text{Parte imaginaria}}$.

3o. Expresar la fuente compleja en forma exponencial $\mathbf{V} = V_m e^{(j\omega t + \theta)}$

4o. Expresar la función original del voltaje como la parte real de esta fuente compleja.

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta°) = \text{Re}\,[V_m e^{(j\omega t + \theta)}]$$

5o. Expresar el resultado en forma abreviada o fasorial.

$$\mathbf{V} = V_m \angle \theta°$$

Se observa que en la expresión fasorial no aparece el término correspondiente a la frecuencia; el *fasor* contiene información de amplitud y ángulo de fase únicamente, se da por hecho que la frecuencia se conoce y se conservará sin alterar durante todo el proceso matemático. Esto obedece al hecho de que el fasor **V** es una representación en el *dominio de la frecuencia*, mientras que $v(t)$ es una representación en el *dominio del tiempo*.

Algunos autores manejan al *fasor* como una función *seno*; sin embargo, la mayoría de ellos y en este libro se le trata como una función *coseno*; de ahí que el primer paso, previo a la transformación fasorial, deberá expresar la función a considerar, en forma de *coseno*. De hecho, es indistinto si se usa una función o la otra, pero sí es importante ponerse de acuerdo en cuál se utiliza y habrá que homogeneizar todas las operaciones.

EJEMPLO 5.4

Expresa en forma fasorial a las siguientes funciones: (a) $v(t) = 2.7 \cos(350t - 48°)$ V, (b) $i(t) = 0.085 \text{ sen } (4000t + 72°)$ A.

Solución

Datos:

(a) $v(t) = 2.7 \cos(350t - 48°)$ V,

(b) $i(t) = 0.085 \text{ sen } (4000t + 72°)$ A.

Planteamiento:

La expresión del inciso *a* se trata de una función coseno, por lo que no hay que hacer ninguna transformación previa; su amplitud es 2.7 volts, la frecuencia es $\omega = 350$ rad/s, y su ángulo de fase es $\theta = -48^\circ$ (está retrasada respecto a la referencia que se haya considerado), mientras que la del inciso *b* está dada como función seno, por lo que hay que transformarla a coseno; su amplitud es 85 mA, su frecuencia $\omega = 4000$ rad/s, y su ángulo de fase es $\theta = +72^\circ$ (está adelantada respecto a la referencia que se haya considerado).

Desarrollo:

$$(a) \quad v(t) = 2.7 \cos(350t - 48^\circ) \text{ volts},$$

$$\Rightarrow \mathbf{V} = 2.7 \cos(350t - 48^\circ) + j\, 2.7 \operatorname{sen}(350t - 48^\circ) \text{ volts}$$

$$\Rightarrow \mathbf{V} = 2.7\, e^{j(350t - 48^\circ)} \text{ volts}$$

$$v(t) = 2.7 \cos(350t - 48^\circ)\ \text{V} = \text{Re}[\, 2.7\, e^{j(350t - 48^\circ)}]$$

por tanto, la función $v(t) = 2.7 \cos(350t - 48^\circ)$ V *se expresa como fasor así*

$$\mathbf{V} = 2.7\angle -48^\circ \text{ volts}$$

(*b*)*Dada la función* $i(t) = 0.085 \operatorname{sen}(4000t + 72^\circ)$ A*, para expresarla en forma fasorial se convierte a función coseno:*

$$i(t) = 0.085 \operatorname{sen}(4000t + 72^\circ)\ \text{A} = 0.085 \cos(4000t + 72^\circ - 90^\circ)\ \text{A}$$
$$= 0.085 \cos(4000t - 18^\circ)\ \text{A}.$$

Siguiendo el mismo procedimiento que para el inciso a, se obtiene que $i(t)$ *se expresa como fasor así:*

$$i(t) = 0.085 \operatorname{sen}(4000t + 72^\circ)\ \text{A} \ \Rightarrow\ \mathbf{I} = 0.085\angle -18^\circ\ \text{A}.$$

5.8 Diagramas fasoriales

COMPETENCIA:
Elaborar el diagrama fasorial correspondiente a señales senoidales relacionadas entre sí. [2].

Una vez que hemos visto el proceso para hacer una transformación fasorial para un voltaje o una corriente, pasando desde el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia o viceversa, veremos en esta sección que, como un apoyo para el manejo de estas expresiones complejas abreviadas, existen las representaciones gráficas de éstas. Es decir que, puesto que un fasor se compone de una magnitud *r* y un ángulo de fase θ, puede representarse gráficamente mediante un radio de longitud *r* (correspondiente a la magnitud de la expresión), que gira describiendo un ángulo θ, (que sería correspondiente al ángulo de fase), sobre un pla-

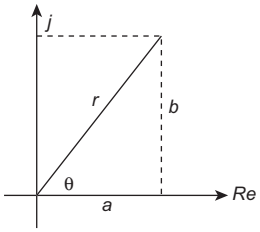


Figura 5.35 Representación gráfica de un fasor. Consiste en un segmento de magnitud *r* sobre el plano complejo que describe un ángulo θ respecto al eje real (horizontal). Se conoce como "diagrama fasorial".

no complejo, como se muestra en la figura 5.35. A esta representación gráfica se le llama *diagrama fasorial*. En el diagrama se aprecia que

$$\theta = \arctan \frac{b}{a} \ (^\circ \text{ o rad}) \qquad \text{(ecuación 5.22)}$$

o bien

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{(ecuación 5.23)}$$

EJEMPLO 5.5

Dado el voltaje $\mathbf{V}_a = 2.5 + j4$ volts, elabora su representación gráfica o diagrama fasorial.

Solución

Desarrollo:

El voltaje $\mathbf{V}_a = 2.5 + j4$ volts está expresado en forma rectangular. Para pasarlo a forma polar, se procede con una calculadora de bolsillo, que hace la transformación directa rectangular ⇒ polar; o bien, aplicando las ecuaciones 5.22 y 5.23 se tiene:

$a = 2.5, \ b = 4$, *por tanto*

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(2.5^2 + (4)^2} = 4.71 \text{ volts}$$

y el ángulo de fase será

$$\theta = \arctan \frac{b}{a} (^\circ) = \arctan \frac{4}{2.5} = 57.99^\circ$$

Con estos resultados se puede llegar a la expresión

$$\mathbf{V}_a = 2.5 + \text{j}4 \text{ volts} = 4.71 \angle 57.99^\circ \text{ volts}$$

El diagrama fasorial correspondiente se presenta en la figura 5.36.

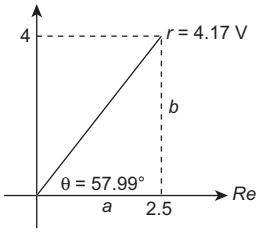


Figura 5.36 Diagrama fasorial para el voltaje $V_a = 2.5 + \text{j}\ 4$ volts del ejemplo 5.5.

El propósito de la transformación fasorial es facilitar el manejo matemático en el análisis de los circuitos en *estado senoidal permanente,* que se da en el dominio del tiempo, pasando al dominio de la frecuencia, y realizar operaciones con fasores tan sencillas como las operaciones fundamentales de suma, resta, multiplicación y división, de la misma manera que se realizan éstas en los números complejos.

Recordemos que la suma o resta entre números complejos se facilita más cuando éstos se expresan en forma rectangular, ya que el resultado se obtiene sumando (o restando) parte real con parte real para obtener la parte real del resultado y parte imaginaria con parte imaginaria para

obtener la parte imaginaria del resultado. Por ejemplo, para efectuar la suma de dos voltajes fasoriales $\mathbf{V}_1$=5.83∠–59.03º volts y $\mathbf{V}_2 = 3.6\angle 56.3^{\circ}$ volts, de la misma frecuencia, primero se hace el cambio a expresión compleja en forma rectangular, para cada fasor:

$$\mathbf{V}_1 = 5.83\angle -59.03^{\circ} \text{ volts} = (3 - j5) \text{ volts}$$
$$\mathbf{V}_2 = 3.6\angle 56.3^{\circ} \text{ volts} = (2 + j3) \text{ volts}$$

Y se procede a sumar parte real más parte real, y parte imaginaria más parte imaginaria:

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = (3 - j5) \text{ volts} + (2 + j3) \text{ volts} = 5 - j\,2 \text{ volts}$$

que expresado en forma fasorial resulta:

$$r = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2} = 5.38 \text{ volts y } \theta = \tan^{-1} -2.55 = -26.56^{\circ}$$

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = 5.38\angle -26.56^{\circ} \text{ volts.}$$

El diagrama fasorial correspondiente se presenta en la figura 5.37.

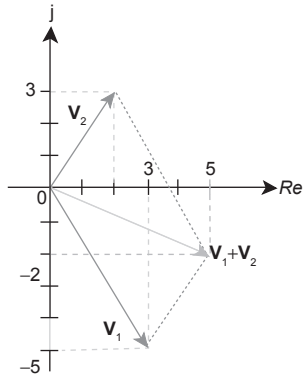


Figura 5.37 Diagrama fasorial de la suma de dos voltajes $\mathbf{V}_1$=5.83∠–59.03° V y $\mathbf{V}_2$ = 3.6∠56.3° V

Agreguemos que la multiplicación o la división entre dos cantidades complejas se hace más sencilla cuando éstas se expresan en forma polar; cuando se tienen dos cantidades complejas en forma rectangular o exponencial, que se multiplican o se dividen, lo más conveniente es expresarlas en forma polar, ya que, para multiplicar fasores, basta con multiplicar la magnitud del primero por la magnitud del segundo, el resultado será la magnitud del producto; en tanto que el ángulo de fase del producto será la suma de los ángulos de fase individuales de cada fasor. Por ejemplo, el producto del voltaje $\mathbf{V} = 3 + j\,4$ volts por la corriente $\mathbf{I} = 0.02 - j\,0.04$ A, se obtiene de la siguiente manera:

Transformación a fasores:

$$\mathbf{V} = 3 + j4 \text{ V} = 5\angle 53.13^{\circ} \text{ V}; \qquad \mathbf{I} = .02 - j\,0.04 \text{ A} = 0.044\angle 63.43^{\circ} \text{ A}$$

Se efectúa el producto:

$$\mathbf{V}\,\mathbf{I} = (5\angle 53.13^{\circ})\,(0.044\angle 63.43^{\circ}) = 0.22\angle 116.56^{\circ} \text{ watts}$$

Si se tratara de obtener el resultado de dividir $\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}}$, se procede como cualquier división entre números complejos expresados en forma polar: Para obtener la magnitud del cociente se divide la magnitud del numerador (**V**) entre la magnitud del denominador (**I**), y el ángulo de fase resultante será la diferencia del ángulo de fase del numerador menos el valor del ángulo de fase del denominador.

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{5\angle 53.13^{\circ} \text{ V}}{0.044\angle 63.43^{\circ} \text{ A}} = 113.636\angle -10.3^{\circ}\ \Omega$$

Conviene que el lector preste atención al hecho de que las unidades de este cociente (Ω) corresponden a las unidades de una resistencia, ya

que se está relacionando un voltaje entre una intensidad de corriente y esto va de acuerdo con la ley de Ohm. Cuando se procede de esta manera entre fasores, se obtiene una oposición al paso de la corriente, que en números complejos se le da el nombre de *impedancia* y se simboliza por la letra **Z** en negrita. Esto significa que una impedancia será, como es la resistencia, una oposición, sólo que expresada en forma de número complejo, con una parte real y una imaginaria. En la siguiente sección se trata algo más acerca de esta importante característica en los circuitos.

COMPETENCIAS:
- Describir los *conceptos impedancia y admitancia* mediante fasores. [1].
- Calcular *la impedancia de elementos resistivos, capacitivos e inductivos* asociados a una fuente de excitación senoidal permanente [2].

5.9 Impedancia y admitancia

5.9.1 Impedancia de un elemento

Cuando se abordó el tema de la ley de Ohm en circuitos resistivos se mencionó que la cd que circula a través de una resistencia es directamente proporcional al voltaje que la produce e inversamente proporcional a la oposición que la resistencia presenta a ésta; o sea que $I = \frac{V}{R}$. De esta relación matemática se obtuvo una expresión para la resistencia, donde $R = \frac{V}{I}$; es decir, que la *oposición* al paso de la corriente es equivalente a la razón del voltaje a la corriente.

De una manera más amplia, desde las cantidades complejas, tenemos que a la oposición que presenta un elemento al paso de la corriente debido a una función de excitación senoidal, se le conoce con el nombre de *impedancia* y se simboliza por la letra **Z**. Dicho de otra forma, cuando se tienen funciones de excitación y respuestas forzadas complejas, a la constante de proporcionalidad entre el *voltaje* y la *corriente complejos* en un elemento de circuito se le conoce como *impedancia* del elemento, y es una función de la frecuencia de la señal en consideración.

La *impedancia*, entonces, se expresa de la siguiente manera:

$$\mathbf{Z} = R + jX\ (\Omega) \qquad \text{(ecuación 5.24)}$$

La componente real de la expresión anterior corresponde a una *resistencia*, y la parte imaginaria está dada por una *reactancia*. Ambas se expresan en ohms (Ω), por tanto, la impedancia también se expresa en ohms. Así entonces, $R = Re\ [\mathbf{Z}]$; $X = Im[\mathbf{Z}]$.

De lo anterior resulta que existe una *impedancia* en un resistor, así como en un inductor o en un capacitor, cuando son alimentados por una función de excitación compleja; ya que de alguna manera, estos elementos se oponen al paso de la corriente eléctrica a través de ellos.

La impedancia que posee una resistencia es $\mathbf{Z_R} = R + j\,0$ ohms. Esto indica que en una resistencia su impedancia tiene sólo una parte real R (expresada en Ω) y no cuenta con una reactancia, que sería su parte imaginaria.

En un inductor la *impedancia inductiva* es $\mathbf{Z}_L = 0 + jX_L$; en la que se ve que la parte real o resistencia es *cero*, y su parte imaginaria, denominada *reactancia inductiva*, medida en ohms, está dada por

$$X_L = \omega L \qquad \text{(ecuación 5.25)}$$

donde ω es la frecuencia de la señal eléctrica (en rad/seg) y L es la inductancia del inductor (en henrys). De lo anterior se obtiene que la impedancia inductiva es $\mathbf{Z}_L = 0 + j\omega L$ ohms; cuyas componentes son cero para la parte real y ωL para la parte imaginaria;

La *impedancia capacitiva* está dada por $\mathbf{Z}_C = 0 - jX_C$. Al igual que en la impedancia inductiva, ésta no tiene parte real, y su parte imaginaria, llamada reactancia *capacitiva*, también medida en ohms, se expresa como

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad \text{(ecuación 5.26)}$$

donde ω es la frecuencia de la señal eléctrica (en rad/s) y C es la capacitancia del capacitor (en farads). De lo anterior se obtiene que la impedancia capacitiva es $\boldsymbol{Z}_C = 0 + \dfrac{1}{j\omega C}$ ohms; cuyas componentes son *cero* para la parte real y $\dfrac{1}{\omega C}$ para la parte imaginaria.

Dado que *la impedancia es una cantidad compleja*, se puede definir como una relación del *voltaje fasorial* a la *corriente fasorial* en un elemento, o sea que

$$\mathbf{Z}\,(\Omega) = \frac{\mathbf{V}(\text{volts})}{\mathbf{I}(\text{Amp})} \qquad \text{(ecuación 5.27)}$$

Pero esto no significa que la impedancia sea un fasor, aun cuando se pueda representar como tal. De lo anterior se deriva que un inductor se representa en el dominio del tiempo por su inductancia L, o bien en el dominio de la frecuencia por su impedancia

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L \qquad \text{(ecuación 5.28)}$$

de la misma manera que un capacitor puede representarse en el dominio del tiempo por su capacitancia C o en el dominio de la frecuencia por su impedancia

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \qquad \text{(ecuación 5.29)}$$

En resumen, la impedancia es un concepto que forma parte del dominio de la frecuencia y no del dominio del tiempo.

Así entonces, cuando una señal en estado senoidal permanente actúa sobre algún inductor (o un capacitor), la oposición que éste presente al paso de la corriente será dependiente tanto de su inductancia (o capacitancia) como de la frecuencia de la señal en consideración. Observa

que en el caso de la *resistencia*, la oposición al paso de la corriente es independiente de la frecuencia y sólo depende del valor óhmico (R) del elemento mismo.

EJEMPLO 5.6

Halla la impedancia en cada elemento, para un inductor $L = 50$ mH, un capacitor $C = 1200$ μF y un resistor $R = 1500\ \Omega$, conectados en serie, y están alimentados por una señal senoidal permanente $v(t) = 5.2\cos(377t + 15^\circ)$ volts.

Elabora el diagrama fasorial para estas impedancias, figura 5.38.

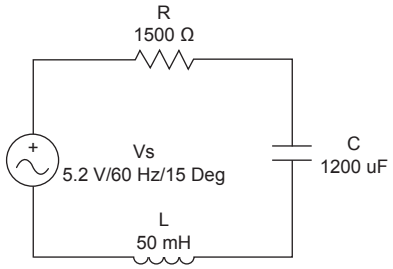


Figura 5.38 Circuito *RLC* para el ejemplo 5.6.

Solución

Datos:

$L = 50$ mH
$C = 1200$ μF
$R = 1500\ \Omega$
$v(t) = 5.2\cos(377t + 15^\circ)$ volts,
$\omega = 377$ rad/s (60 Hz)

Planteamiento:

El problema plantea el caso de un circuito *RLC* en serie, como se muestra en la figura 5.38.

Para facilitar el manejo matemático se procederá a expresar los datos en forma fasorial en todos los casos, tomando en cuenta que en todos los elementos existe la misma señal con la misma frecuencia.

Desarrollo:

De acuerdo con la ecuación 5.26

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j(377\text{rad/s})(0.05\text{ H}) = 18.85\ \Omega$$

En forma fasorial será: $\mathbf{Z}_L = 18.85\angle +90^\circ\ \Omega$

Según la ecuación 5.27:

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j(377\,\text{rad/s})(1200\times10^{-6}\,\text{F})} = -j2.21\,\Omega$$

En forma fasorial queda $\mathbf{Z}_C = 2.21\angle -90^\circ\ \Omega$

Y para la resistencia se tiene**:**

$$\mathbf{Z}_R = R = 1500\ \Omega,\ \textit{o bien}\ \mathbf{Z}_R = 1500\angle 0^\circ\ \Omega$$

El diagrama fasorial para estas impedancias (dadas las magnitudes de las impedancias tan diversas el diagrama no está hecho a la escala correcta) se presenta en la figura 5.39, en el cual se incluye el fasor para el voltaje de la fuente de alimentación, cuya expresión es:

$$v(t) = 5.2\cos(377t + 15^\circ)\text{ volts} \Rightarrow \mathbf{V}_s = 5.2\angle 15^\circ\text{ volts}$$

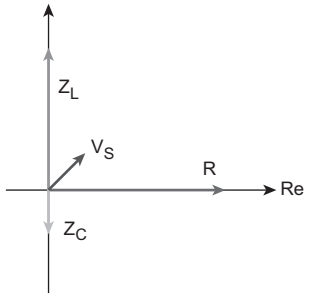


Figura 5.39 Diagrama fasorial para el ejemplo 5.6.

Los acoplamientos de dos o más impedancias obedecen a las mismas reglas que a las resistencias; es decir, que la impedancia total de un arreglo de varias impedancias en serie es equivalente a la suma de las impedancias individuales

$$\mathbf{Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n} \qquad \text{(ecuación 5.30)}$$

o la equivalente de dos o más impedancias en paralelo se obtiene

$$\frac{1}{\mathbf{Z}eq} = \frac{1}{\mathbf{Z}1} = \frac{1}{\mathbf{Z}2} + ... \frac{1}{\mathbf{Z}n} \qquad \text{(ecuación 5.31)}$$

EJEMPLO 5.7

Calcula el valor de la potencia absorbida en cada uno de los elementos del circuito que muestra la figura 5.38, mediante el método de transformación fasorial. Elabora un diagrama fasorial para las potencias absorbidas.

Solución

Con base en los resultados logrados en el ejemplo 5.6 se tienen los siguientes datos:

Datos:

$L = 50$ mH $\Rightarrow \mathbf{Z}_L = 18.85\angle{+90^o}\ \Omega$
$C = 1200\ \mu$F $\Rightarrow \mathbf{Z}_C = 2.21\angle{-90^o}\ \Omega$
$R = 1500\ \Omega$ $\Rightarrow \mathbf{Z}_R = 1500\angle{0^o}\ \Omega$
$v(t) = 5.2\cos(377t+15^o)$ volts, $\Rightarrow \mathbf{V}_s = 5.2\angle{15^o}$ volts
$\omega = 377$ rad/s (60 Hz)

Planteamiento:

Puesto que se trata de una malla con elementos conectados en serie, se procede a aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes para obtener la ecuación de malla en términos de fasores.

Desarrollo:

De la figura 5.37, se tiene la siguiente ecuación de voltajes de malla, en términos de fasores:

$$\mathbf{-V_s + Z_R I + Z_C I + Z_L I} = 0$$

despejando a ***I***, y al sustituir valores se obtiene:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V_S}}{\mathbf{Z_R} + \mathbf{Z_C} + \mathbf{Z_L}} = \frac{5.2\angle{15°}V}{1500\angle{0°}\,\Omega + 2\,21\angle{-90^o}\,\Omega + 18.85\angle{+90^o}\,\Omega}$$

La expresión es un cociente cuyo denominador es la suma de tres números complejos en forma abreviada o fasorial; por tanto, para efectuar esta suma se puede hacer la transformación a forma rectangular:

$$\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_L = (1500 + j\,0^o\ \Omega) + (0 - j\,2.21\ \Omega) + (0 + j\,18.85\ \Omega)$$
$$\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_L = 1500 + j\,16.64\ \Omega$$

Ahora se vuelve a expresar en forma abreviada o fasorial para simplificar el cociente:

$$\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_L = 1500 + j\,16.64\ \Omega = 1500.09\angle 0.6355^o\ \Omega$$

Entonces, la expresión para **I** es:

$$\mathbf{I} = \frac{5.2\angle 15°\text{V}}{1500.09\angle 0.6355°\Omega.} = 3.466\angle\ 14.3645^o\ \text{mA}$$

Teniendo el valor para la corriente en la malla en forma fasorial y la impedancia para cada uno de los elementos se procede a calcular las potencias absorbidas por éstos.

$$\mathbf{P}_R = \mathbf{Z}_R\,\mathbf{I}^2 = (1500\angle 0^o\ \Omega)\,(3.466\angle\ 14.3645^o\ \text{mA})^2 = 18.01\angle\ 28.729^o\ \text{mW}$$
$$\mathbf{P}_C = \mathbf{Z}_C\,\mathbf{I}^2 = (2.21\angle -90^o\ \Omega)\,(3.466\angle\ 14.3645^o\ \text{mA})^2 = 0.0265\angle -61.271^o\ \text{mW}$$
$$\mathbf{P}_L = \mathbf{Z}_L\,\mathbf{I}^2 = (18.85\angle +90^o\ \Omega)\,(3.466\angle\ 14.36^o\ \text{mA})^2 = 0.226\angle\ 118.72^o\ \text{mW}$$

Asimismo, se puede conocer la potencia absorbida por la fuente:

$$\mathbf{P}_{Vs} = \mathbf{V}_S\,\mathbf{I} = (5.2\angle 15^o\ \text{volts})\,(-3.466\angle\ 14.36^o\ \text{mA}) = -18.023\angle\ 29.36^o\ \text{mW}$$

Puedes observar que la mayor parte de la potencia que proporciona la fuente de alimentación es absorbida por la resistencia, lo cual se reflejará en el diagrama fasorial de potencias, ya que los segmentos representativos de la potencia en el inductor y en el capacitor serán mucho menores que el segmento que representa a la potencia en la resistencia. Se ha elaborado el diagrama fasorial, modificando la escala y se presenta en la figura 5.40.

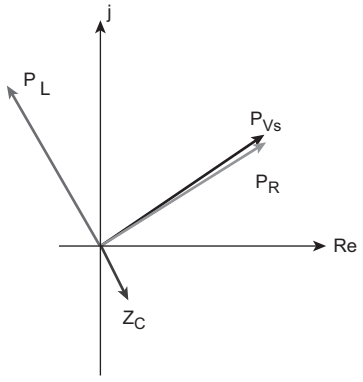


Figura 5.40 Diagrama fasorial para las potencias absorbidas en el circuito del ejemplo 5.7. Las líneas punteadas en los segmentos para P_{V_S} y P_R indican que éstos son más largos de lo que aparecen. No hay escala.

El resultado del ejemplo 5.7 se comprueba de la misma manera que se hace para los circuitos en cd; verificando que la suma de potencias en los elementos pasivos sea igual a la potencia absorbida en la fuente de alimentación. Así entonces, efectuando la suma de los valores para las potencias individuales se tiene que:

$$\mathbf{P}_R + \mathbf{P}_C + \mathbf{P}_L = 18.01\angle\ 28.72^o\ \text{mW} + 0.0265\angle\ -61.271^o\ \text{mW} + 0.226\angle\ 118.72^o\ \text{mW}$$

Se hace la transformación a forma rectangular para realizar la suma.

$\mathbf{P}_R + \mathbf{P}_C + \mathbf{P}_L = (15.7943 + j\ 8.654\ \text{mW}) + (0.012737 - j\ 0.0232\ \text{mW}) + (-0.1085 + j\ 0.1981\ \text{mW})$

$$\mathbf{P}_R + \mathbf{P}_C + \mathbf{P}_L = 15.6985 + j\ 8.8289\ \text{mW}$$

Y si al resultado de esta suma lo pasamos a la forma fasorial se obtiene:

$$\mathbf{P}_R + \mathbf{P}_C + \mathbf{P}_L = 18.01\angle 29.353^\circ\ \text{mW}$$

Este resultado es prácticamente igual al que se obtuvo en el ejemplo mediante el producto

$$\mathbf{P}_{Vs} = \mathbf{V}_S\,\mathbf{I} = (5.2\angle 15^\circ\ \text{volts})\,(-3.466\angle 14.36^\circ\ \text{mA}) = -18.023\angle 29.36^\circ\ \text{mW}$$

Recuerda que el signo *menos* que aparece en la *potencia absorbida* por la fuente significa que ésta en realidad *no absorbe*, sino que *proporciona* potencia eléctrica.

5.9.2 Admitancia de un elemento

COMPETENCIA:
Calcular la *admitancia de elementos resistivos, capacitivos e inductivos* asociados a una fuente de excitación senoidal permanente. [2].

De la misma manera que existe un recíproco para la *resistencia*, que es la *conductancia*, también se tiene el recíproco para la impedancia, llamado *admitancia* y simbolizado por la letra **Y**. La relación está dada por la ecuación 5.30.

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} \qquad \text{(ecuación 5.32)}$$

Por tanto

$$Y = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} \qquad \text{(ecuación 5.33)}$$

Las ecuaciones 5.32 y 5.33 indican que la admitancia **Y** tiene características de cantidad compleja; es decir, una parte real y una imaginaria

Como

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R + jX} \qquad \text{(ecuación 5.34)}$$

entonces

$$\mathbf{Y} = G + jB \qquad \text{(ecuación 5.35)}$$

donde G[4] es la *conductancia* $\left[\frac{1}{}\quad \text{siemens}\right]$

[4] Obsérvese que en la relación $\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Z}}$, no necesariamente la parte real de la admitancia es igual al recíproco de la parte real de la impedancia, ni la parte imaginaria de la primera es igual al recíproco de la segunda.

B: es la *susceptancia* $\left[\frac{1}{\Omega} = \text{siemens}\right]$

Por tanto, **Y** tiene dimensiones de $\frac{\text{Amp}}{\text{Volt}} = \frac{1}{\Omega}$, a lo que se le llama *siemens*. De la ecuación 5.32 se tiene que $1\ \text{S} = \frac{1}{\Omega}$.

El valor de la admitancia equivalente a un arreglo de dos o más admitancias en paralelo se obtiene sumando los valores individuales de las admitancias del arreglo:

$$\mathbf{Y_{eq}} = \mathbf{Y_1} + \mathbf{Y_2} + \ldots + \mathbf{Y_n} \qquad \text{(ecuación 5.36)}$$

Y contrariamente a lo que sucede con las impedancias, la admitancia equivalente de dos o más admitancias en un arreglo en serie se obtiene con

$$\frac{1}{\mathbf{Y}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\mathbf{Y}_1} + \frac{1}{\mathbf{Y}_2} + \ldots + \frac{1}{\mathbf{Y}_n} \qquad \text{(ecuación 5.37)}$$

EJEMPLO 5.8

Para la red de la figura 5.38 *a*) obtener la admitancia total que está conectada a la fuente de alimentación. *b*) Con la ley de Ohm halla la corriente que circula en la malla y compara tus resultados con los del ejemplo 5.6.

Solución
Datos:

$L = 50$ mH $\Rightarrow \mathbf{Z}_L = 18.85\angle +90^\circ\ \Omega$

$C = 1200\ \mu\text{F}$ $\Rightarrow \mathbf{Z}_C = 2.21\angle -90^\circ\ \Omega$

$R = 1500\ \Omega$ $\Rightarrow \mathbf{Z}_R = 1500\angle 0^\circ\ \Omega$

$v(t) = 5.2\cos(377t + 15^\circ)$ volts, $\Rightarrow \mathbf{V}_s = 5.2\angle 15^\circ$ volts

$\omega = 377$ rad/s (60 Hz)

Planteamiento:

De los resultados del ejemplo 5.6, se tienen como datos los valores de las impedancias de los elementos conectados en serie. A partir de éstos se pueden calcular las admitancias individuales y después obtener la admitancia total equivalente; o bien, se puede obtener la impedancia total a partir de los datos y luego aplicar la ecuación 5.34.

Desarrollo:

La impedancia total de la red es:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_L$$
$$\mathbf{Z}_{eq} = 1500\angle 0^o\ \Omega + 2.21\angle -90^o\ \Omega + 18.85\angle +90^o\ \Omega$$

O sea: $$\mathbf{Z}_{eq} = (1500 + j\,0^o\ \Omega) + (0 - j\,2.21\ \Omega) + (0 + j18.85\ \Omega)$$
$$\mathbf{Z}_{eq} = 1500 + j\,16.64\ \Omega = 1500.09\angle 0.6355^o\ \Omega$$

Por tanto, la admitancia total será: $\mathbf{Y} = \dfrac{1}{\mathbf{Z}} = \dfrac{1}{1500.09\angle 0.6355^o\Omega}$

$$\mathbf{Y} = 666.6\angle -.6355^o\ \mu S$$

Al aplicar la ecuación 5.31 se obtiene la corriente en la malla:

$$\mathbf{I} = \mathbf{VY} = (5.2\angle 15^o \text{ volts})(\ 666.6\angle -\ 0.6355^o\ \mu S) = 3.466\angle\ 14.36^o\ mA$$

Actividades para la evaluación de competencias

Señales periódicas

5.1 Describe el concepto de señal eléctrica.
5.2 ¿Qué se entiende por una señal periódica?
5.3 ¿Qué es la *frecuencia* en una señal periódica?
5.4 Escribe la ecuación que describe a una señal senoidal y explica el significado de cada uno de sus factores componentes en la expresión.
5.5 ¿Cuál será el valor de la frecuencia $f(Hz)$ de una señal si su frecuencia $\omega = 377$rad/s?

Valores instantáneo, medio y eficaz en las señales eléctricas

5.6 ¿Por qué se dice que una señal senoidal es una función del tiempo?
5.7 Dada la función $i(t) = 5.7 \text{ sen } 2000t$ A, determina el valor de la intensidad de corriente para a) $t = 0.37$ ms, b) $t = 1.7$ ms, c) $t = 2.86$ ms.
5.8 Encuentra el valor rms de la señal del problema 5.7.
5.9 Dada la función $v(t) = 12.4 \text{ sen } 100\ t$ V ¿Qué sucederá con su valor rms si su frecuencia aumenta al doble?
5.10 Dada la ecuación 5.9 demuestra que el valor *rms* de una señal senoidal es igual

$$V_{rms} = \frac{A_o}{\sqrt{2}}$$

Generadores de señales

5.11 Menciona qué entiendes por un *generador de señales*.
5.12 Realiza una breve investigación a través de Internet para encontrar algunas de las principales aplicaciones de los generadores de señales en circuitos electrónicos.

Medición de las señales eléctricas

5.13 Describe lo que es un *osciloscopio* y sus principales aplicaciones en un laboratorio de electrónica.
5.14 ¿Qué son las *figuras de Lissajous* y para qué se emplean en el laboratorio de electrónica?
5.15 ¿Qué se entiende por *ángulo de fase* en las señales periódicas?

La función de excitación senoidal

5.16 Dibuja dos señales senoidales $f_1(t)$ y $f_2(t)$ que dispongan de la misma amplitud e igual frecuencia, donde $f_1(t)$ adelante a $f_2(t)$ por un ángulo de 60 grados.
5.17 Escribe las expresiones matemáticas que modelen a las señales propuestas en la actividad anterior.
5.18 Calcula el ángulo de fase, expresado en radianes, que hay entre los voltajes $v_1(t)$ =7.8 sen(400π t – 80º) A y $v_2(t)$ = 4.9 cos (400π t – 110º) *V*.
5.19 Dibuja las señales propuestas en la actividad anterior.

Relaciones fasoriales para *R*, *C* y *L*

5.20 Dada la función del tiempo $f(t)$=12 sen(377t – 45º) encuentra su expresión en forma fasorial.
5.21 Encuentra la expresión fasorial para la función del tiempo

$$f(t) = 12 \text{ sen}(377t - 45^\circ) + 5 \cos(377t - 80^\circ).$$

5.22 Encuentra el voltaje complejo correspondiente a la fuente de la red mostrada en la figura 5.29, si se tiene un resistor de 1200 Ω y un inductor de 4 mH, a través de los cuales circula una corriente compleja de 2.5 e^{j300t} mA. Expresa tu resultado en forma exponencial y en forma polar.
5.23 Dada la expresión para el voltaje $12\angle 40°$ volts, encuentra su valor instantáneo para t = 2 ms, si se sabe que ω = 100 rad/s.

Notas:

[1] Competencias de la dimensión Instrumental.
[2] Competencias de la dimensión Sistémica.
[3] Competencias de la dimensión Interpersonal.

Segunda Parte

Electrónica analógica básica

Capítulo 6 Diodos semiconductores

Capítulo 7 Aplicación de los diodos semiconductores

Capítulo 8 Transistores bipolares de unión

Capítulo 9 Amplificadores operacionales

Capítulo 6

Diodos semiconductores

Estructura

Temas	CONTENIDOS	
	Conceptuales	
6.1 Materiales y la corriente eléctrica 6.1.1 Acerca de la estructura electrónica. 6.1.2 Acerca de la teoría de bandas de energía.	• Concepto de bandas de energía.	
6.2 Materiales semiconductores 6.2.1 Materiales intrínsecos y extrínsecos. 6.2.2 Flujo de cargas eléctricas en un material extrínseco.	• Conceptos de material intrínseco y material extrínseco. • Tipos de materiales extrínsecos. • Materiales conductores, no conductores y semiconductores. • Concepto de sentido real y sentido convencional en la corriente eléctrica.	
6.3 Diodo semiconductor 6.3.1 Diodo de unión por crecimiento. 6.3.2 Diodo de unión por difusión.	• Qué es un diodo semiconductor. • Tipos de diodos de unión.	
6.4 Polarización del diodo 6.4.1 Polarización directa. 6.4.2 Polarización inversa.	• Concepto de polarización de un diodo. • Formas de polarización de un diodo.	
6.5 Características del diodo semiconductor 6.5.1 Resistencia estática en el punto de operación. 6.5.2 Resistencia promedio en ca, en torno a un punto de operación. 6.5.3 Resistencia dinámica.	• Punto de operación de un diodo. • Qué se entiende por resistencia estática, resistencia promedio y resistencia dinámica en un diodo.	
6.6 Modelos para el diodo 6.6.1 Modelo ideal. 6.6.2 Modelo simplificado. 6.6.3 Modelo por segmentos lineales.	• Qué es un modelo para el diodo. • Tipos de modelos para la representación de un diodo.	

	temática

	CONTENIDOS	
	Procedimentales	**Actitudinales**
	• Teoría de bandas de energía.	• Elementos para valorar los trabajos realizados por distinguidos científicos y sus aportaciones al desarrollo de la ciencia y la tecnología electrónica.
	• Procesos para impurificación de materiales. • Conducción de la corriente eléctrica en los materiales sólidos.	• Elementos para apreciar la importancia de los dispositivos electrónicos en el desarrollo de la tecnología moderna.
	• Proceso para la formación de diodos semiconductores.	• Importancia del desarrollo de la física electrónica y su aplicación en sistemas tecnológicos actuales.
	• Proceso para la polarización de un diodo semiconductor.	• Importancia de las expresiones matemáticas para modelar fenómenos físicos reales.
	• Proceso para obtener la curva que define las características en un diodo semiconductor. • Cálculo de la resistencia de un diodo semiconductor con respecto a un punto de operación.	• Actividades que fomentan el interés por desarrollar tareas en equipos de trabajo.
	• Formación de modelos para el diodo semiconductor.	• Actividades que permiten valorar el esfuerzo y el trabajo individual mediante cálculos de exactitud y precisión en el planteamiento, desarrollo y resolución de problemas relacionados con los temas correspondientes.

Estructura

Temas	CONTENIDOS	
	Conceptuales	
6.7 Análisis de circuitos con diodos 6.7.1 Método de las aproximaciones del diodo. 6.7.2 Método de la recta de carga.	• Por qué se aplican aproximaciones en el análisis de circuitos con diodos. • Qué es la recta de carga en un diodo semiconductor.	
6.8 Diodo Zener	• Efecto Zener. • Región Zener en la curva característica de un diodo.	
6.9 Otros tipos de diodos 6.9.1 Diodo emisor de luz (LED). 6.9.2 Fotodiodo. 6.9.3 Fotodiodo de avalancha. 6.9.4 Celda solar.	• Algunos tipos de diodos semiconductores más comunes.	
Actividades para la evaluación de competencias		

	temática
	CONTENIDOS

	Procedimentales	**Actitudinales**
	• Cálculo de la corriente, voltaje y potencia asociados a un diodo semiconductor por diferentes métodos.	• Elementos para la valoración del trabajo personal y en equipos.
	• Cálculo de la corriente, voltaje y potencia asociados a un diodo zener.	• Elementos para representar y valorar fenómenos físicos reales a través de apoyos matemáticos.
	• Aplicación de diodos semiconductores más comunes.	• Conceptos e información que permiten valorar el desarrollo de los semiconductores en aplicaciones tecnológicas en beneficio de la humanidad.

Orientación general

Analizar los principios de operación de los diodos semiconductores, sus características y aplicaciones en circuitos electrónicos básicos.

Competencias

Dimensión Instrumental [1]	Dimensión Sistémica [2]	Dimensión Interpersonal [3]
Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:
1.1 Comprender el concepto *bandas de energía* como base de la explicación del comportamiento de los electrones en la conducción de la electricidad. 1.2 Comprender los conceptos de material conductor, no conductor y semiconductor a partir de la teoría de bandas de energía. 1.3 Comprender qué es un material intrínseco y qué es un material extrínseco. 1.4 Comprender el concepto de diodo semiconductor de unión. 1.5 Comprender en qué consiste la polarización de un diodo semiconductor. 1.6 Analizar la curva característica de un diodo semiconductor. 1.7 Comprender el concepto de resistencia en un diodo bajo tres enfoques distintos: estático, promedio y dinámico. 1.8 Interpretar los modelos ideal, simplificado y por segmentos lineales, para un diodo semiconductor. 1.9 Comprender el método de aproximaciones para el análisis de circuitos con diodos. 1.10 Comprender el método de la recta de carga para el análisis de un circuito simple con un diodo. 1.11 Comprender la teoría básica de un diodo zener. 1.12 Comprender la teoria básica del diodo emisor de luz (LED), el fotodiodo y la celda solar.	2.1 Describir cómo se forma las bandas de energía debidas a los electrones, como marco conceptual para explicación de la conducción de la electricidad en los cuerpos sólidos. 2.2 Explicar el proceso para la elaboración de materiales intrínsecos y extrínsecos. 2.3 Explicar el comportamiento de un material sólido al conducir la corriente eléctrica, con base en la teoría de bandas de energía. 2.4 Explicar la formación de diodo semiconductor por crecimiento y por difusión. 2.5 Aplicar los principios de polarización de un diodo semiconductor en circuitos básicos. 2.6 Obtener la curva característica de un diodo semiconductor, como relación funcional voltaje-corriente. 2.7 Calcular la resistencia de un diodo semiconductor en un punto de operación, desde los puntos de vista estático, promedio y dinámico. 2.8 Aplicar la teoría de modelos para el diodo en el análisis y diseño de circuitos básicos con diodos semiconductores. 2.9 Analizar circuitos simples con un diodo mediante el método de aproximaciones. 2.10 Analizar circuitos simples con un diodo mediante el método de la recta de carga. 2.11 Analizar circuitos simples que contienen un diodo zener. 2.12 Describir el funcionamiento del LED, el fotodiodo y la celda solar.	3.1 Valorar la importancia de los estudios de investigadores en materia de semiconductores y sus aportaciones al desarrollo de la tecnología. 3.2 Apreciar la importancia que tienen los dispositivos semiconductores en sistemas electrónicos.

Introducción

COMPETENCIAS:
- Valorar la importancia de los estudios de investigadores en materia de semiconductores y sus aportaciones al desarrollo de la tecnología. [3]
- Apreciar la importancia que tienen los dispositivos semiconductores en los sistemas eléctricos. [3]

La sociedad actual ha experimentado cambios nunca antes vistos. Somos testigos de la influencia de la electrónica en todos los aspectos de la tecnología. Ya no concebimos la vida moderna sin los medios de comunicación (radio, televisión, telefonía), sin los sistemas de manejo de información (computación), sin la electrónica de consumo en el hogar, sin los avances de la medicina auxiliados por la técnica. Todo ha sido posible gracias a los trabajos de investigación y desarrollo tecnológico, los cuales se han visto acelerados a partir de la invención de los diodos y transistores. Estos dispositivos se construyen con base en materiales semiconductores, a partir de los cuales se fabrican prácticamente todos los sistemas electrónicos existentes.

El presente capítulo está dedicado al estudio de los fundamentos de los dispositivos semiconductores, tan ampliamente utilizados el día de hoy en los circuitos electrónicos, y a un estudio básico del diodo, que es el dispositivo semiconductor más simple que se elabora, y a partir del cual se han desarrollado otros dispositivos menos simples y con una gran gama de posibilidades de aplicación, como el transistor.

El nombre de *semiconductor* obedece a que está elaborado con un material cuya conductividad eléctrica puede considerarse situada entre un aislante y un conductor, considerados en orden creciente, a lo que se le llama precisamente material semiconductor.

Los materiales semiconductores más comunes en el área de circuitos electrónicos son el silicio (Si) y el germanio (Ge); sin embargo, el primero es el más utilizado en la fabricación de los componentes electrónicos de estado sólido, debido a que es más abundante en la naturaleza, y su comportamiento frente a todas las perturbaciones exteriores que pueden alterar su respuesta normal es más estable que el germanio. No obstante, deberás tener en cuenta que el manejo de circuitos con dispositivos de germanio es absolutamente similar.

Este capítulo comprende desde los conceptos fundamentales de los materiales semiconductores, los diodos y sus características, polarización y circuitos básicos con diodos, como son el rectificador, el recortador, las compuertas lógicas e incluye su aplicación en una fuente de alimentación. También se hace un repaso de los fundamentos de los tipos de materiales según su comportamiento ante la corriente eléctrica.

6.1 Materiales y la corriente eléctrica

COMPETENCIAS:
- Comprender el concepto de bandas de energía como base de la explicación del comportamiento de los electrones en la conducción de electricidad. [1]
- Describir como se forman las bandas de energía debido a los electrones, como marco para la explicación de la conducción de la electricidad en los cuerpos sólidos. [2]

6.1.1 Acerca de la estructura electrónica

Muchas de las propiedades eléctricas de los sólidos se interpretan en términos de energía, de la misma manera que ocurre con los átomos individuales. Tanto en los cuerpos sólidos como en los átomos que los componen, los electrones desempeñan un papel de gran importancia, sólo que mientras que en los átomos las energías de los electrones están

confinadas en niveles discretos, en los cuerpos sólidos se extienden en bandas de energía. Estas bandas proporcionan el marco conceptual necesario para la discusión de la conducción de calor y de electricidad.

En sus primeros esfuerzos para explicar la estructura electrónica de los metales, los científicos desarrollaron teorías acerca de las propiedades de la buena conductividad térmica y eléctrica para apoyar, a su vez, a la teoría de que los metales se componen de átomos ionizados, cuyos electrones libres forman una nube homogénea de carga negativa. Consideraban a la atracción electrostática, entre los iones positivos del metal y los electrones libres, como la responsable del enlace entre los átomos del metal, y que el libre movimiento de los electrones era la causa de su alta conductividad, eléctrica y térmica. La principal objeción a esta teoría es que en tal caso los metales debían tener un *calor específico* superior al que realmente tienen.

6.1.2 Acerca de la teoría de bandas de energía

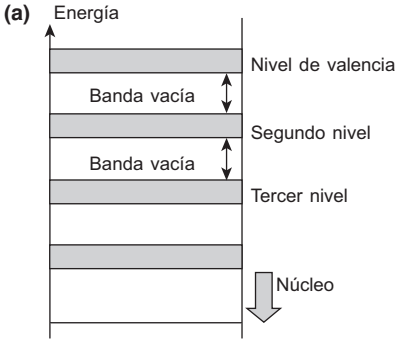
En 1928, el físico alemán Arnold Sommerfield sugirió que los electrones en los metales se encuentran en una disposición cuántica tal que los niveles de baja energía disponibles para los electrones se hallan casi completamente ocupados. En el mismo año el físico suizo-estadounidense Felix Bloch, y más tarde el físico francés Louis Brillouin, aplicaron esta idea en la hoy aceptada *teoría de la bandas* para los enlaces en los sólidos metálicos.

De acuerdo con esta teoría, cualquier átomo de metal tiene un número limitado de electrones de valencia con los cuales puede enlazarse a los átomos vecinos. Por ello se requiere de un amplio reparto de electrones entre los átomos individuales. Dicho reparto de electrones se consigue por la superposición de orbitales atómicos de energía equivalente con los átomos adyacentes. Esta superposición recorre toda la muestra del metal y forma amplios orbitales que se extienden por todo el sólido en vez de pertenecer a átomos concretos. Cada uno de estos orbitales tiene un nivel de energía distinto debido a que los orbitales atómicos de los que proceden tienen a su vez diferentes niveles de energía.

En esta teoría se dice que los grupos de electrones residen en *bandas*, constituidas por conjuntos de orbitales (figura 6.1), lo cual significa que los niveles de energía originales para los electrones se modifican de alguna manera. Los orbitales tienen dos electrones cada uno y se van llenando en orden de menor a mayor energía hasta agotar el número de electrones disponibles.

Cuando dos átomos se colocan lo suficientemente próximos para interaccionar dinámicamente, las fuerzas de un átomo influyen sobre el otro, sus niveles de energía se separan (se escinden). La naturaleza de esta separación y la forma en que dependen de su distancia de acercamiento-separado pueden entrecruzarse para ciertas distancias interatómicas y separarse de nuevo para otras distancias.

Cuando más de dos átomos idénticos se colocan próximos el proceso de separación de los niveles de energía continúa hasta dar una multitud de niveles muy próximos entre sí, que forman bandas de energía en las



(b)



Figura 6.1. (a) Representación de los diversos niveles de energía en el átomo, de acuerdo a la teoría de bandas. **(b)** Arnold Sommerfeld (1868-1951). Físico alemán cuyos estudios acerca de la propagación de las ondas electromagnéticas en cables y el campo producido por un electrón en movimiento contribuyeron al desarrollo de la mecánica cuántica

que pueden moverse los electrones atómicos. Dicha situación resultante la representa la figura 6.1.

En cuanto a los niveles de los electrones internos en los átomos con muchos electrones, dichos niveles no se separan en bandas, debido al *efecto de pantalla* de los electrones de las capas externas, lo que impide que los electrones internos interaccionen con los átomos vecinos.

Cada banda tiene un rango de valores de energía, valores que deben poseer los electrones para ser parte de esa banda. En algunos metales se dan interrupciones de energía entre las bandas, pues los electrones no poseen ciertos valores de energías.

La banda con mayor energía en un metal es *banda de conducción* y no está llena de electrones, dado que una característica de los metales es que no poseen suficientes electrones para llenarla. La banda que le sigue, *banda de valencia*, posee a todos los electrones del último nivel energético del átomo, que participan en los enlaces para la formación de moléculas. Cuando un electrón ubicado en la banda de valencia adquiere energía por alguna causa, pasa a la banda superior, que es la de conducción. Así que la elevada conductividad eléctrica y térmica de los metales se explica por el paso de electrones a estas bandas con déficit de electrones, paso provocado por la absorción de energía térmica.

Una vez ubicado el electrón en la banda de conducción tiene capacidad para transportar energía hacia otros sitios fuera de su átomo padre; aunque en este intento vuelve a perder la energía ganada y "cae" nuevamente a la banda de energía inferior, la de valencia.

Entre la banda de valencia y la de conducción existe una banda vacía (sin electrones) *banda prohibida*. Esta banda representa una barrera que dificulta el tránsito de los electrones de la banda de valencia a la banda de conducción, salvo que éstos adquieran la energía suficiente para superar esa barrera.

Para cuantificar la energía asociada a los electrones el *joule* resulta ser una unidad demasiado grande, por lo que se usa una unidad más apropiada denominada *electrón-volt*, cuya equivalencia con el *joule* tiene la siguiente explicación: un electrón de carga Q realiza un trabajo W cuando se desplaza entre dos puntos con una diferencia de potencial V de un volt. La representación matemática la proporciona la ecuación 6.1.

$$W = QV \qquad \text{(ecuación 6.1)}$$

Al sustituir el valor de la carga de un electrón en la ecuación 6.1 se tiene una expresión para el trabajo realizado por la partícula:

$$W = (1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})\ (1\ \text{volt})$$
$$W = 1.6 \times 10^{-19}\ \text{joules}$$

Esta cantidad de trabajo se denomina *electrón-volt* y se dice entonces que:

$$1\ \text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\ \text{joules}$$

A partir de la teoría de bandas de energía es que se ha encontrado la explicación del comportamiento diferente de los materiales ante una

corriente eléctrica. De ahí que se hace una clasificación de ellos, distinguiendo tres grandes grupos: conductores, aisladores y semiconductores, que se describen a continuación.

COMPETENCIAS:

- Comprender los conceptos de material semiconductor, no conductor y conductor a partir de la teoría de bandas de energía. [1]
- Explicar el comportamiento de un material sólido al conducir la corriente eléctrica, con base en la teoría de bandas de energía eléctrica. [2]

Conductor eléctrico

Se llama así a cualquier material que ofrezca poca resistencia al flujo de electricidad. De lo anterior se concluye que un conductor es un cuerpo de material con baja resistividad.

En los conductores sólidos la corriente eléctrica es transportada por el movimiento de los electrones, mientras que en disoluciones y gases es a través de iones. Ciertos metales como el cobre, la plata y el aluminio son excelentes conductores por no contar con banda prohibida, dado que las bandas de valencia y de conducción se traslapan entre sí (figura 6.2). Son sustancias que poseen muchos electrones libres cuyo movimiento se considera errático, aunque puede encauzarse en una sola dirección al aplicar una fuerza y conseguir un flujo electrónico.

Aislador eléctrico

Un material aislador o dieléctrico posee un alto nivel de resistividad; en realidad es un *mal conductor* de electricidad. La diferencia entre un conductor y un aislador es de *grado* más que de *tipo*, ya que todas las sustancias conducen electricidad en mayor o en menor medida. Un buen conductor de electricidad, como la plata o el cobre, que son metales en cuyas estructuras de enlaces atómicos no existe banda prohibida, puede tener una conductividad miles de millones de veces superior a la de un buen aislador como el vidrio, el diamante o la mica, que son materiales con una gran banda prohibida cuya energía E_g es superior a 5 eV.

En los circuitos eléctricos normales suelen usarse plásticos como revestimiento aislante para los cables. Los cables muy finos, como los empleados en las bobinas (por ejemplo en un transformador), pueden aislarse con una capa delgada de barniz. El aislamiento interno de los

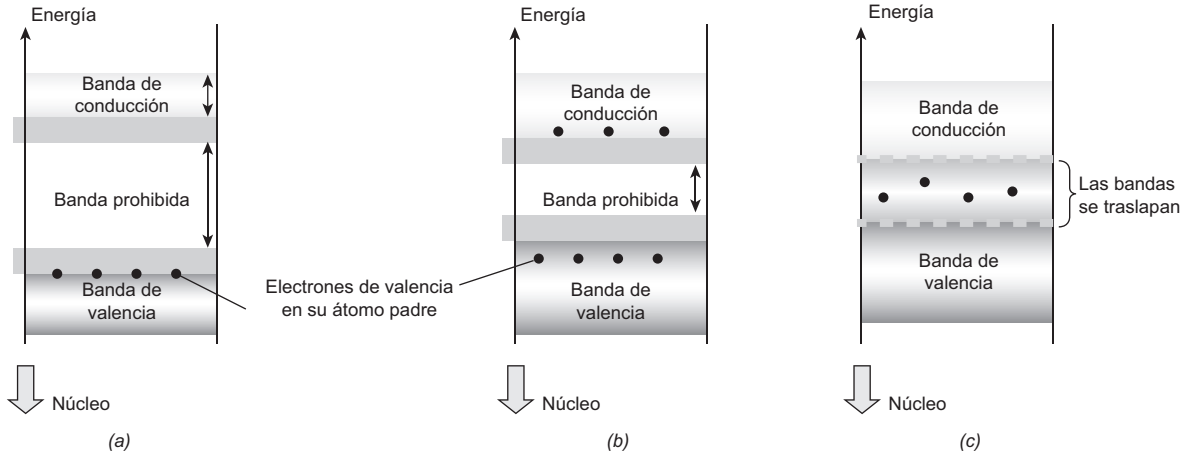


Figura 6.2 Representación esquemática de las bandas de energía de conducción, de valencia y la prohibida en los materiales. (*a*) Material aislante, (*b*) material semiconductor, (*c*) conductor.

equipos eléctricos se efectúa con mica o mediante fibras de vidrio con un aglutinador plástico; en los equipos electrónicos y transformadores se emplea un papel especial para aplicaciones eléctricas; los conductores de las líneas de alta tensión se aíslan con vidrio, porcelana u otro material cerámico.

El aislador *perfecto* para las aplicaciones eléctricas sería un material absolutamente no conductor, pero ese material no existe. Los materiales empleados como aislantes siempre conducen, aunque poca, electricidad, pero presentan una resistencia al paso de corriente eléctrica hasta 2.5×10^{24} veces mayor que la de los buenos conductores eléctricos como la plata o el cobre, figura 6.2.

Semiconductor

Recibe este nombre cualquier material sólido o líquido capaz de conducir la electricidad mejor que un aislador, pero no tan bien como un metal. La conductividad eléctrica o capacidad para conducir la corriente eléctrica cuando se aplica una diferencia de potencial es una de sus propiedades físicas más importantes. A temperaturas muy bajas los semiconductores puros se comportan como aislantes, pero cuando se someten a altas temperaturas y se mezclan con impurezas o en presencia de luz, la conductividad de los semiconductores aumenta de forma espectacular y llega a alcanzar niveles cercanos a los metales.

Las propiedades de los semiconductores se estudian en el área de la física del estado sólido, de la cual se puede destacar que la energía correspondiente a la banda prohibida en estos materiales es de $E_g = 1.1$ eV en el silicio (Si), $E_g = 0.67$ eV en el germanio (Ge), de $E_g = 1.4$ eV en el arseniuro de galio (GaAs).

Los dispositivos semiconductores tienen muchas aplicaciones en la ingeniería eléctrica, en la electrónica, en las comunicaciones, en los sistemas computacionales, y los últimos avances de la ingeniería han producido pequeñas cápsulas o *chips* que contienen cientos de miles de transistores, diodos y otros dispositivos semiconductores. Estos chips han hecho posible la miniaturización en los dispositivos y en los sistemas electrónicos. La aplicación más eficiente de este tipo de chips es la fabricación de circuitos de semiconductores de metal-óxido complementario, llamados CMOS que están formados por parejas de transistores de canal *p* y *n* controladas por un solo circuito; aunque también se fabrican dispositivos extremadamente pequeños utilizando la técnica epitaxial de haz molecular.

En la figura 6.2 se muestra un esquema para explicar el comportamiento eléctrico de los materiales desde el punto de vista de la teoría de bandas. La figura 6.2*a* representa lo que corresponde a un material aislador, en el cual la banda de conducción tiene un nivel muy alto de energía respecto a la banda inmediata anterior que es la de valencia. Entre estas dos aparece la banda prohibida, cuyos niveles energéticos difícilmente pueden ser adquiridos por algún electrón de valencia.

La figura 6.2*b* presenta las bandas de energía existentes en un material *semiconductor*; aquí la banda prohibida es de menor valor que en los aisladores, de ahí que los electrones de la banda de valencia pasen

a la banda de conducción con tan solo adquirir una cantidad adicional de energía superior a la magnitud de la energía comprendida en la banda prohibida. Este esquema explica que un material *semiconductor* tenga comportamiento de conductor, en ciertas condiciones, o bien de aislador en otras.

La figura 6.2*c* es una representación de las bandas de energía en un material *conductor*; puedes apreciar que no existe banda prohibida, las bandas de conducción y la de valencia se traslapan; es decir que un electrón que se encuentre en la banda de valencia puede estar al mismo tiempo en la banda de conducción y viceversa. Es por ello que los conductores tienen una capacidad resistiva relativamente pequeña y pueden transportar la corriente eléctrica con mucha fácilidad.[1]

6.2 Materiales semiconductores

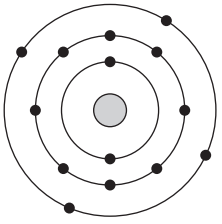


Figura 6.3 Modelo atómico para el silicio (NA: 14).

Entre los semiconductores comunes se encuentran tanto elementos químicos como el silicio (figura 6.3), el germanio y el selenio, como también compuestos, como el arseniuro de galio, el seleniuro de zinc y el telururo de plomo. En estos materiales es posible incrementar el nivel de la conductividad, provocando cambios de temperatura, de la luz o integrando impurezas en su estructura molecular. Estos cambios originan un aumento en el número de electrones liberados (o bien huecos), los conductores que transportan la energía eléctrica.

Limitaremos nuestro análisis a los materiales semiconductores más usados en la actualidad, el silicio (Si) y el germanio (Ge); aunque no sean los únicos; sin embargo cualquiera de ellos tiene un comportamiento similar. El primero es el más empleado por ser más estable ante perturbaciones externas y además por ser el de mayor abundancia en la naturaleza.

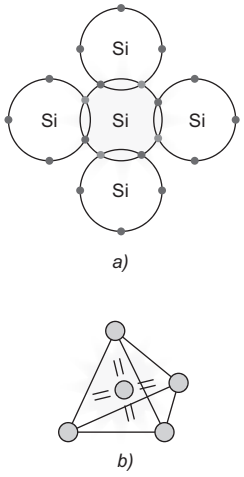


Figura 6.4 Celda fundamental de un cristal de silicio. *a*) El átomo central comparte sus cuatro electrones periféricos (gris claro) con los átomos vecinos mediante enlaces covalentes. *b*) Celda fundamental de un cristal de silicio.

Un semiconductor de silicio es de constitución cristalina y posee una celda fundamental formada por cinco átomos en una configuración tetraédrica como muestra la figura 6.4. Los cuatro electrones de valencia (o electrones exteriores) de un átomo están en parejas y son compartidos por otros átomos para formar un enlace covalente que mantiene al cristal unido (figura 6.4). Estos electrones de valencia *no* están libres para transportar corriente eléctrica. Para producir electrones de conducción, se utiliza energía adicional en forma de luz o de calor (se maneja como *temperatura*), que excita los electrones de valencia y provoca su liberación de los enlaces, de manera que pueden transportar su propia energía. Cada electrón de valencia que se desprende de su enlace covalente deja detrás de sí un *hueco* o, dicho en otra forma, deja a su átomo padre con un electrón de menos, lo que significa entonces que en ese átomo existirá *un protón de más*. Las deficiencias o *huecos* que

[1] El fenómeno conocido como *superconductividad* se produce cuando al enfriar ciertas sustancias, a una temperatura cercana al cero absoluto, su conductividad se vuelve prácticamente infinita. En estas condiciones no existe banda prohibida.

quedan contribuyen al flujo de la electricidad (se dice que estos huecos transportan *carga positiva*). Éste es el origen físico del incremento de la conductividad eléctrica de los semiconductores a causa del correspondiente aumento en la temperatura.

6.2.1 Materiales intrínsecos y extrínsecos

COMPETENCIAS:
- Comprender qué es un material intrínseco y qué es un material extrínseco. [1]
- Explicar el proceso para la elaboración de materiales intrínsecos y extrínsecos. [2]

Un cristal *intrínseco* es aquel que se encuentra *puro* (aunque no existe prácticamente un cristal 100% puro); es decir, no contiene impurezas; mientras que un cristal *extrínseco* ha sido impurificado con átomos de otra sustancia. Al proceso de *impurificación* se le llama también *dopado*, y se utiliza para obtener electrones libres que sean capaces de transportar la energía eléctrica a otros puntos del cristal.

Para que una diferencia de potencial aplicada a un cristal intrínseco dé lugar a un flujo de electrones, debe ser suficientemente alta para romper la ligadura de los electrones antes de que dichos electrones queden libres para moverse hacia el terminal de tensión positiva. Al romper la ligadura, el voltaje destruiría también la estructura cristalina. No puede circular corriente eléctrica a través de un cuerpo cristalino puro tal como el descrito; ese cuerpo debe modificarse para obtener una circulación de corriente que se pueda gobernar.

Un material en estado *intrínseco* puede tener electrones libres cuando algunos de sus electrones de valencia llegan a romper su enlace covalente por adquirir energía adicional debido a fuentes de calor o de luz; o bien debido a las pocas impurezas que no han podido eliminarse; sin embargo, la energía ganada disminuye cuando el electrón tiene alguna colisión con otra partícula, volviendo a cantidades de energía propias de la banda de valencia, haciendo que el electrón viajero "se aloje" en algún hueco disponible, dándose el fenómeno de *recombinación.* Los *huecos* que resultan de la liberación de estos electrones son en cantidades poco significativas; así que tanto las cargas libres negativas o positivas en el cristal no serán suficientes para transportar cantidades de electricidad significativas. Por tanto, si se desea que un material semiconductor sea capaz de transportar la corriente eléctrica de mejor manera, se procede a impurificarlo.

El proceso de impurificación permite alterar sensiblemente las características de los materiales semiconductores, y consiste en agregar átomos de otra sustancia a un cristal intrínseco, que pueden ser átomos pentavalentes (*donadores* del grupo V-a) con cinco electrones periféricos de valencia, o trivalentes (*aceptores*, del grupo III-a) con 3 electrones periféricos de valencia. La diferencia en el número de electrones de valencia entre el material dopante (tanto si acepta como si confiere electrones) y el material receptor hace que crezca el número de electrones de conducción negativos (tipo *n*) o los huecos positivos (tipo *p*).

6.2.1.1 Material extrínseco tipo n

Se llama *material extrínseco tipo n* a un cristal (silicio o germanio) que ha sido impurificado con átomos pentavalentes o donadores. El resultado se ilustra en la figura 6.5, que presenta como ejemplo a los átomos de una celda fundamental del cristal de silicio dopado con un átomo de fósforo,

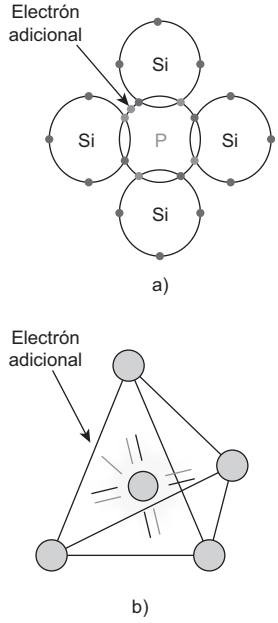


Figura 6.5 Celda fundamental en un cristal de átomos de silicio (puntos grises oscuros) con un átomo de fósforo (punto gris claro) que lo impurifica convirtiéndolo en material extrínseco tipo *n*.

cuya distribución electrónica es [2, 8, 5]; es decir, tiene cinco electrones de valencia (representados por puntos grises claro); en tanto que cada átomo de silicio tiene 4 electrones de valencia (representados mediante puntos grises oscuros).

Durante el proceso de impurificación el átomo de fósforo se ubica al centro de 4 átomos de silicio, reemplazando al átomo de silicio que originalmente estaba en la celda fundamental del cristal. En esta situación sólo cuatro de los cinco electrones de valencia del átomo de fósforo participarán en enlaces covalentes con los cuatro átomos vecinos de silicio; quedando el quinto electrón periférico sin pareja y sin utilizar su energía en el proceso de enlace. Es entonces que bastará un poco de energía adicional para que este electrón sea capaz de abandonar a su átomo padre, convirtiéndose en electrón libre y sin dejar detrás de sí hueco alguno. El total de cargas negativas seguirá siendo igual al total de cargas positivas, por tanto, la celda del cristal seguirá siendo eléctricamente neutra. A las impurezas que participan aportando un electrón libre por cada átomo se les denomina *donadores*, ya que provocan la presencia de electrones libres.

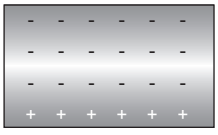


Figura 6.6 Representación esquemática de un material extrínseco tipo *n*. Los portadores mayoritarios son de signo negativo, mientras que en minoría se representan los huecos por medio de signo positivo.

Al ampliar este fenómeno más allá de un solo átomo de impureza, para una gran cantidad de ellos, para un cuerpo cristalino completo, entonces se tendrán también una gran cantidad de electrones libres capaces de transportar la energía eléctrica que poseen. Si bien es cierto que en estas condiciones se tiene una gran cantidad de electrones portadores de la energía, también existen huecos debido a algunos rompimientos de enlace que se hayan podido dar; sin embargo, en el recuento total, habrá más portadores negativos. Y el cristal de silicio que originalmente era puro o *intrínseco*, se ha convertido en un material *extrínseco* y se le conoce con el nombre de material *tipo n* (figura 6.6). El total de cargas negativas en el cristal sigue siendo igual al total de cargas positivas, por lo que el cristal entero es un cuerpo eléctricamente neutro.

6.2.1.2 Material extrínseco tipo *p*

Si en el proceso de impurificación o dopado se aplica un átomo trivalente, en lugar de un pentavalente —por ejemplo un átomo de aluminio (Al), cuyo número atómico es igual a 13 con una distribución electrónica de [2, 8, 3]— al centro de la celda fundamental del cristal de silicio se tendrán tres electrones periféricos de valencia para enlazarse con los electrones periféricos de *sólo tres* átomos de silicio vecinos, lo cual deja a uno de los átomos de silicio vecinos sin enlazarse con el aluminio, entonces existirá un déficit de un electrón para completar el enlace covalente, se provoca la presencia de un *hueco,* figura 6.7. Recuerda que un hueco representa la presencia de una carga positiva; por tanto, cuando la impurificación se realiza con grandes cantidades de átomos trivalentes se tendrá igual cantidad de *huecos* o cargas positivas. Esto convierte al cristal en un material *extrínseco* de *tipo p*, ya que se tiene un déficit de electrones. De la misma manera que en el material tipo *n*, existirán algunos electrones libres por causa del rompimiento en algunos enlaces covalentes; sin embargo, los portadores mayoritarios en el material tipo

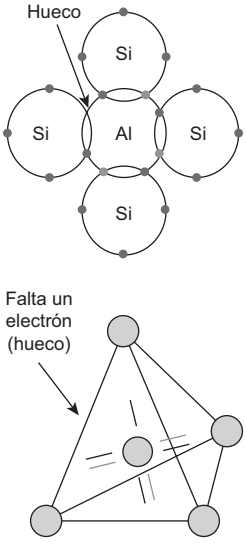


Figura 6.7 Celda fundamental en un cristal de átomos silicio (puntos en gris oscuro) con un átomo de aluminio (punto gris claro) que lo impurifica, convirtiéndolo en material extrínseco tipo *p*.

p son *huecos,* figura 6.8. A las impurezas con tres electrones de valencia, difundidas en el cristal, se les conoce como átomos *aceptores*, ya que pueden aceptar un electrón de otro átomo para completar el enlace faltante entre aluminio y silicio. Conviene hacer notar que el cristal completo seguirá siendo eléctricamente neutro, ya que el total de cargas negativas será igual al total de cargas positivas.

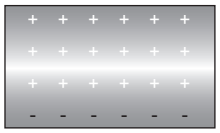


Figura 6.8 Representación esquemática de un material extrínseco tipo *p.* Los portadores mayoritarios son huecos, representados por signos positivos.

6.2.2 Flujo de cargas eléctricas en un material extrínseco

Si a un material extrínseco de tipo *n* se le somete a una diferencia de potencial eléctrico, debida a una fuente externa, los electrones libres, que no han participado en los enlaces covalentes, serán fácilmente atraídos por el polo positivo de la fuente externa, adquiriendo energía adicional que se manifiesta como energía cinética; entonces se desplazan a través de la red cristalina hasta lograr salir del cuerpo del cristal para integrarse a la fuente de voltaje a través de su polo positivo. Asimismo, debido al efecto de la diferencia de potencial, algunos electrones de enlace rompen dicho enlace para liberarse, dejando detrás de sí un hueco cada uno, dando por resultado la presencia de huecos, o portadores positivos aunque en cantidades minoritarias, en comparación con las cantidades de electrones portadores debido a la impurificación. Estos huecos son ocupados enseguida por algún electrón viajero, que bien pudo haber sido desprendido de otro enlace anterior. Esto da por resultado que los huecos "viajen" en sentido contrario al movimiento *real* de los electrones. En realidad, los huecos no se mueven, sino que solamente *se transfieren* en el sentido contrario al que se mueven los electrones que los están ocupando.

El resultado global del proceso es que se tiene un flujo de electrones en un sentido, mientras que en el sentido contrario se tendrá un "flujo" (en realidad es sólo una transferencia) de huecos. El fenómeno se ilustra en la figura 6.9.

Si la diferencia de potencial se aplica en los extremos de un cristal tipo *p*, se tendrá un fenómeno a la inversa; es decir, la cantidad mayoritaria de huecos existentes serán los portadores de la energía, de la siguiente manera: los electrones que libera la fuente de alimentación desde su polo negativo ingresan al cristal para iniciar su "viaje" a través de la red, ocupando sucesivamente los huecos disponibles hasta llegar al extremo opuesto del cristal y abandonarlo, atraídos por el polo positivo de la propia fuente, para ingresar nuevamente a ésta. Se da así una corriente eléctrica a través del cristal, en la cual se puede apreciar también que mientras los electrones viajan en un sentido, los huecos lo hacen en el sentido contrario.

Entonces se dice que la corriente eléctrica tiene dos sentidos, el de los electrones (–) y el de los huecos (+). Cuando Benjamín Franklin realizó sus primeros estudios acerca de la corriente eléctrica propuso que ésta se debía a un movimiento de cargas positivas. Esta teoría prevaleció durante más de cien años, hasta que se demostró que en realidad son las cargas negativas, los electrones, los únicos que realmente se mueven a través de los cuerpos conductores. Actualmente se manejan los dos sentidos, el *sentido real* debido a los electrones y el *sentido convencional* debido a las cargas positivas. La mayoría de textos y tratados sobre

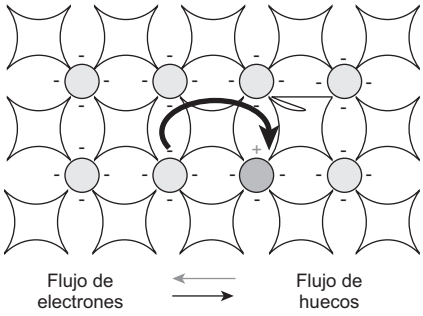


Figura 6.9 El movimiento de cargas en un material se da en dos sentidos contrarios, el ujo de electrones, sentido real de la corriente y el ujo de huecos o sentido convencional.

electricidad y electrónica manejan en sus análisis el *sentido convencional* de la corriente; en este libro se utiliza también el mismo sentido, salvo que se indique lo contrario.

6.3 Diodo semiconductor

COMPETENCIAS:
- Comprender el concepto de diodo semiconductor de unión. [1]
- Explicar la formación del diodo semiconductor por crecimiento y por difución. [2]

Cuando se unen dos capas de semiconductores, una tipo *p* y otra tipo *n*, forman un diodo semiconductor, y la región de contacto se llama unión *pn.* Un diodo es un dispositivo de dos terminales que tiene una gran resistencia al paso de la corriente eléctrica en una dirección y una baja resistencia en la otra. Las propiedades de conductividad de la unión *pn* dependen de la dirección del voltaje, que a su vez puede utilizarse para controlar la naturaleza eléctrica del dispositivo.

Los materiales básicos, en las aplicaciones de diodos comerciales, son el germanio y el silicio impurificados y preparados especialmente en estado de cristal. Existen dos tipos básicos de diodos semiconductores en uso actualmente el de "unión" y el de "puntos de contacto". Veremos a continuación el *diodo de unión*.

En la práctica se encuentran dos tipos diferentes de unión. En uno, la unión se forma *por crecimiento* en el diodo y en el otro la unión se forma por *difusión*.

6.3.1 Diodo de unión por crecimiento

Aunque es un tanto meticuloso y complejo el proceso de formación de un diodo de unión por crecimiento, y se utiliza tecnología muy especializada, a continuación se presenta una sencilla explicación para proporcionar una idea general de la formación de estos dispositivos. Dentro de un recipiente hermético en el cual se ha hecho el vacío, o se lo llena de un gas inerte, se suspende un crisol que contiene germanio puro. Mediante una bobina de inducción se calienta el germanio hasta su punto de fusión. Para comenzar la formación del diodo, se le añade impureza del tipo *n*, la que se difunde a través de la masa fundida. Una pequeña barra, cortada de un solo cristal de germanio, se sumerge en el germanio fundido y luego se retira lentamente haciéndola girar. El germanio fundido se adhiere y solidifica en el punto de contacto con la barra sólida y el proceso de extracción determina el crecimiento de una varilla de germanio *tipo n*. Esta varilla es todavía un cristal perfecto con un diámetro del orden de 25 milímetros. La unión se forma después de que la varilla ha aumentado su longitud en unos 12 milímetros.

Enseguida se añade al material fundido suficiente cantidad de impureza de tipo *p* para neutralizar la impureza anterior de tipo *n* y convertir luego al germanio fundido en tipo *p*. Se continúa el proceso de extracción de la varilla y el resto de ésta es germanio tipo *p*.

Toda la varilla es un solo cristal de germanio y la única diferencia es el tipo de impureza de sus dos mitades. Se corta y se separa de la varilla la región de unión *p-n*, que se divide en aproximadamente un centenar de pequeños prismas conteniendo todos la unión. Cada conjunto va

provisto de terminales de alambre, conectados por fusión o soldadura, y el todo se encierra en un recipiente que lo protege mecánicamente y lo aísla de la atmósfera. Queda formado un *diodo semiconductor*. El nombre *diodo* obedece al hecho de que se trata de un dispositivo constituido por *dos electrodos*, uno positivo o *ánodo*, que corresponde al material tipo *p*, y otro negativo o *cátodo*, que es la sección del material tipo *n*.

En la figura 6.10 se ilustra el fenómeno que se suscita a nivel de electrones cuando se lleva a cabo la unión entre los dos tipos de materiales extrínsecos para formar un diodo. Al estar lo suficientemente juntos los dos materiales, y debido a la energía adicional obtenida por el calentamiento, los electrones libres del material tipo *n* tienen la capacidad para emigrar de su material para pasar a ocupar los huecos del material *p* ubicados en la frontera (figura 6.10*a*). Como cada uno de estos electrones pertenecía a un átomo pentavalente (el donador), dicho átomo queda ahora con una carga positiva de más; es decir, pasa a ser un *ion positivo*. Por otro lado, cuando el electrón viajero se aloja en un hueco disponible en el material *p*, que correspondía a un átomo trivalente (el aceptor) de la frontera, provoca que dicho átomo, adquiera un electrón de más, pasando a ser entonces, un *ion negativo* (figura 6.10*b*). Si se ha logrado un ion negativo de un lado y uno positivo del otro de la frontera, se tiene ahora un *dipolo eléctrico*, el cual originará un pequeño campo eléctrico.

Como esta situación se da con todos los electrones libres en el material *n* cercanos a la frontera, entonces se tendrá una gran cantidad de dipolos cuyos campos eléctricos se van sumando, hasta dar por resultado un campo eléctrico total y mayor que los de cada dipolo, mismo que, al llegar a adquirir cierta magnitud, forma un campo de energía mucho mayor que la energía de cualquier electrón libre. Este campo representa una barrera que evita que otros electrones libres del material tipo *n* sigan emigrando al material tipo *p*. Para distinguir a los iones de los electrones libres y de los huecos, en la figura 6.10*b*, se representan los átomos ionizados de la frontera, mediante pequeños círculos.

Observa que los electrones libres más próximos a la unión, además de que su energía es menor que la energía de la barrera que se ha formado, no tienen cerca de ellos huecos disponibles para poder emigrar al material tipo *p*; ahora tienen frente a sí átomos ionizados formando una barrera. La zona formada en la unión de los dos materiales quedará ahora carente de portadores, por lo que se le ha dado el nombre de *región de agotamiento* o *región de empobrecimiento* (figura 6.10*c*). En un diodo de silicio la zona de empobrecimiento genera una barrera de energía equivalente a 0.7 volts aproximadamente, mientras que en un cristal de germanio equivale a 0.3 volts aproximadamente. Esto quiere decir que, para que un electrón libre del material tipo *n* pueda cruzar la barrera de energía de la unión *p-n* requerirá de una energía de por lo menos el valor de ésta. Se le llama voltaje de umbral a esa barrera de potencial y se simboliza por V_T (en inglés "umbral" es ***t**hresold*). Así que es muy común encontrar que

$$V_T = 0.7 \text{ V para Si}$$

$$V_T = 0.3 \text{ V para Ge}$$

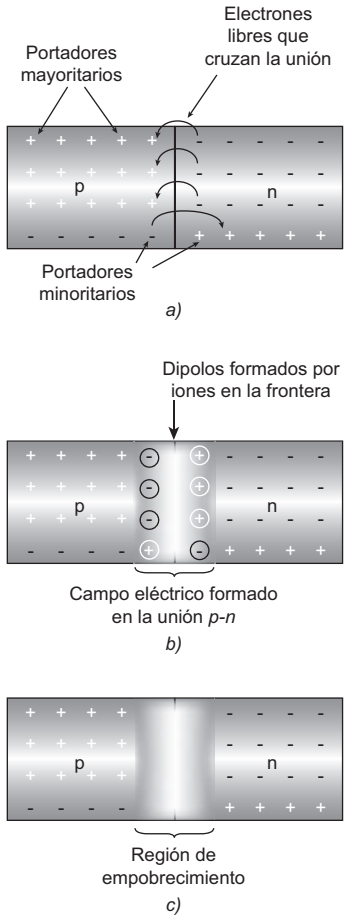


Figura 6.10 Proceso de formación de un diodo semiconductor ***p-n***. ***a***) Al aproximarse dos materiales extrínsecos los electrones libres próximos a la frontera pasan del material ***n*** al material ***p*** y ocupan los huecos vecinos. ***b***) Los átomos próximos a la frontera se ionizan, formando pequeños dipolos eléctricos. ***c***) Se forma una barrera de energía que ocasiona un empobrecimiento de cargas libres en la unión ***p-n.***

6.3.2 Diodo de unión por difusión

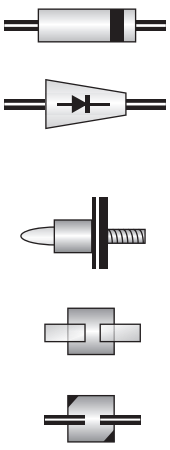


Figura 6.11 Varios tipos de diodos de unión.

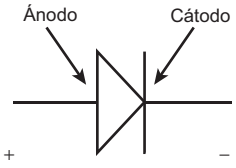


Figura 6.12 Símbolo utilizado para representar al diodo semiconductor.

Otro método para la elaboración de un diodo de unión es por difusión, que consiste en fundir un cristal (silicio o germanio).

Es común ver varios tipos de diodos semiconductores disponibles comercialmente. Existe una amplia variedad de presentaciones físicas (figura 6.11); los hay en forma cilíndrica de cerámica con extremos metálicos, tubos de vidrio con o sin extremos metálicos, recipientes de plástico, recipientes metálicos recubiertos de plástico y cilindros metálicos con montura de tornillo. Algunas de estas variantes externas se deben a preferencias del fabricante. Otras características tienen una función específica, tal como la montura de tornillo, que puede emplearse para disipar el calor producido por los rectificadores de potencia.

El símbolo utilizado para representar a un diodo semiconductor se presenta en la figura 6.12. Muchos de los recipientes de los diodos semiconductores están marcados con una flecha. La flecha señala el sentido de fácil circulación de corriente, tal como la indicaría un instrumento de cd. La razón de este sistema de marca es permitir al experimentador un método seguro para identificar los electrodos del dispositivo y establecer las conexiones correctamente. Se elimina así la necesidad de deducir esta información mediante un esquema que puede dar lugar a confusión en algunos casos especiales. En muchos esquemas los diodos semiconductores aparecen marcados según esta disposición.

Los diodos semiconductores tienen una gran variedad de aplicaciones.

El dispositivo más sencillo consta de una resistencia, un rectificador y el sistema móvil de un instrumento de cd para detectar el valor medio de impulsos de corriente. Como rectificador puede calibrarse a la frecuencia de la línea del alumbrado y dará lecturas exactas del voltaje, mediante un factor de corrección, a frecuencias de hasta cientos de megahertz. También es usado en equipos de transmisión en los circuitos de AF (audiofrecuencia) y RF (radiofrecuencia). Otras aplicaciones de los diodos semiconductores incluyen su utilización en los circuitos de fuentes de alimentación. En tales aplicaciones los diodos semiconductores tienen la ventaja de ser robustos, de larga vida, de poco tamaño y capaces de grandes intensidades de salida. Actualmente, los diodos semiconductores se usan frecuentemente por la economía de espacio.

6.4 Polarización del diodo

COMPETENCIAS:
- Comprender en qué consiste la polarización de un diodo semiconductor. [1]
- Aplicar los principios de polarización de un diodo semiconductor en circuitos básicos. [1]

Un diodo semiconductor es un dispositivo que tiene la capacidad para conducir la corriente eléctrica en ciertas condiciones, y de comportarse como un aislador en otras. Las razones de estos comportamientos fueron explicadas en la sección anterior; ahora veremos las formas en que se puede utilizar un diodo como conductor o bien como aislador, dependiendo de la manera en que se *polarice*; es decir, la forma en que se le aplique un voltaje de una fuente externa. Un diodo semiconductor puede encontrarse en una de las tres condiciones si-

guientes: a) *sin polarización* (sin aplicarle ningún voltaje externo); es decir, $V_D = 0$ V, b) en *polarización inversa*, con un potencial *negativo* entre sus terminales ($V_D < 0$ V) y c) en *polarización directa*, cuando se le aplica un voltaje *positivo* entre terminales ($V_D > 0$ V).

En un diodo sin polarización (sin aplicarle fuente de voltaje externo alguna), los portadores mayoritarios del material *n* (electrones) no tienen la energía necesaria para superar la barrera de energía presente en la región de empobrecimiento de la unión; sin embargo, por efecto de la temperatura y de movimientos aleatorios en las partículas, algunos de estos electrones, aunque en cantidades despreciables, logran pasar a través de la zona de empobrecimiento. En complemento, algo similar sucede con los portadores minoritarios del material tipo *p* (electrones), que también logran desplazarse a través de la unión *p-n*. Como cada electrón descubre un hueco detrás de sí, sucede entonces que mientras los electrones atraviesan la frontera en un sentido, los huecos lo hacen en el sentido contrario, dando por resultado que las pequeñísimas corrientes que pudieran presentarse queden equilibradas, provocando una corriente neta igual a *cero*. La figura 6.13 presenta un diagrama de esta situación, donde se representa una corriente en el diodo $I_D = 0$ mA.

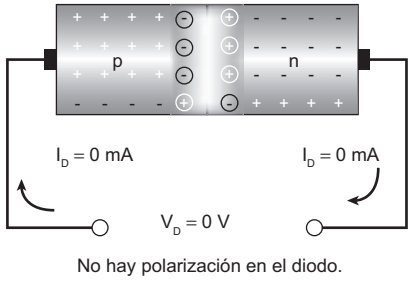


Figura 6.13 Diodo semiconductor sin polarizar. La intensidad de corriente es igual a cero.

6.4.1 Polarización directa

Se dice que un diodo semiconductor está *polarizado directamente* cuando se le aplica una fuente de voltaje externo a sus terminales, de manera que el positivo de la fuente hace contacto con el material tipo *p* (ánodo), y el negativo de la fuente con el material tipo *n* (cátodo); esto es, que la fuente y el diodo hacen contacto entre sí con sus respectivas *polaridades del mismo signo directamente*.

Si atendemos al sentido real de la corriente (son los electrones los que se desplazan) veremos que el polo positivo de la fuente externa ejerce atracción sobre los portadores mayoritarios del material tipo *n* transmitiéndoles la energía cinética necesaria para acercarlos a la unión *p-n*, al mismo tiempo que el polo negativo de la fuente ejerce sobre ellos una fuerza de repulsión, cuyo efecto es el de empujarlos también hacia la unión *p-n*, dando por resultado final que los electrones adquieran tal energía cinética que son capaces de recombinarse con los iones cercanos a la unión, reduciéndose el ancho de la región de agotamiento. En estas condiciones los portadores mayoritarios del material tipo *n*, los electrones, pueden superar la barrera de energía presente en la unión y logran atravesar la frontera desde el material tipo *n* hasta el material tipo *p*. Al encontrarse en el material tipo *p*, de inmediato ocupan algún hueco disponible, temporalmente, para continuar su viaje por el efecto de atracción de la terminal positiva de la fuente externa y repulsión de la terminal negativa.

Pueden continuar su viaje a través del material tipo *p* hasta llegar al polo positivo de la fuente, que los atrae, para ingresar en ésta y volver a emerger por el polo positivo de la misma, repitiéndose el ciclo y dando por resultado un flujo continuo de cargas, a lo que se le denomina *corriente del diodo* I_D. Si se coloca un amperímetro de cd

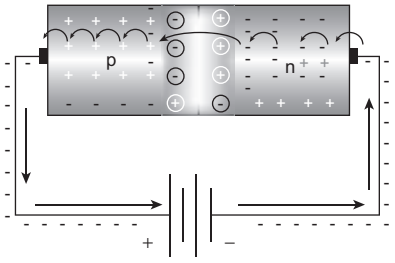


Figura 6.14 Diodo semiconductor con polarización directa. Se presenta una corriente eléctrica a través de la unión del diodo. El dispositivo actúa como un conductor.

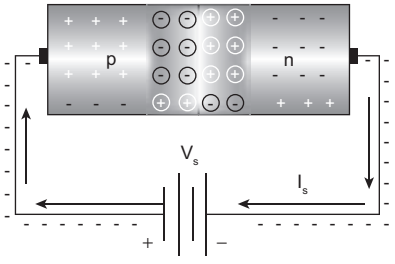


Figura 6.15 Polarización inversa del diodo. Se ensancha la zona de empobrecimiento y los portadores mayoritarios no uyen a través de la unión. Para los portadores minoritarios existe una polarización directa en estas condiciones dando lugar a una corriente de saturación inversa.

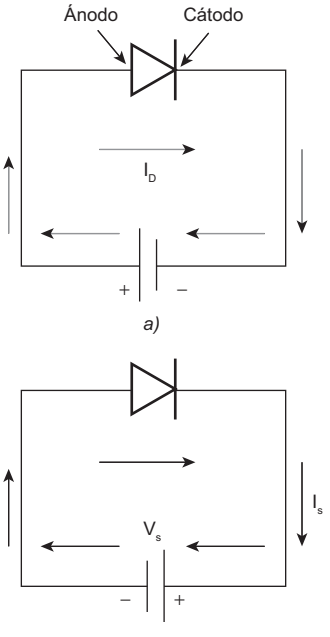


Figura 6.16 Polarización del diodo *a*) Directa: el dispositivo actúa como un interruptor cerrado. *b*). Inversa: el diodo actúa como circuito abierto; sólo está la corriente de saturación inversa debido a portadores minoritarios.

en serie con el diodo y la fuente se podrá observar la intensidad de esta corriente. El fenómeno de polarización directa se representa en la figura 6.14.

Entre mayor sea la magnitud del voltaje de polarización en el diodo, más disminuirá su ancho la región de agotamiento, y los electrones del material tipo *n* podrán fluir más fácilmente y en cantidades mayores.

6.4.2 Polarización inversa

Se dice que un diodo semiconductor está *polarizado inversamente* cuando se le aplica una fuente de voltaje externo a sus terminales, de manera que el positivo de la fuente hace contacto con el material tipo *n* (cátodo), y el negativo de la fuente con el material tipo *p* (ánodo); o sea que la fuente y el diodo hacen contacto entre sí con sus *polaridades invertidas*. El complicado fenómeno que se presenta por esta causa, se puede explicar con sencillez, de la siguiente manera:

Si atendemos al sentido real de la corriente (los electrones son los que se desplazan) veremos que el polo positivo de la fuente externa ejerce atracción sobre los portadores mayoritarios del material tipo *n* al que está conectado, al mismo tiempo que el polo negativo, en el otro extremo, ejerce repulsión sobre los mismos, resultando en una fuerza total que los aleja de la unión *p-n*. Mientras tanto, lo electrones que "envía" el polo negativo de la fuente hacia el material tipo *p*, van ocupando sucesivamente los huecos disponibles hasta toparse con la barrera que representa la zona de empobrecimiento. Esto trae por resultado que cada vez habrá menos portadores mayoritarios cerca de la unión, y la zona de empobrecimiento se va ensanchando aún más, y con ella crece la barrera de energía que se opone al paso de cargas eléctricas. Los electrones provenientes de la fuente de voltaje no fluyen más, lo que significa que se tiene una corriente debida a portadores *mayoritarios* igual a *cero*. Se dice que el diodo en polarización inversa actúa como un *circuito abierto*.

Sin embargo, observemos que la polarización *inversa* para los portadores *mayoritarios*, resulta ser polarización *directa* para los portadores *minoritarios.* Y de acuerdo a lo que ya sabemos que sucede en polarización directa podemos deducir que existirá una corriente debida a los portadores minoritarios cuando el diodo está en polarización inversa. A ésta se le llama *corriente de saturación inversa,* se acostumbra representarla por I_S, y es de un valor que se encuentra casi siempre en los niveles de nanoamperes para dispositivos de silicio, y del orden de los microamperes para el germanio, figura 6.15.

En la explicación anterior, tanto para polarización inversa como para la directa, se indicó que se asumiría el sentido real de la corriente, el de los electrones, ya que facilita la comprensión del fenómeno; sin embargo, recordemos que es de uso generalizado el empleo del sentido convencional de la corriente eléctrica. En la figura 6.16, se muestra la polarización del diodo empleando la simbología apropiada para el análisis.

6.5 Características del diodo semiconductor

COMPETENCIAS:
- Analizar la curva característica de un diodo semiconductor. [1]
- Obtener la curva característica de un diodo semiconductor como relación funcional voltaje-corriente. [1]

Si en el laboratorio realizamos el experimento de polarizar a un diodo, tanto directa como inversamente, podremos observar el comportamiento del dispositivo como ha sido explicado en la sección anterior. Para ello puede utilizarse un sencillo circuito como el mostrado en la figura 6.17, en la cual se ha conectado una resistencia R_S en serie con la fuente de polarización y el diodo, sólo como un elemento limitador de la corriente.

El experimento se realiza en dos partes:

1a. Polarización directa, figura 6.17*a*. El voltaje de salida de la fuente se va variando uniformemente, de manera que en las terminales del diodo se mida el voltaje V_D desde 0 V hasta 0.8 V aproximadamente con intervalos de 50 mV. Para cada valor de voltaje de polarización se mide la corriente del diodo I_D y se va elaborando una tabla de valores, con la cual finalmente se trazará la gráfica correspondiente en un plano cartesiano, en el cual, el eje horizontal ocupará los valores de V_D, mientras que en el vertical se graficarán los valores de la corriente I_D. Se podrá observar que conforme se incrementa el voltaje de polarización, el valor de la corriente del diodo crecerá de manera exponencial, como se aprecia en la figura 6.19.

2a. Polarización inversa. Se conectan las partes como lo indica la figura 6.17*b* y se procede a variar el voltaje de polarización de la misma manera que se hizo en la primera parte. Se variará el voltaje en la fuente, midiendo en cada caso el voltaje V_D y la corriente I_D en el diodo. Se podrá observar que las variaciones del voltaje no provocan cambio alguno en la corriente del diodo; por tanto, los incrementos del voltaje de polarización pueden ser mayores, inclusive de 1 volt en cada caso, llegando hasta valores de los 10 volts (de polarización inversa, o bien, –10 V) y la corriente en el diodo es prácticamente cero; distinguiéndose únicamente como valor para I_D el mismo que para I_S. Se elabora una tabla de valores y se procede a graficar en el mismo plano cartesiano.

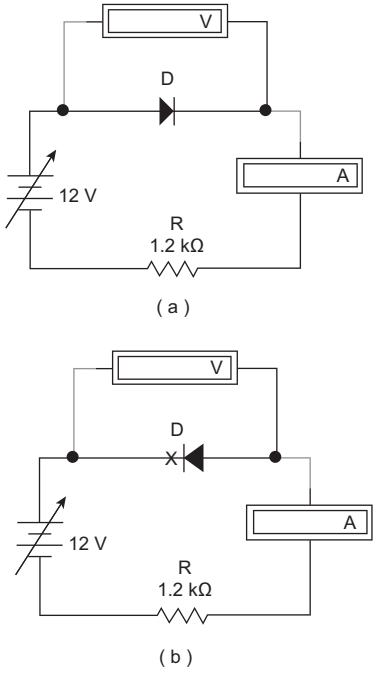


Figura 6.17 Circuitos de polarización de un diodo. ***a***) Polarización directa. ***b***) Polarización inversa.

La figura 6.18 es una representación esquemática de una sección de un protoboard[2] con el montaje de los elementos para la polarización de un diodo semiconductor. Se incluyen el amperímetro y el voltímetro como instrumentos de medición.

El resultado gráfico del experimento descrito se muestra en la figura 6.19. Ésta es la curva característica del diodo, dada por la relación que guarda la corriente en el dispositivo I_D con en el voltaje de polarización V_D. En el primer cuadrante del plano se localiza la región correspondiente a la polarización directa, mientras que en el tercer cuadrante

[2] Protoboard: así se denomina a la tablilla especial que se utilizada para el montaje de elementos eléctricos y electrónicos al ensamblar un circuito, sin utilizar soldaduras.

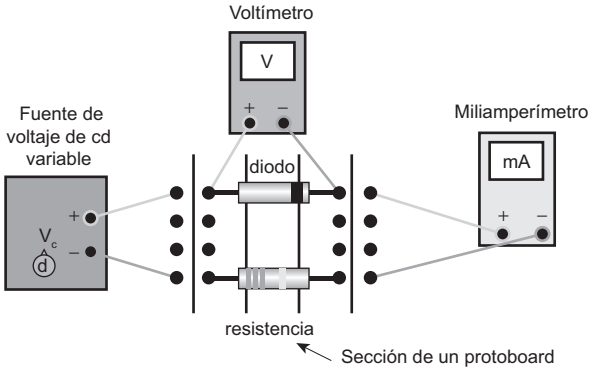


Figura 6.18 Esquema del montaje de un circuito de polarización directa para un diodo semiconductor.

se tiene la región en polarización inversa. Hay que hacer notar que la escala utilizada en el tercer cuadrante es diferente a la del primero, precisamente para resaltar que aun cuando el voltaje en el diodo V_D sea de valores considerables, la corriente en éste es sólo la que corresponde al valor de la *corriente de saturación inversa* I_S.

En cualquier caso el comportamiento de la corriente en el diodo es de forma exponencial y sus valores dependen del voltaje de polarización aplicado, de acuerdo con el modelo matemático que establece la ecuación 6.2.

$$I_d = I_s(e^{kV_D/T_k} - 1) \qquad \text{(ecuación 6.2)}$$

En la ecuación 6.2:

I_D es la corriente en el diodo, medida en amperes.

I_S es el valor de la corriente de saturación inversa, que para cada tipo de diodo puede ser diferente, en función del grado y naturaleza de las impurezas utilizadas en su elaboración. De ahí que

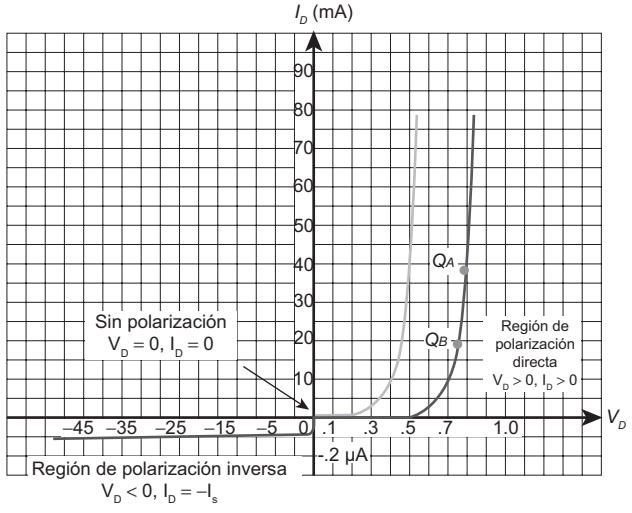


Figura 6.19 Curva característica de un diodo semiconductor. La línea gris claro describe el comportamiento de un diodo de Si, mientras que la línea gris oscuro corresponde a uno de Ge.

este dato es determinado en el momento de su elaboración, por tanto es un dato que puede localizarse en el manual o catálogo de productos del fabricante. Es del orden de los nanoamperes o de microamperes.

K es una constante que depende también del material del dispositivo y tiene valores de 11.600/η ; donde η = 1 para Ge y η = 2 para Si, cuando se trata de valores de corriente relativamente bajos (debajo del punto de quiebre de la curva). Para valores relativamente altos de corriente η = 1, tanto para Ge como para Si.

T_K es la temperatura ambiente expresada en K, (K = °C + 273°).

En la ecuación del diodo (ecuación 6.2) se observa que, puesto que I_S es una constante (dada por el fabricante), si T_K se mantiene constante y controlada en el laboratorio, y como K es también una constante para cada material, entonces la corriente en el diodo I_D podrá variar cuando se varíe el valor del voltaje V_D en sus terminales. En otro caso, si el voltaje V_D en el diodo se mantiene constante, la corriente I_D variará según varíe la temperatura T_K. En la figura 6.20 se presenta una gráfica de la variación de las características en los diodos en función de los cambios de temperatura. Como podrá observarse en esta figura, los cambios de temperatura alteran sensiblemente el comportamiento del material semiconductor; de ahí que deberá tenerse la precaución de no someter al dispositivo a estos cambios.

El término *saturación* aplicado a la corriente I_S responde al hecho de que alcanza su máximo nivel (se satura) en forma rápida y no cambia significativamente con el incremento en el potencial de polarización inversa, hasta que llega al valor de *voltaje Zener* (V_z) o *voltaje pico inverso* (VPI). Esto será tratado en forma más particular en secciones posteriores.

El máximo potencial de polarización inversa que puede aplicarse antes de entrar en la región Zener se denomina voltaje pico inverso o VPI nominal.

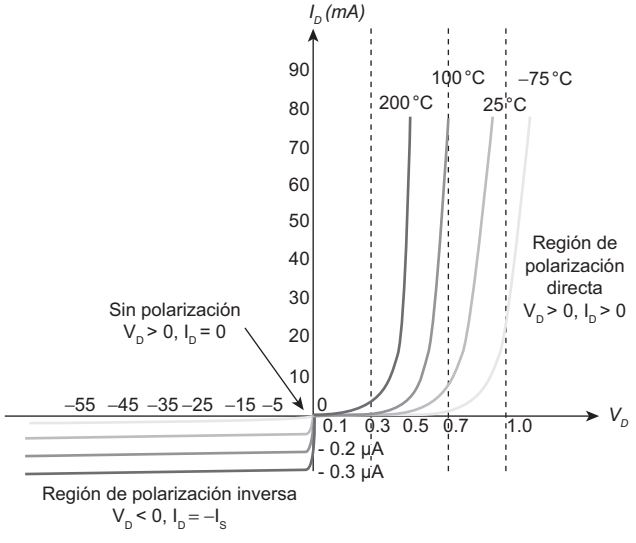


Figura 6.20 Variación en las características de los diodos con el cambio de temperatura.

Los diodos de silicio tienen generalmente valores nominales de VPI y de corrientes más altos, e intervalos de temperatura más amplios que los diodos de germanio.

Cuando usemos un diodo en un circuito hay que tener en cuenta las siguientes consideraciones (a partir de las hojas de características suministradas por el fabricante):

1. El voltaje de polarización inversa no deberá ser mayor que el indicado por el fabricante.
2. La corriente máxima en sentido en polarización directa no deberá sobrepasar a las especificaciones del fabricante.
3. La potencia máxima que puede soportar el diodo (potencia nominal) no debe ser mayor que la máxima especificada.

Cualquiera de estas características que sea rebasada podrá provocar el deterioro del dispositivo y, eventualmente, su destrucción total.

6.5.1 Resistencia estática en el punto de operación

COMPETENCIAS:
- Comprender el concepto de resistencia en un diodo bajo tres enfoques distintos: estático, promedio y dinámico.
- Calcular la resistencia de un diodo semiconductor en un punto de operación, desde los puntos de vista estático, promedio y dinámico. [2]

Uno de los parámetros importantes del diodo es la resistencia en el punto o región de operación. Es decir, el diodo presenta oposición o resistencia al paso de la corriente eléctrica, que obedece también a la ley de Ohm, y está determinada por la expresión

$$R_D = \frac{V_D}{V_D} \qquad \text{(ecuación 6.3)}$$

en la cual R_D representa a la resistencia del diodo en un punto de operación Q; V_D es el voltaje en las terminales del dispositivo en ese punto, e I_D es la corriente que existe en el diodo en el mismo punto.

De la gráfica que aparece en la figura 6.21 se tiene que en el punto de operación Q_1, dado por las coordenadas (0.8 V, 63 mA) la resistencia estática del diodo es:

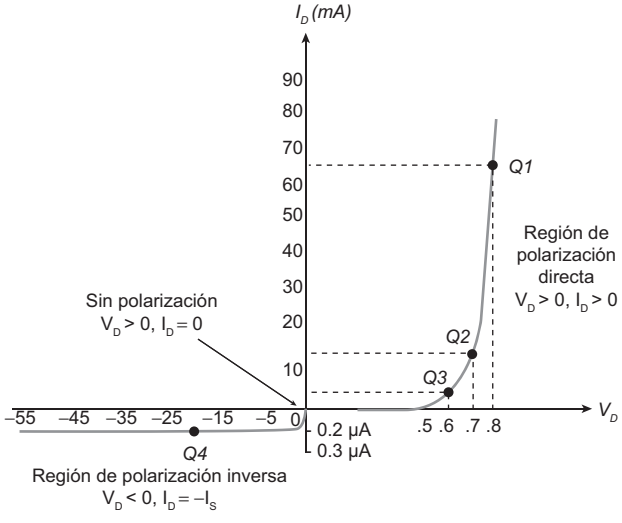


Figura 6.21 La resistencia del diodo en un punto de operación está por el voltaje V_D y la corriente I_D.

$$R_{Q1} = \frac{V_{Q1}}{I_{Q1}} = \frac{0.8\text{V}}{0.063\text{A}} = 12.69\ \Omega.$$

Mientras que en los puntos Q_2 y Q_3 los valores de resistencia estática son: $R_{Q2} = 53.85\ \Omega$, y $R_{Q3} = 150\ \Omega$. Se observa que conforme el punto de operación se desplaza hacia la parte más baja de la curva, el valor de la resistencia estática va aumentando, de manera que, por ejemplo, en un punto donde el voltaje $V_D = 0.2$ V y la corriente I_D es del orden de los microamperes, se tendrá una resistencia del orden de los kilohms o megahoms.

La resistencia estática es menor y tiene menores variaciones en la región de polarización directa donde la curva tiende a ser una línea recta; para puntos arriba de Q_2, cuyos valores de voltaje son superiores al valor de V_T (0.7 V en Si, 0.3 V en Ge).

Si consideramos la región del potencial aplicado negativamente,

$$R_D = \frac{V_R}{I_R} = \frac{-5\ -20\ \text{V o cualquier voltaje de polarización inverso}}{0\ \text{mA}} =$$

Donde V_R es el voltaje de polarización inverso a través del diodo e I_R es la corriente inversa en el diodo. El diodo, en consecuencia, es un circuito abierto en la región en la que no hay conducción.

6.5.2 Resistencia promedio en ca, en torno a un punto de operación

Cuando al diodo se le aplica una entrada de ca en lugar de cd, que se trató anteriormente, tendremos que el punto de operación Q se estará desplazando a lo largo de la curva característica, conforme los valores del voltaje aplicado varían. En la figura 6.22 se muestra la curva característica de un diodo real al que se le aplica un voltaje senoidal cuyos valores varían dentro de un rango representado por ΔV_D, lo que ocasiona que se tengan variaciones en la corriente del diodo dentro de un rango representado por ΔI_D. El punto Q se halla en una situación *dinámica* de operación; están variando en sus valores instantáneos el voltaje y la corriente. Si el rango de variación, o la excursión del punto de operación es grande, se puede obtener un promedio de la resistencia en ca, r_{prom}, de esa región de la gráfica y cuyo valor puede obtenerse siguiendo a la ley de Ohm a las variaciones presentes:

$$r_{prom} = \frac{\Delta V_d}{\Delta I_d} = \frac{V_{QA} - V_{QB}}{I_{QA} - I_{QB}} \qquad \text{(ecuación 6.4)}$$

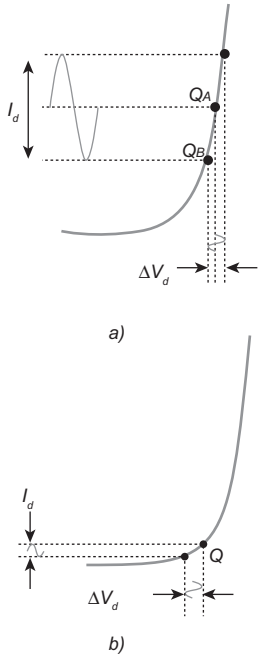


Figura 6.22 Forma en que se define la resistencia dinámica o en ca del diodo. *a*) El punto *Q* está en la región lineal de la curva. *b*) El punto *Q* está por abajo del valor de V_T.

EJEMPLO 6.1

Para el diodo cuya curva característica se presenta en la figura 6.19 determina la resistencia estática en los puntos Q_A y Q_B. Calcula la resistencia promedio (en ca) para el rango comprendido entre Q_A y Q_B.

Solución

Datos:

Según la gráfica:
$V_{QA} = 0.8$ V
$I_{QA} = 42.5$ mA
$V_{QB} = 0.75$ V
$I_{QB} = 22.5$ mA

Planteamiento:

Se puede obtener el resultado directamente al aplicar las ecuaciones 6.3 y 6.4.

Desarrollo:

Resistencia estática en el punto Q_A:

$$R_{QA} = \frac{V_{QA}}{I_{QA}} = \frac{0.8\,\text{V}}{42.5\,\text{mA}} = 18.82\ \Omega.$$

Resistencia estática en el punto Q_B

$$R_{QB} = \frac{V_{QB}}{I_{QB}} = \frac{0.75\,\text{V}}{22.5\,\text{mA}} = 33.33\ \Omega.$$

Resistencia promedio en la región comprendida entre Q_A y Q_B.

$$r_{prom} = \frac{\Delta V_d}{\Delta I_d} = \frac{V_{QA} - V_{QB}}{I_{QA} - I_{QB}} = \frac{0.8 - 0.75\,\text{V}}{42.5\,\text{mA} - 22.5\,\text{mA}} = 2.5\ \Omega.$$

Del ejemplo 6.1 se puede observar que el valor de la resistencia promedio r_{prom} en la región comprendida entre los puntos Q_A y Q_B es menor que el valor de la resistencia estática R_D de cualquiera de los puntos.

6.5.3 Resistencia dinámica

Cuando la excursión del punto de operación sobre la curva característica del diodo debido al efecto de una señal de ca aplicada no es grande, sino más bien tiende a estar alrededor de un punto de operación determinado, se habla de otro concepto, el de *resistencia dinámica*, que está definida como el inverso de la derivada de la corriente respecto al voltaje en el punto de operación $\left(\frac{dI_D}{dV_D}\right)^{-1}$. El resultado que se obtiene está expresado en la ecuación 6.5.

$$r_d = \frac{26\,\text{mV}}{I_D} \qquad \text{(ecuación 6.5)}$$

La expresión 6.5 facilita el cálculo de la resistencia dinámica alrededor de un punto de operación, ya que el numerador es siempre una constante (aproximadamente 26 mV) y basta con sustituir el valor de la corriente en

el diodo para el punto considerado. Por ejemplo, para la curva de la figura 6.19, la resistencia dinámica para los puntos Q_A y Q_B será:

$$r_{d(QA)} = \frac{26\text{ mV}}{I_D} = \frac{26\text{ mV}}{42.5\text{ mA}} = 0.61\ \Omega$$

$$r_{d(QB)} = \frac{26\text{ mV}}{I_D} = \frac{26\text{ mV}}{22.5\text{ mA}} = 1.15\ \Omega$$

6.6 Modelos para el diodo

COMPETENCIAS:
- Interpretar los modelos ideal, simplificado y por segmentos lineales para un diodo semiconductor. [1]
- Aplicar la teoría de modelos para el diodo en el análisis y diseño de circuitos básicos con diodos semiconductores. [2]

En ingeniería, como en otras áreas del conocimiento, es muy común el uso de la simulación y de los modelos; en el análisis y diseño de circuitos el trabajo se facilita si los dispositivos que se manejan se sustituyen por *modelos* (algunos autores lo manejan como *circuito equivalente*). Un *modelo* representa al dispositivo original de manera práctica y con efectos equivalentes a aquél, y consiste en un conjunto de elementos organizados de manera apropiada para reproducir, de la mejor manera posible, los efectos del dispositivo al que representa. En el caso del diodo semiconductor se emplean tres formas básicas para representarlo de manera aproximada a la realidad:

a) Modelo ideal o primera aproximación.
b) Modelo simplificado o segunda aproximación.
c) Modelo de segmentos lineales o tercera aproximación.

6.6.1 Modelo ideal

El diodo se considera como si fuera un dispositivo *ideal* totalmente, por lo cual, en polarización directa se comporta como un conductor *perfecto* para cualquier voltaje; en este modelo no se considera ningún *voltaje de umbral* (V_T), así que para todo $V_D > 0$ habrá un valor para $I_D > 0$ que crece repentinamente tendiendo a valor infinito y la cual será limitada solamente por los elementos conectados en serie con el diodo ideal. En polarización inversa es un *circuito abierto* para todo voltaje de polarización *negativo*. Simbólicamente se le representa mediante un interruptor que *cierra* en polarización directa y *abre* en polarización inversa. La figura 6.23*a* presenta su característica, la 6.23*b* y la 6.23*c*, los circuitos equivalentes para las dos formas de polarización del diodo, respectivamente.

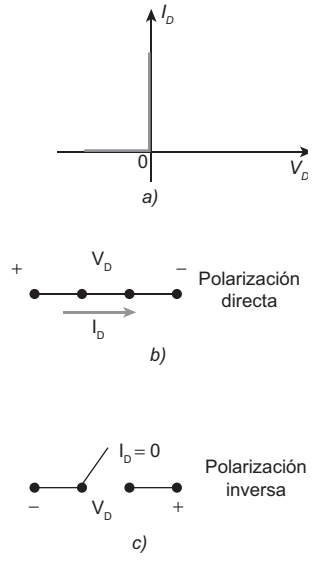


Figura 6.23 Modelo ideal para el diodo (primera aproximación. *a*) Curva característica. *b*) En polarización directa se comporta como interruptor cerrado. *c*) En polarización inversa es como un interruptor abierto; no circula corriente.

6.6.2 Modelo simplificado

El diodo se considera como si fuera un dispositivo que en polarización directa se comporta como un conductor cuando el voltaje de polarización directa en sus terminales es mayor que el *voltaje de umbral* (V_T); así que para todo $V_D > V_T$ habrá un valor de $I_D > 0$, que crece exponencialmente

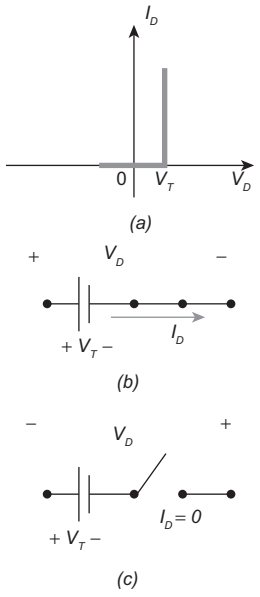


Figura 6.24 Modelo simplificado para el diodo (2a. aproximación). *a*) Curva característica. *b*) En polarización directa se comporta como interruptor cerrado en serie con una fuente de voltaje V_T. *c*) En polarización inversa es la misma fuente de voltaje V_T en serie con un interruptor abierto, no circula corriente.

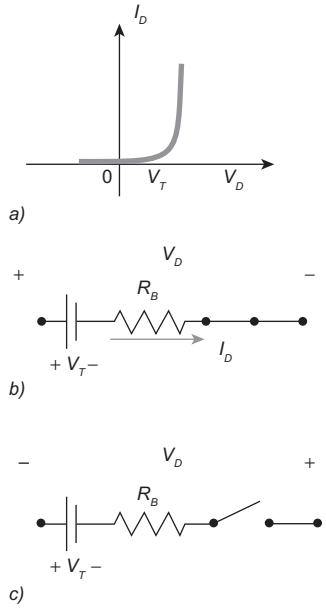


Figura 6.25 Modelo de segmentos lineales para el diodo (3a. aproximación). *a*) Curva característica. *b*) En polarización directa se comporta como interruptor cerrado en serie con una fuente de voltaje V_T y una resistencia interna R_B *c*) En polarización inversa es la misma fuente de voltaje V_T en serie con R_B y un interruptor abierto; no circula corriente.

tendiendo a valor infinito y la cual será limitada por las características intrínsecas del cristal y por los elementos conectados en serie con el diodo. En polarización inversa es un *circuito abierto* para todo voltaje de polarización *negativo*.

Se representa mediante el símbolo de una fuente de voltaje de cd, que se opone al voltaje de la fuente externa, en serie con un interruptor que *cierra*, en polarización directa, y *abre* en polarización inversa. La figura 6.24 presenta su característica y circuitos equivalentes para las dos formas de polarización del diodo.

6.6.3 Modelo por segmentos lineales

El diodo se considera como si fuera un dispositivo que en polarización directa se comporta como un conductor cuando el voltaje de polarización directa en sus terminales es mayor que el *voltaje de umbral* (V_T)*;* así que para todo $V_D > V_T$ habrá un valor de $I_D > 0$, que crece exponencialmente tendiendo a valor infinito y la cual será limitada por las características intrínsecas del cristal, por una resistencia interna R_B del cristal y por los elementos conectados en serie con el diodo. En polarización inversa es un *circuito abierto* para todo voltaje de polarización *negativo*.

Se representa mediante el símbolo de una fuente de voltaje de cd, que se opone al voltaje de la fuente externa, en serie con un interruptor que *cierra*, y una resistencia interna R_B en polarización directa, y *abre* en polarización inversa. La figura 6.25 presenta su característica y circuitos equivalentes para las dos formas de polarización del diodo. La resistencia R_B representa la oposición que las moléculas del cristal presentan al paso de las cargas eléctricas; comúnmente es de un valor de más o menos 2 Ω, y es determinado por el fabricante.

6.7 Análisis de circuitos con diodos

En el análisis de circuitos con diodos se emplean dos métodos generales, a saber, el de las *aproximaciones* y el *método de la recta de carga*. El primero de ellos es un método analítico, que en un momento dado puede complementarse con elementos gráficos, mientras que el segundo, es un método gráfico-analítico que se basa en la gráfica de la curva característica de un diodo, con aplicación de las leyes básicas de voltajes y corrientes. En ambos métodos juega un papel preponderante la carga conectada al diodo. Veamos el primero de ellos.

6.7.1 Método de las aproximaciones del diodo

Se considera que el comportamiento de un diodo *real* puede representarse por cualquiera de los modelos vistos en la sección anterior, dependiendo de las circunstancias particulares de cada caso; de ahí también que reciban el nombre de *aproximaciones*. No sólo en este método se utilizan *aproximaciones*; de hecho, en la ingeniería se realizan constantemente, siempre y cuando no generen desviaciones fuera de lo tolerado.

Análisis por medio de la 1a. aproximación

COMPETENCIAS:
- Comprender el método de aproximaciones para el análisis de circuitos con diodos. [1]
- Analizar circuitos simples con un diodo mediante el método de aproximaciones. [2]

Al analizar un circuito con diodos se aplican las leyes de voltajes y corrientes hasta ahora vistas, considerando que el diodo se comporta como un *diodo perfecto*. De ahí que se utiliza el *modelo ideal* de diodo; es decir, el dispositivo será un perfecto conductor con oposición cero al paso de la corriente en polarización directa, y será un circuito abierto para polarización inversa. Veamos el siguiente ejemplo de aplicación de la 1a. aproximación.

EJEMPLO 6.2

Utiliza la 1a. aproximación para determinar el valor de la corriente I_D que circula en la malla de la figura 6.17, suponiendo que el diodo es de silicio, para los valores de $V_S = 5$ V y $V_S = 12$ V.

Solución

Datos:

$V_S = 5$ V y $V_S = 12$ V
$R = 1200\ \Omega$
Diodo de Si.

Planteamiento:

Se procede a aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes para determinar la ecuación de la malla, tomando en cuenta que no hay caída de voltaje en el diodo, como muestra la figura 6.23. A partir de la ecuación de malla se despeja la incógnita I_D.

Desarrollo:

La ecuación de malla es

$$-V_S + V_D + I_D R = 0 \quad \Rightarrow I_D = \frac{V_S - V_D}{R}$$

Al emplear el modelo ideal, la caída de voltaje en el diodo $V_D = 0$ V, por tanto:

Para $V_S = 5$ V

$$I_D = \frac{V_S}{R} = \frac{5\text{ V}}{1200\ \Omega} = 4.166\text{ mA}$$

Para $V_S = 12$ V

$$I_D = \frac{V_S}{R} = \frac{12\text{ V}}{1200\ \Omega} = 10\text{ mA}$$

Análisis por medio de la 2a. aproximación

Utiliza el modelo simplificado mostrado en la figura 6.24. El diodo se considera como un interruptor que cierra en polarización directa,

una vez que ha sido superado el voltaje de umbral V_T del diodo. Para todo voltaje de polarización $V_D < V_T$ se entiende que la corriente I_D es despreciable. En polarización inversa el diodo se considera como un interruptor abierto, no hay circulación de cargas eléctricas.

EJEMPLO 6.3

Mediante la 2a. aproximación para el diodo, determina el valor de la corriente I_D que circula en la malla de la figura 6.17, suponiendo que el diodo es de silicio, para los valores de $V_S = 5$ V y $V_S = 12$ V.

Solución

Datos:

$V_S = 5$ V y $V_S = 12$ V
$R = 1200\ \Omega$
$D \Rightarrow Si.\ (V_T = 0.7\ \text{V})$

Planteamiento:

Se considera el modelo simplificado del diodo (figura 6.23). Entonces se procede a aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes para determinar la ecuación de la malla. A partir de la ecuación de malla se despeja la incógnita I_D.

Desarrollo:

La ecuación de malla es

$$-V_S + V_D + I_D R = 0 \quad \Rightarrow I_D = \frac{V_S - V_D}{R}$$

Al emplear el modelo simplificado, la caída de voltaje en el diodo $V_T = 0.7$ V, por tanto:

Para $V_S = 5$ V

$$I_D = \frac{V_S - V_D}{R} = \frac{5\text{V} - 0.7\ \text{V}}{1200\ \Omega} = 3.583\ \text{mA}$$

Para $V_S = 12$ V

$$I_D = \frac{V_S - V_D}{R} = \frac{12\text{V} - 0.7\ \text{V}}{1200\ \Omega} = 9.416\ \text{mA}$$

Análisis por medio de la 3a. aproximación

La tercera aproximación se basa en la utilización del *modelo de segmentos lineales* del diodo. De hecho, el análisis es similar a los anteriores, sólo que ahora interviene un elemento más que influye en la caída de voltaje en el diodo, la resistencia interna (R_B) debido a su configuración cristalina. La presencia de este elemento influye en el valor de la corriente en el diodo. Veamos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 6.4

Utiliza la 3a. aproximación y determina el valor de la corriente I_D que circula en la malla de la figura 6.17, suponiendo que el diodo es de silicio, para los valores de $V_S = 5$ V y $V_S = 12$ V.

Solución

Datos:

$V_S = 5$ V y $V_S = 12$ V
$R = 1200\ \Omega$
$D \Rightarrow Si.\ (V_T = 0.7\text{V})$
$R_B \approx 2\ \Omega$

Planteamiento:

Se procede a aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes para determinar la ecuación de la malla. A partir de la ecuación de malla se despeja la incógnita I_D.

Desarrollo:

La ecuación de malla es

$$-V_S + V_D + I_D R + I_D R_B = 0 \quad \Rightarrow I_D = \frac{V_S - V_D}{R + R_B}$$

Al emplear el modelo simplificado, la caída de voltaje en el diodo $V_T = 0.7\text{V}$, por tanto:

Para $V_S = 5$ V

$$I_D = \frac{V_S - V_D}{R + R_B} = \frac{5\text{V} - 0.7\text{V}}{1200\Omega + 2\Omega} = 3.577\ \text{mA}$$

Para $V_S = 12$ V

$$I_D = \frac{V_S - V_D}{R + R_B} = \frac{12\text{V} - 0.7\text{V}}{1200\Omega + 2\Omega} = 9.400\ \text{mA}$$

En los últimos tres ejemplos se ha desarrollado el análisis de una malla sencilla que contiene un diodo en polarización directa conectado en serie con una resistencia limitadora y una fuente de alimentación. En cada uno se empleó un modelo o circuito equivalente distinto, obteniéndose diferentes resultados, en la tabla 6.1 se presenta un resumen de éstos, de los cuales se pueden derivar las siguientes observaciones.

Tabla 6.1 Resumen de valores de I_D para el diodo de la figura 6.17 con la aplicación de tres modelos diferentes.

Modelo	Ecuación para I_D	Valor para I_D	
		$V_S = 5$ V	$V_S = 12$ V
Ideal (1ª aproximación)	$I_D = \frac{V_S}{R}$	4.166 mA	10 mA
Simplificado (2ª aproximación)	$I_D = \frac{V_S - V_D}{R}$	3.583 mA	9.416 mA
Segmentos lineales (3ª aproximación)	$I_D = \frac{V_S - V_D}{R + R_B}$	3.577 mA	9.400 mA

De las tres aproximaciones del diodo utilizadas, es de esperarse que la que más *se ajuste a la realidad física* sea la que utiliza el modelo de *segmentos lineales* (3a. aproximación), dado que considera tres segmentos que corresponden a situaciones reales que se presentan en el diodo; así que cuando un experimentador ensamble en el laboratorio el circuito de polarización mostrado en la figura 6.17, con elementos físicos reales (fuente, diodo, resistencia, equipo de medición), el comportamiento de éstos se *aproximará* más al modelo citado. Estamos hablando de *aproximaciones de un método respecto de otro,* lo cual nos exige que elijamos a alguno de ellos como referente. De hecho puede ser cualquiera de ellos; por ejemplo, podemos calcular la desviación que tiene la 2a. aproximación con respecto al modelo ideal; o bien calcular el error que se tenga en el laboratorio al hacer mediciones, respecto al modelo simplificado; o calcular el error de cada modelo respecto al método de mediciones en laboratorio. El experimentador tendrá que establecer los parámetros de comparación para cada situación; lo importante es que en cualquier cálculo y experimentación será necesario hacer una autoevaluación del trabajo obteniendo errores, para conocer el nivel de confiabilidad de los resultados.

EJEMPLO 6.5

Utiliza los resultados para I_D presentados en la tabla 6.1 y calcula la desviación (%) que arrojan respecto al modelo simplificado de los dos modelos restantes, cuando $V_S = 12$ V.

Solución

Datos:

Referente
Modelo simplificado: $I_D = 9.416$ mA
Modelo ideal: $I_D = 10$ mA
Modelo de segmentos lineales: $I_D = 9.400$ mA

Planteamiento:

La desviación respecto a un referente puede obtenerse mediante la ecuación siguiente:

$$\text{Desviación (\%)} = \frac{|\text{Valor a comparar} - \text{valor referente}|}{\text{valor referente}} \times 100$$

Desarrollo:

La desviación del modelo ideal (1a. aproximación) es:

$$\text{Desviación (\%)} = \frac{|10 \text{ mA} - 9.416 \text{ mA}|}{9.416 \text{ mA}} \times 100 = 6.2\ \%$$

La desviación de segmentos lineales (3a. aproximación) es:

$$\text{Desviación (\%)} = \frac{|9.4\,\text{mA} - 9.416\,\text{mA}|}{9.416\,\text{mA}} \times 100 = 0.16\,\%$$

Con respecto al modelo simplificado (2a. aproximación) el modelo de segmentos lineales presenta una menor desviación, por lo que es más confiable para el análisis. Podría concluirse que el modelo ideal es menos confiable *para estas condiciones.*

La conclusión obtenida del ejemplo 6.5 no debe tomarse como una determinación definitiva, ya que una *aproximación* que no resulta confiable en determinadas condiciones podría ser la más confiable en otras. Una de las dificultades que encuentra un experimentador en el laboratorio es *determinar sus parámetros de comparación*. Entonces es indispensable establecer, como punto de partida, los puntos de referencia en todo experimento de laboratorio o de simulación.

COMPETENCIAS:
- Comprender el método de la recta de carga para el análisis de un circuito simple con un diodo. [1]
- Analizar circuitos simples con un diodo mediante el método de la recta de carga. [2]

6.7.2 Método de la recta de carga

Es un método gráfico que se basa en las leyes de voltajes y corrientes básicas, cuyo nombre se debe a que el efecto de la carga conectada en el diodo es determinante para el efecto que pueda tenerse en la corriente que pasa por el dispositivo. Para describir el método consideremos el circuito que aparece en la figura 6.26*a*, en el cual un diodo *D* (de silicio) está conectado en serie con una resistencia que se identifica con *R*, alimentados por una fuente de voltaje de cd, llamada V_S. La curva característica del dispositivo aparece en la figura 6.26*b*.

Una manera práctica de saber si el diodo está polarizado directa o inversamente consiste en "cubrir" el símbolo del diodo en el diagrama y suponer que en su lugar existe un conductor solamente; quedarán a la vista en el diagrama la fuente y la resistencia. En esta malla a la vista, por tanto habrá una corriente. Se dibuja una flecha que indique el sentido en el cual circularía dicha corriente. Enseguida se descubre nuevamente la imagen del diodo y se compara el sentido de la flecha de la corriente con el de la flecha que representa al diodo. El diodo estará polarizado directamente si ambas flechas tienen el mismo sentido; en caso contrario, el diodo estará polarizado inversamente.

Una vez que el diodo está polarizado directamente, considerando la 1a. aproximación se plantea la ecuación de malla:

$$-V_S + V_D + I_D R = 0$$

Analicemos ahora dos situaciones extremas para el diodo:

- El diodo se considera abierto. La corriente en el diodo $I_D = 0$ mA.
- El diodo se considera un cortocircuito. El voltaje en el diodo $V_D = 0$ V.

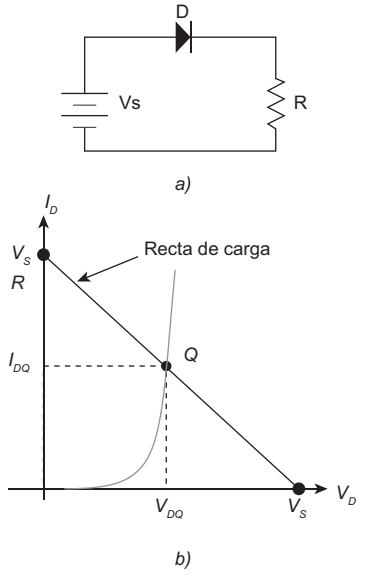


Figura 6.26 Determinación de las características del punto de operación para un diodo. *a*) Circuito de polarización. *b*) Método de la recta de carga.

Considerando la primera situación, que el diodo esté abierto: si se sustituye el valor de la corriente ($I_D = 0$ mA) en la ecuación de la malla, se tiene:

$$-V_S + V_D + (0\text{ mA})\,R = 0$$

y al despejar el voltaje en el diodo:

$$V_D = V_S\Big|_{I_D=0} \qquad \text{(ecuación 6.6)}$$

Los valores de las dos variables del diodo, V_D e I_D constituyen un par de coordenadas que definen un punto en la gráfica de la curva característica del dispositivo (V_D, I_D), y en estas condiciones el punto está dado por (V_S, 0). Es un punto sobre el eje horizontal (voltaje de diodo) que se ubica en la gráfica de la figura 6.26.b.

Si ahora se considera la segunda situación extrema, que el diodo esté en cortocircuito ($V_D = 0$ V), y se sustituye este valor en la ecuación de malla,

$$-\mathrm{V_S} + 0 + \mathrm{I_D R} = 0$$

y se despeja a I_D se tendrá que

$$I_D = \frac{V_S}{R}\Big|_{V_D=0} \qquad \text{(ecuación 6.7)}$$

Se tiene otro par de valores que corresponden a las coordenadas de otro punto en la gráfica (0, $\frac{V_S}{R}$). Este punto se ubica sobre el eje vertical (corriente en el diodo) en la figura 6.26.b.

Al unir con una línea recta los dos puntos que se han encontrado, se obtiene la *recta de carga* del diodo. En el cruce de la recta de carga con la curva del diodo se encuentra el punto de operación Q para el diodo considerado, cuyas características están dadas por un voltaje V_{DQ} y una corriente I_{DQ}

EJEMPLO 6.6

Utiliza el método de la recta de carga y determina el valor de la corriente I_D que circula en la malla de la figura 6.17, suponiendo que el diodo es de silicio, para $V_S = 5$ V.

Solución

Datos:

$V_S = 5$ V y $V_S = 12$ V
$R = 1200\ \Omega$
$D \Rightarrow Si.\ (V_T = 0.7\text{V})$
$R_B \approx 2\ \Omega$

Planteamiento:

Se debe tener la curva característica del diodo utilizado (aparece en la figura 6.27). Se procede a aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes para determinar la ecuación de la malla. Se consideran las situaciones para $I_D = 0$ y $V_D = 0$, para determinar los puntos que unen a la recta de carga. El cruce de la recta con la curva será el punto de operación *Q*.

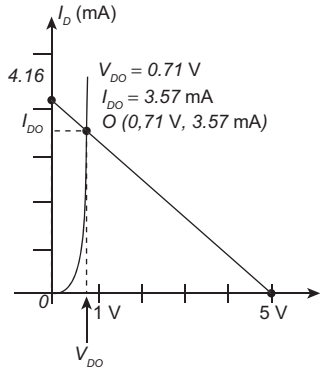


Figura 6.27 Determinación de las características del punto de operación para el ejemplo 6.6 por el método de la recta de carga.

Desarrollo:

La ecuación de malla es

$$-V_S + V_D + I_D R + = 0$$

Para $V_S = 5$ V

Al hacer la corriente en el diodo $I_D = 0$ V, y aplicar la ecuación 6.6:

$$V_D = V_S\Big|_{I_D=0} \qquad V_D = 5\text{ V}\Big|_{I_D=0}$$

Lo cual proporciona las coordenadas de un punto (5 V, 0 mA). Será un punto ubicado sobre el eje horizontal.

Al hacer el voltaje en el diodo $V_D = 0$ *V,* y aplicar la ecuación 6.7

$$I_D = \frac{V_S}{R}\Big|_{V_D=0} \quad I_D = \frac{5\text{ V}}{1200\ \Omega}\Big|_{V_D=0} = 4.16\text{ mA}$$

Entonces se tiene un punto cuyas coordenadas son (0 V, 4.16 mA). Será un punto ubicado sobre el eje vertical.

*Al trazar los puntos (*5 V, 0 mA) y (0 V, 4.16 mA), y unirlos, se obtiene la recta de carga mostrada en la figura 6.27. El punto donde la recta cruza a la curva característica del diodo será el punto de operación *Q,* cuyas características son, de acuerdo a la gráfica $V_{DQ} = 0.71$ V, $I_{DQ} = 3.57$ mA, que son, prácticamente los mismos resultados que se obtuvieron en los ejemplos 6.3 y 6.4 por el método analítico de aproximaciones.

Se recomienda al lector hacer nuevamente el ejemplo 6.6 para un valor de la fuente de $V_S = 12$ V, utilizando el método de la recta de carga, con una escala apropiada, y comparar sus resultados con los ejemplos 6.3 y 6.4.

6.8 Diodo Zener

COMPETENCIAS:
- Comprender la teoría básica de un diodo Zener. [1]
- Analizar circuitos simples que contienen un diodo Zener. [2]

El diodo Zener es un dispositivo semiconductor en unión *p-n* que se ha construido para operar en la región de polarización inversa (tercer cuadrante de la curva característica, figura 6.28). Esta forma de operar se logra mediante el control apropiado de la impurificación del cristal. El símbolo utilizado para representarlo es el mostrado en la figura 6.29.

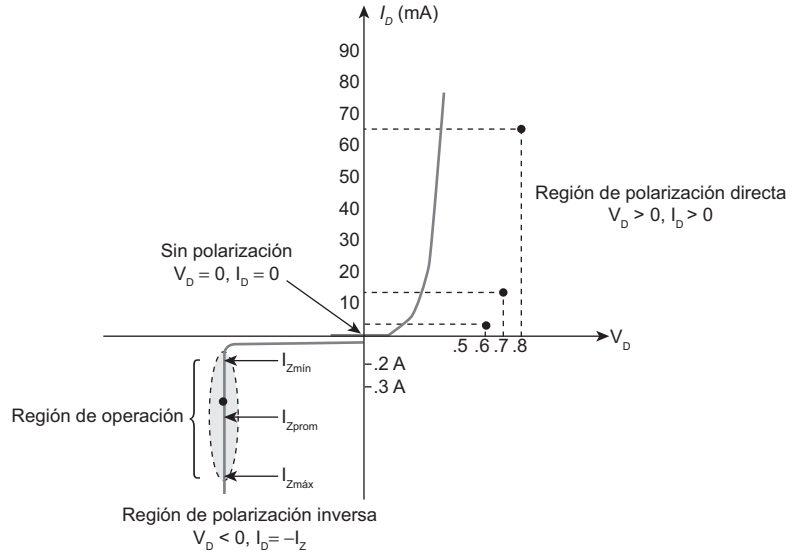


Figura 6.28 Curva característica para un diodo Zener.

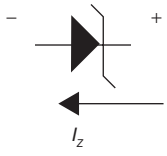


Figura 6.29 Símbolo usado para representar al diodo Zener.

Desde luego que, físicamente este dispositivo tiene límites en sus rangos de operación; si al aplicarle un voltaje de polarización inversa se sobrepasan estos límites puede provocarse la *ruptura* del cristal. La ruptura se debe a dos fenómenos físicos principalmente, cuya explicación se fundamenta en los principios de la mecánica cuántica (que no se discutirán aquí) y que consisten en lo siguiente:

- La ***ruptura por el efecto Zener*** se presenta en uniones *p-n* altamente impurificadas en las cuales los electrones cercanos a la unión forman un *túnel* a través de la región de empobrecimiento.
- La ***ruptura por Avalancha***, es un fenómeno que se presenta de manera predominante en las uniones *p-n* cuando los electrones y huecos que se desplazan dentro de la región espacio-carga, adquieren energía del campo eléctrico presente en la unión, la cual los impulsa a tener colisiones con electrones de valencia de la región de empobrecimiento, generándose el proceso de recombinación (se forman pares electrón-hueco). Esto ocasiona la formación de nuevos huecos que se mueven en sentido opuesto a los electrones en la banda de conducción, sumándose así a la corriente debida a la polarización inversa aplicada. Por otro lado, los electrones y huecos recién generados pueden adquirir suficiente energía para ionizar a otros átomos, provocando un proceso de "avalancha".

El voltaje de polarización inversa que provoca la ruptura de un diodo de este tipo, se denomina *voltaje de ruptura Zener,* o simplemente *voltaje Zener* (V_Z), y la corriente de polarización inversa generada cuando el diodo está operando en la región de ruptura es la llamada *corriente Zener* I_Z. Por ley de Ohm, la resistencia en el punto de operación de uno de estos diodos es la *resistencia Zener*.

La gran intensidad de corriente que se forma puede provocar, desde leves calentamientos hasta la destrucción total del cristal.

El funcionamiento de este diodo, a grandes rasgos es el siguiente:

- en la zona directa lo podemos considerar como un generador de voltaje continuo (voltaje de codo);
- en la *zona de disrupción*, entre voltaje de codo y voltaje zener ($V_{z\,nom}$) lo podemos considerar un circuito abierto.

En la curva característica del diodo Zener (figura 6.28) podemos distinguir:

1. $V_{z\,nom}$, V_z: voltaje nominal del Zener (voltaje en cuyo entorno trabaja adecuadamente el Zener).
2. $I_{z\,mín}$: mínima corriente inversa que tiene que atravesar al diodo a partir de la cual se garantiza el adecuado funcionamiento en la *región de operación* ($V_{z\,mín}$).
3. $I_{z\,máx}$: máxima corriente inversa que puede atravesar el diodo a partir de la cual el dispositivo se destruye ($V_{z\,máx}$).
4. P_z: potencia nominal que no debe sobrepasar el componente. Aproximadamente se corresponde con el producto de (V_{znom}) ($I_{zmáx}$.)

Observa que este dispositivo opera en la región de polarización inversa, figura 6.28, pero se comporta como un circuito abierto para todo valor de voltaje inverso cuya magnitud sea menor que la magnitud de su voltaje Zener nominal. El voltaje Zener es un parámetro que el fabricante puede controlar por el grado de impurezas que utilice en su construcción, y puede tener diferentes valores, dependiendo de cada diodo en particular, que van desde 1 o 2 V hasta 200 V, con una gama de potencias desde ¼ hasta 50 watts (este dato lo proporciona el fabricante).

Una vez que el voltaje de polarización inversa alcanza el valor de V_z se producen los fenómenos explicados anteriormente para dar lugar a la corriente Zener, cuyos valores se encuentran entre un mínimo y un máximo.

Cuando el diodo Zener se encuentra en conducción, aunque se aumente la magnitud del voltaje de polarización inversa (valores a la izquierda de V_Z en la figura 6.28), la diferencia de potencial en sus terminales permanece constante en el valor de V_Z, como se puede ver en la curva característica.

Por su forma particular de operar, el diodo Zener se utiliza como un dispositivo *regulador* de voltaje; o sea que, aun cuando el voltaje de polarización aumente, en las terminales del dispositivo se tendrá un voltaje *fijo* y equivalente al valor nominal de V_Z.

Cuando se usa un diodo Zener en un circuito se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones (a partir de las hojas de características suministradas por el fabricante):

1. Para un correcto funcionamiento, por el Zener debe circular una corriente inversa mayor o igual a $I_{z\,mín}$.

2. La corriente máxima en sentido inverso ha de ser siempre menor que $I_{z\,máx}$.
3. Elegir un dispositivo cuya potencia nominal P_z sea mayor (del orden del doble) que la máxima que éste va a soportar en el circuito.

EJEMPLO 6.7

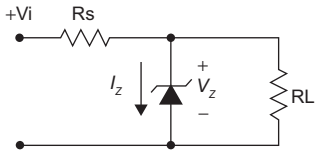


Figura 6.30 Circuito regulador con diodo Zener.

Calcula el valor que debe tener R_S en la figura 6.30, para que a través del diodo Zener circule una corriente de 34 mA. ¿Es capaz el diodo de soportar esta corriente? Los datos para el dispositivo usado son $V_Z = 10$ V, $P_Z = 1$W.

Solución

Datos:

$V_Z = 10$ V
$P_Z = 1$ W
$R_L = 150\ \Omega$
$R_S = ?\ \Omega$

Planteamiento:

Como se requiere que circulen 34 mA a través del diodo Zener, esto implica que *opere* a nivel de V_Z. Como R_L está en paralelo con el diodo se tendrá un V_L de 10 V. Al aplicar la ley de Ohm en la resistencia de carga se puede deducir la I_L. En el nodo "A" hay un divisor de corriente del cual "salen" $I_Z + I_L$, que debe ser, por la ley de Kirchhoff, igual a la corriente que viene de R_S.

R_S y el diodo Zener forman un divisor de voltaje; en R_S debe haber entonces, 5 V. Aplicando nuevamente la ley de Ohm para R_S, se puede deducir el valor de esta resistencia.

Desarrollo:

En la resistencia de carga

$$V_L = 10\text{ V} \Rightarrow I_L = \frac{10\text{ V}}{150\ \Omega} = 66.666\text{ mA}$$

En el nodo A:

$$I_S = I_Z + I_L = 34\text{ mA} + 66.666\text{ mA} = 100.666\text{ mA}$$

Por ley de Ohm

$$R_S = \frac{V_S}{I_S} = \frac{5\text{ V}}{100.666\text{ mA}} = 49.66\ \Omega$$

Puede utilizarse una resistencia de 50 Ω.
La potencia absorbida por el diodo Zener será:

$$P_Z = V_Z I_Z = (10\text{ V})\,(34\text{ mA}) = 340\text{ mW}$$

Este último dato permite concluir que la configuración de la figura 6.58 podrá operar sin ningún riesgo de calentamiento o de deterioro para el diodo, ya que el dispositivo está disipando aproximadamente 34 % de su capacidad en potencia total que es de 1 W.

6.9 Otros tipos de diodos

6.9.1 Diodo emisor de luz (LED)

COMPETENCIAS:

- Comprender la teoría básica del diodo emisor de luz (LED), el fotodiodo y la celda solar.
- Describir el funcionamiento del LED, el fotodiodo y la celda solar. [2]

El LED (*Light Emitting Diode*) es un diodo de unión *p-n* que se diseñó para emitir luz visible en el momento que es polarizada directamente, figura 6.31. El fenómeno que se presenta en estos dispositivos al transformarse la energía eléctrica en energía luminosa se conoce como *electroluminiscencia*.

Los LED son muy diferentes de las bombillas de filamento o los pilotos de neón, ya que para que un LED funcione se requiere una intensidad de corriente de entre 15 y 20 mA. Si le agregamos en serie una resistencia limitadora adecuada, lo podemos conectar a cualquier voltaje; aunque en la mayoría de los circuitos electrónicos digitales se alimentan con 5 volts. Existen en el mercado LED rojos, amarillos y verdes, y se pueden encontrar también infrarrojos, por lo que su uso es muy amplio en los circuitos electrónicos.

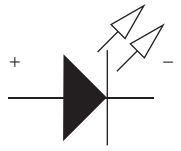


Figura 6.31 Símbolo usado para representar al LED.

6.9.2 Fotodiodo

Los detectores de luz, dispositivos basados en la tecnología de semiconductores de silicio, producidos en gran escala, que convierten las señales de luz en señales eléctricas, son otra parte importante de la moderna imagen de la *optoelectrónica* del semiconductor.

6.9.2.1 Descripción del fotodiodo

El fotodiodo de unión *p-n* opera en polarización inversa y es un elemento básico para comprender los dispositivos fotosensibles de silicio. Cuando la luz de longitud de onda apropiada es dirigida hacia la unión, se crean pares *hueco-electrón* que se desplazan a través de la unión debido al campo generado en la región de agotamiento. El resultado es un flujo de corriente, denominado *fotocorriente*, en el circuito externo, que es proporcional a la intensidad luminosa efectiva en el dispositivo. El fotodiodo se comporta básicamente como un generador de corriente constante hasta que se alcanza el voltaje de avalancha.

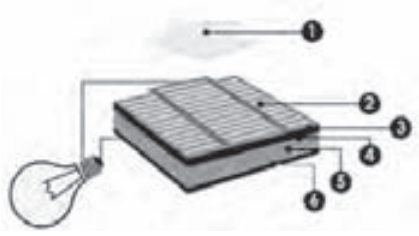
La totalidad de los detectores de luz comunes consisten en una unión a fotodiodo y un amplificador. En la mayoría de dispositivos comerciales, la corriente del fotodiodo se halla en el margen comprendido entre el submicroamper y las decenas de microamperes, pudiendo añadirse a la pastilla un amplificador sencillo.

6.9.3 Fotodiodo de avalancha

Es posible incorporar un tipo de sistema amplificador de empleo común que forma parte del propio fotodiodo. El fotodiodo de avalancha utiliza la multiplicación por avalancha para conseguir amplificar la fotocorriente creada por los pares hueco-electrón. Esto proporciona una elevada sensibilidad y gran rapidez. Sin embargo, el equilibrio entre ruido y ganancia es difícil de conseguir y como consecuencia, el costo es alto. Asimismo, la estabilidad de temperatura es deficiente y se requiere un voltaje de alimentación de valor elevado (100-300 V), estrechamente controlada. Por estas razones, el fotodiodo de avalancha tiene limitadas aplicaciones.

6.9.4 Celda solar

6.9.4.1 Efecto fotovoltaico



1. Luz (fotones).
2. Contacto frontal.
3. Capa negativa.
4. Capa de desviación
5. Capa positiva
6. Contacto posterior.

Figura 6.32 Representación de la transformación de energía solar en electricidad mediante un panel de celdas fotoeléctricas.

Para producir electricidad solar es necesario contar con un panel solar compuesto por una o más celdas solares, figura 6.32. Cuando la luz del Sol cae sobre una celda solar, el material de la misma absorbe algunas de las partículas de luz, denominadas fotones. Cada fotón contiene una pequeña cantidad de energía. Cuando un fotón es absorbido, se da inicio a un proceso de liberación de un electrón en el material de la celda solar. Dado que ambos lados de una celda solar están eléctricamente conectados por un cable, una corriente fluirá en el momento en que el fotón es absorbido. La celda solar genera, entonces, electricidad, que puede ser utilizada inmediatamente o almacenada en una batería.

Mientras las celdas solares permanecen expuestas a la luz, este proceso de liberación de electrones continúa y, por ende, el proceso de generación de electricidad. Los materiales capaces de generar este efecto fotovoltaico son los semiconductores. En un proceso de producción especial, las celdas solares son fabricadas de estos materiales semiconductores.

Un panel solar puede producir energía limpia por un periodo de 20 años o más. El desgaste se debe, principalmente, a la exposición al medio ambiente. Un panel solar montado apropiadamente constituirá una fuente de energía limpia, silenciosa y confiable por muchos años.

Las celdas solares son fabricadas con materiales que convierten directamente la luz solar en electricidad. Hoy en día, la mayor parte de celdas solares utilizadas a nivel comercial son de silicio.

Las celdas solares de silicio pueden ser de tipo monocristalinas, policristalinas o amorfas. La diferencia entre ellas radica en la forma como los átomos de silicio están dispuestos, es decir, en la estructura cristalina. Existe, además, una diferencia en la eficiencia, tabla 6.2. Por eficiencia se entiende el porcentaje de luz solar que es transformado en electricidad.

Las celdas solares de silicio monocristalino y policristalino tienen casi el mismo y más alto nivel de eficiencia en relación con las de silicio amorfo.

Una celda solar típica está compuesta de capas. Primero hay una capa de contacto posterior y, luego, dos capas de silicio. En la parte superior se encuentran los contactos de metal frontales con una capa antirreflejante, que da a la celda solar su típico color gris claro.

Durante la última década se han estado desarrollando nuevos tipos de celdas solares de materiales diversos, entre las que encontramos, por ejemplo, a las celdas de película delgada y a las celdas de CIS (diseleniuro de indio cobre $CuInSe_2$) y CdTe (telururo de cadmio). Éstas comienzan a ser comercializadas.

Tabla 6.2 Eficiencia comparativa de diferentes tipos de celdas solares.

Eficiencias de celda	
Monocristalina	12-15 %
Policristalina	11-14 %
Amorfa	6-7 %
Telururo de cadmio	7-8 %

Actividades para la evaluación de competencias

Materiales y la corriente eléctrica

6.1 En breves palabras explica a qué se refiere la teoría de bandas de energía para enlaces químicos en sólidos metálicos. [3]
6.2 Explica los conceptos de banda de conducción y banda de valencia, según la teoría de bandas de energía. [2]
6.3 ¿A qué se le llama la *banda prohibida* en la teoría de bandas? [1]
6.4 Explica el concepto de la unidad *electrón-volt*. [3]
6.5 Calcula la equivalencia en unidades electrón-volt para una energía de 185.6 joules. [2]
6.6 ¿Qué se entiende por material conductor? [1]
6.7 ¿Qué valores en eV puede tener la banda prohibida en un material dieléctrico? [1]
6.8 Describe brevemente el concepto de *material semiconductor*. [1]

Materiales semiconductores

6.9 Describe los conceptos de material extrínseco y material intrínseco en semiconductores. [1]
6.10 Explica los conceptos de material semiconductor tipo *p* y material tipo *n*. [3]
6.11 ¿En qué consiste el fenómeno de recombinación? [2]
6.12 ¿Qué se entiende por *portadores mayoritarios* en un semiconductor? [1]
6.13 Explica los conceptos de *sentido real* y *sentido convencional* de la corriente eléctrica. [2]

Diodo semiconductor

6.14 Explica brevemente el concepto de *diodo semiconductor*. [1]
6.15 ¿Qué diferencia hay entre un diodo de unión y un diodo por crecimiento? Explica. [2]
6.16 ¿En qué consiste un diodo semiconductor por difusión? [2]
6.17 Dibuja el símbolo utilizado para representar a un diodo semiconductor, señala sus elementos principales y explica su significado. [1]

Polarización del diodo

6.18 ¿En qué consiste la polarización de un diodo semiconductor? [1]
6.19 ¿Cuántas formas de polarizar a un diodo se utilizan? Descríbelas brevemente y traza diagramas simbólicos. [1]
6.20 ¿A qué se le llama corriente de saturación inversa? [1]
6.21 ¿Cómo se puede determinar la corriente de saturación inversa? [2]

Características del diodo semiconductor

6.22 ¿Cómo puede obtenerse la curva característica de un diodo semiconductor? [2]
6.23 Explica el concepto de resistencia estática en un diodo semiconductor. [2]
6.24 Explica el concepto de resistencia dinámica en un diodo semiconductor. [2]
6.25 Halla la curva característica para un diodo de silicio que opera a una temperatura de 22 °C cuya corriente de saturación inversa es $I_S = 12$ nA y $k = 11\,600$. [3]
6.26 Calcula el valor para la resistencia estática y para la resistencia dinámica de un diodo de silicio cuando su punto de operación Q tiene las características $I_D = 12$ mA, $V_D = 0.72$ V. [2]

Modelos para el diodo

6.27 ¿Qué se entiende por *modelo* en ingeniería? [1]
6.28 Describe brevemente los modelos utilizados para representar a un diodo semiconductor en el análisis de circuitos. [2]
6.29 ¿Qué es el voltaje de umbral en un diodo semiconductor? [1]
6.30 ¿Cuál modelo es más recomendable en el análisis de circuitos con diodos semiconductores? ¿Por qué? [3]

Análisis de circuitos con diodos

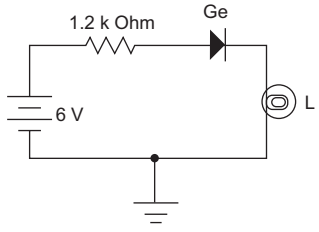


Figura 6.33 Circuito para el ejercicio 6.31.

6.31 Aplicando la 2a. aproximación para el diodo calcula la potencia absorbida en cada uno de los elementos que forman el circuito de la figura 6.33, si la lámpara tiene una resistencia interna de 800 ohms. Elabora un cuadro para el registro de datos y comprueba tus resultados verificando que la suma de potencias del sistema sea igual a cero. [2]
6.32 Resuelve el ejercicio 6.31 aplicando el método de análisis por la recta de carga. Compara tu resultado con el obtenido anteriormente. [3]

6.33 Determina las características de operación I_D, V_D para cada uno de los diodos del circuito de la figura 6.34. [2]

6.34 Calcula la resistencia estática, la resistencia dinámica para cada uno de los diodos del circuito en la figura 6.34. Justifica tu procedimiento. [2]

6.35 ¿Qué intensidad de corriente circulará por la resistencia de 500 ohms en el circuito de la figura 6.34 si se invierte la posición del diodo de silicio? Justifica tu procedimiento. [2]

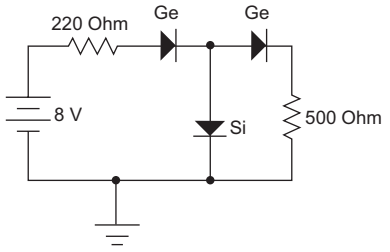


Figura 6.34 Circuito para el ejercicio 6.32

Diodo Zener

6.36 El diodo Zener de la figura 6.30 puede absorber una potencia máxima de 200 mW a un voltaje de 8 V. ¿Si se coloca una resistencia $R_L = 220$ ohms y una $R_S = 100$ ohms, con $Vi = 14$ V, el diodo estará en riesgo de quemarse? Desarrolla y explica. [3]

6.37 ¿Cuál será el valor del Vi máximo que se puede aplicar en el circuito de la figura 6.30 si el diodo Zener puede absorber una potencia máxima de 240 mW a un voltaje de 8 V, colocando una resistencia $R_L = 220$ ohms y una $R_S = 100$ ohms? Desarrolla y explica. [2]

Notas:

[1] Competencias de la dimensión Instrumental.
[2] Competencias de la dimensión Sistémica.
[3] Competencias de la dimensión Interpersonal.

Capítulo 7

Aplicación de los diodos semiconductores

Estructura

Temas	Conceptuales
7.1 Circuitos básicos con diodos semiconductores 7.1.1 Prueba de diodos. 7.1.2 Arreglos en serie y en paralelo.	• Concepto de continuidad en diodos semiconductores. • Descripción de arreglos con diodos en serie y en paralelo.
7.2 Compuertas lógicas AND y OR con diodos 7.2.1 Compuerta lógica OR. 7.2.2 Compuerta lógica AND.	• Compuerta lógica tipo *OR*. • Compuerta lógica tipo *AND*.
7.3 Rectificador de media onda	• Concepto de *rectificador de media onda*. • Principios de operación de un rectificador de media onda. • Qué es el *voltaje de transición*. • Qué son el *rizo* y el *factor de rizo*.
7.4 Rectificador de onda completa 7.4.1 Rectificador con dos diodos. 7.4.2 Rectificador con puente de diodos.	• Qué es un *rectificador de onda completa*. • Principios de operación de un rectificador de onda completa.
7.5 Fuente de alimentación básica 7.5.1 1a. etapa: transformador. 7.5.2 2a. etapa: rectificador. 7.5.3 3a. etapa: filtro. 7.5.4 4a. etapa: regulador.	• Qué es una fuente de alimentación en sistemas electrónicos. • Conceptos: *filtro* y *regulador* en una fuente de alimentación. • Qué es un regulador de circuito integrado.
Actividades para la evaluación de competencias	

temática

	CONTENIDOS	
	Procedimentales	**Actitudinales**
	• Verificación del estado de un diodo por tres métodos: Con multímetro digital automático. Con óhmetro (digital o analógico). Con trazador de curvas. • Análisis de circuitos con diodos por medio de circuitos equivalentes.	• Elementos para valorar los trabajos realizados por distinguidos científicos y sus aportaciones al desarrollo de la ciencia y la tecnología electrónica.
	• Aplicación de diodos como dispositivos biestables para estructurar circuitos simples para las operaciones lógicas *OR* y *AND*.	• Elementos para apreciar la importancia de los dispositivos electrónicos y su aplicación en el desarrollo de los sistemas electrónicos lógicos.
	• Análisis de un rectificador de media onda con un diodo. • Cálculo del voltaje de transición, el voltaje *RMS* y voltaje de cd en un rectificador de media onda. • Cálculo del factor de rizo en rectificador de media onda.	• Valorar la importancia de los materiales semiconductores en la conversión de corriente alterna en corriente directa. • Actividades que permiten valorar el esfuerzo y el trabajo individual mediante cálculos de exactitud y precisión en el planteamiento, desarrollo y resolución de problemas relacionados con los temas correspondientes.
	• Análisis de un rectificador de onda completa con dos y con cuatro diodos. • Cálculo del voltaje de transición, el voltaje *RMS* y voltaje de cd en un rectificador de onda completa. • Cálculo del factor de rizo en rectificador de onda completa.	
	• Análisis de una fuente de alimentación básica, por etapas. Cálculo de voltaje y corriente por etapas. Cálculo del factor de rizo en la carga.	• Apreciar la importancia de uno de los circuitos electrónicos básicos en todo sistema electrónico, la fuente de alimentación.

Orientación general		
Analizar la manera en que operan los diodos semiconductores aplicados en circuitos electrónicos básicos.		
Competencias		
Dimensión Instrumental [1]	**Dimensión Sistémica [2]**	**Dimensión Interpersonal [3]**
Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:
1.1 Verificar el estado funcional de un diodo semiconductor mediante pruebas de laboratorio. 1.2 Comprender la operación de los diodos semiconductores en arreglos tipo serie y tipo paralelo. 1.3 Comprender la operación de las compuertas lógicas AND y OR con diodos semiconductores. 1.4 Comprender el funcionamiento de un diodo semiconductor en el proceso de rectificación de media onda de una señal. 1.5 Comprender el concepto de *voltaje de transición* en un circuito rectificador con base en diodos semiconductores. 1.6 Comprender los conceptos *rizo* y *factor de rizo* en una señal. 1.7 Comprender el funcionamiento de un rectificador de onda completa con base en dos diodos. 1.8 Comprender el funcionamiento de un rectificador de onda completa con base en un puente de cuatro diodos. 1.9 Describir las etapas fundamentales de una fuente de alimentación de cd.	2.1 Tomar decisiones respecto a la utilización de diodos semiconductores con base en pruebas de laboratorio. 2.2 Analizar la operación de circuitos básicos con diodos en arreglos tipo serie y tipo paralelo. 2.3 Analizar la operación de compuertas lógicas tipo AND o tipo OR a base de diodos semiconductores. 2.4 Comprobar la operación de compuertas lógicas AND y OR con base en las tablas de valores de verdad correspondientes. 2.5 Analizar un circuito rectificador de media onda que opera con base en un diodo semiconductor. 2.6 Calcular el factor de rizo de una señal rectificada. 2.7 Analizar un circuito rectificador de onda completa que opera con base en dos diodos. 2.8 Analizar un circuito rectificador de onda completa que opera con base en un puente de cuatro diodos. 2.9 Analizar por etapas el circuito base de una fuente de alimentación de cd.	3.1 Valorar la importancia de los estudios de investigadores en materia de semiconductores y sus aportaciones al desarrollo de la tecnología. 3.2 Valorar la importancia de la lógica matemática básica operada a través de circuitos con diodos semiconductores. 3.3 Evaluar la calidad de un circuito rectificador con base en el valor del factor de rizo de la señal rectificada. 3.4 Evaluar la calidad de una fuente de alimentación de cd con base en el factor de rizo de la señal de salida.

Introducción

COMPETENCIA:
Valorar la importancia de los estudios de investigadores en materia de semiconductores y sus aportaciones al desarrollo de la tecnología. [3]

En el capítulo 6 se trataron los fundamentos teóricos del dispositivo electrónico más sencillo, el diodo semiconductor, cuya aparición fue el inicio del desarrollo de la electrónica del estado sólido. Este dispositivo, aunque elemental en su construcción, vino a sustituir con ventajas al diodo de vacío, que consistía en una válvula con dos electrodos confinados en el interior de una ampolla de vidrio de tamaño mucho mayor. Los electrodos son el cátodo, cuya función era la emisión de electrones mediante el calentamiento, lo cual exigía de un gran potencial eléctrico para su polarización (117 volts *ca* o más) y un tiempo para la emisión electrónica; y el ánodo, que con un potencial positivo desarrollaba la función de atracción y recepción de los electrones emitidos.

El diodo semiconductor, como se vio en el capítulo anterior, es un dispositivo de estado sólido de menos de 2 cm de longitud, (lo cual representa ahorro de espacio considerable en la construcción de circuitos), y cuya polarización requiere de voltajes de *cd* muy pequeños. Sin embargo, su uso se ha generalizado en una gran variedad de circuitos electrónicos de extensa aplicación en los sistemas de comunicaciones, de computación, de control, de equipos de aplicación en las ciencias químicas, biológicas, físicas, de la medicina y la salud, entre muchas más. De hecho, los diodos semiconductores están presentes en la gran mayoría de la tecnología aplicada y de investigación actuales; de forma que, junto con el transistor, pasan a ser un elemento prácticamente indispensable en equipos de uso diario en las diversas ramas de la ciencia y de la vida cotidiana.

El presente capítulo está enfocado a la aplicación del diodo semiconductor en circuitos electrónicos básicos. Desde el procedimiento para la prueba de funcionamiento hasta el análisis y diseño de estos circuitos, con énfasis en una de sus funciones principales en el área de la electrónica, como es la rectificación, de amplia aplicación en fuentes de alimentación.

El funcionamiento de circuitos con diodos obedece a las mismas leyes de los circuitos eléctricos estudiadas en capítulos anteriores, aunadas a las características y modelos del dispositivo vistos en el capítulo 6. De ahí que el análisis de estos circuitos no debe representar dificultad alguna cuando se han estudiado los tópicos mencionados.

Es recomendable que el análisis y cálculo de estos circuitos básicos con diodos se refuerce con la simulación, como método para la comprobación de resultados.

7.1 Circuitos básicos con diodos semiconductores

COMPETENCIAS:
- Verificar el estado funcional de un diodo semiconductor mediante pruebas de laboratorio. [1]
- Tomar decisiones respecto a la utilización de diodos semiconductores con base en pruebas de laboratorio. [2]

7.1.1 Prueba de diodos

Antes de iniciar con el estudio de los circuitos básicos que utilizan diodos semiconductores veremos los métodos más usados en el laboratorio para la comprobación del estado de un diodo. Básicamente son tres los más utilizados y se describen a continuación.

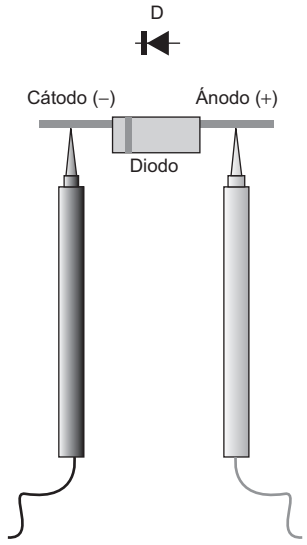


Figura 7.1 Prueba de un diodo por medio de un multímetro con función de verificación de diodos o en posición de óhmetro. La imagen corresponde a la polarización directa del diodo.

7.1.1.1 Verificación de un diodo con un multímetro digital

El más común es el método que utiliza un multímetro digital con *función de verificación de diodos*. Es un procedimiento sencillo que contempla los siguientes pasos:

1o. Aislar de cualquier conexión al diodo que se somete a prueba.
2o. Seleccionar en el multímetro la *función de verificación de diodos*. En muchos casos se identifica con el símbolo del diodo.
3o. Activar el multímetro (posición ON) y colocar la punta de prueba positiva (color gris oscuro) en la terminal *ánodo* del diodo, y la punta de prueba negativa o *común* (en negro) en el *cátodo*, como muestra la figura 7.1.
4o. En estas condiciones, la fuente de cd interna del instrumento estará polarizando directamente al diodo; por lo cual, si éste se encuentra en buenas condiciones entrará en estado de conducción y el medidor registrará la presencia de una corriente a través del diodo; algunos instrumentos contienen una pequeña alarma audible que indica *continuidad* en el diodo. Si el diodo está deteriorado, el instrumento no registrará corriente; no habrá señal audible o, dependiendo del instrumento que se use, éste dará una indicación para el caso.
5o. Si las puntas de prueba del instrumento se conectan, positiva al cátodo y negativa al ánodo, se estará polarizando *inversamente* al diodo, por lo cual no se registrará corriente en el diodo, ni *continuidad*. Esto es normal ya que es el comportamiento natural del diodo en polarización inversa.

7.1.1.2 Verificación de un diodo con un óhmetro

Cuando no se dispone de un multímetro con *función de verificación de diodos*, un método práctico y rápido que permite conocer el estado de un diodo es utilizar un óhmetro (digital o analógico), para lo cual se siguen pasos similares a los del método descrito antes.

1o. Aislar de cualquier conexión al diodo que se somete a prueba.
2o. Seleccionar en el óhmetro una escala de medición intermedia y *ajustar a cero* en caso de que sea analógico.
3o. Activar el óhmetro (posición ON) y colocar la punta de prueba positiva (gris oscuro) en la terminal de ánodo diodo, y la punta de prueba negativa o *común* (en negro) en el cátodo (figura 7.1).
4o. En estas condiciones, la fuente de cd interna del instrumento estará polarizando directamente al diodo; por lo cual, si éste se encuentra en buenas condiciones habrá circulación de corriente eléctrica y el instrumento registrará un valor de resistencia *bajo*. Si el diodo está deteriorado, el óhmetro registrará resistencia *infinita*. En caso de que el óhmetro no sea de ajuste automático, para cerciorarse mejor del valor de la resistencia, podrás seleccionar posteriormente la escala más apropiada. Recuerda que en el caso de óhmetros analógicos en cada cambio de escala deberá hacerse el *ajuste a cero*.

5o. Si las puntas del óhmetro se conectan con polaridad cambiada, la roja o positiva al cátodo y la negra o negativa al ánodo, se estará polarizando *inversamente* al diodo con la fuente interna del instrumento. En estas condiciones, el óhmetro registrará una resistencia *infinita*, ya que es normal que así el diodo esté en estado *abierto*.

7.1.1.3 Verificación de un diodo con un trazador de curvas

Este método, aunque es menos rápido que los dos anteriores, permite conocer más a detalle el estado del diodo. Se utiliza un *trazador de curvas*, que es un instrumento que permite obtener de manera directa las curvas características de dispositivos semiconductores, incluso del diodo. Cada trazador de curvas tiene sus propias instrucciones de operación; es necesario consultar el manual correspondiente; pero en cualquiera de ellos debes manipular apropiadamente el equipo; si el diodo a probar se encuentra en buenas condiciones, el trazador mostrará una curva característica similar a la que presenta la figura 6.19 del capítulo anterior. En la curva mostrada podrán interpretarse los valores característicos del dispositivo y compararse con los valores proporcionados por el fabricante. De ahí podrá determinarse el estado físico del dispositivo.

7.1.2 Arreglos en serie y en paralelo

COMPETENCIAS:
- Comprender la operación de los diodos semiconductores en arreglos tipo serie y tipo paralelo. [1]
- Analizar la operación de circuitos básicos con diodos en arreglos tipo serie y tipo paralelo. [2]

Los conceptos *serie* y *paralelo* para arreglos o configuraciones de circuitos con diodos, son los mismos que se han utilizado para configuraciones con circuitos resistivos, capacitivos o inductivos. Dos o más diodos pueden estar conectados en serie cuando a través de ellos circula la misma intensidad de corriente, o bien estar en paralelo si entre sus terminales existe igual diferencia de potencial, o también aparecer en configuraciones mixtas. En todos los casos cada diodo conserva sus propiedades y características individuales, mismas que deberán ser consideradas durante el análisis de circuitos con diodos. Los métodos de análisis son los que se han explicado hasta ahora; veamos los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 7.1

Utiliza el método de circuitos equivalentes y calcula la potencia absorbida por cada uno de los elementos de la malla representada en la figura 7.2.

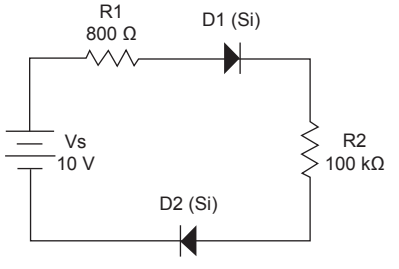


Figura 7.2 Arreglo de diodos en serie. Ejemplo 7.1.

Solución
Datos:

$V_s = 10\ \text{V}$ $\quad V_{T(D1)} = V_{T(D2)} = 0.7\ \text{V}$
$R_1 = 800\ \Omega$ $\quad P_{Vs} = ?,\quad P_{D1} = ?,\quad P_{D2} = ?\quad P_{R1} = ?,\quad P_{R2} = ?$
$R_2 = 100\ \Omega$

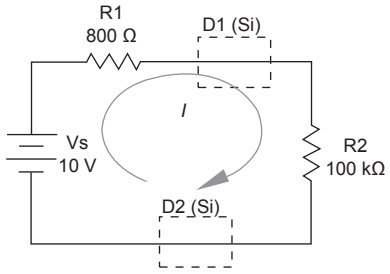


Figura 7.3 Al *cubrir* los diodos se verifica el sentido de la corriente. En este caso D1 y D2 están polarizados directamente. Ejemplo 7.1.

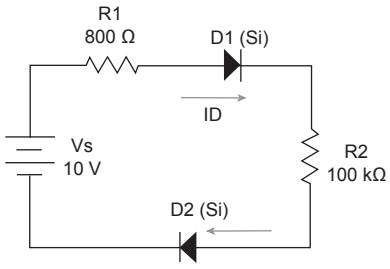


Figura 7.4 Las flechas de los diodos coinciden en el sentido de la corriente. Están polarizados directamente. Ejemplo 7.1.

Planteamiento:

Primero deberás verificar que los dos diodos estén polarizados directamente, ya que como están conectados en serie, no basta con que uno esté en estado de "encendido" y el otro en "apagado", puesto que esto abriría el circuito, y la corriente en la malla sería cero, por tanto, ningún elemento absorbería potencia eléctrica. En caso de haber corriente eléctrica, se puede hacer el análisis de Kirchhoff utilizando la 2a. aproximación (la 3a. no es recomendable ya que la resistencia interna $R_B << R_1$ y R_2 externas, y la caída de voltaje en ella sería despreciable en la práctica).

Desarrollo:

Se "cubren" los dos diodos y se les supone provisionalmente como si fueran sólo conductores, figura 7.3. En ese caso fluiría una corriente a través de R_1 y R_2. Al "descubrir" los diodos y comparar los sentidos de las flechas de la corriente generada por la fuente y la de los diodos se ve que éstos coinciden (en el sentido horario o dextrógiro); por tanto, los dos diodos están polarizados directamente, figura 7.4. Entonces se procede con el siguiente análisis.

La ecuación de voltajes de la malla es:

$$-V_S + IR_1 + V_{D1} + IR_2 + V_{D2} = 0$$

o bien

$$I = \frac{V_S - V_{D1} - V_{D2}}{R_1 + R_2}$$

Al sustituir valores con el criterio de la 2a. aproximación:

$$I = \frac{10\text{ V} - 0.7\text{ V} - 0.7\text{ V}}{800\ \Omega + 100\ \Omega} = 9.555\text{ mA}$$

Ésta es la corriente que circula por toda la malla. Se obtiene la potencia en cada elemento:

Potencia absorbida por cada diodo:

$$P = VI = (0.7\text{ V})(9.555\text{ mA}) = 6.685\text{ mW}$$

Potencia absorbida por los resistores:

$$P = I^2R = (9.555\text{ mA})^2(800\ \Omega) = 73.038\text{ mW}$$

$$P = I^2R = (9.555\text{ mA})^2(100\ \Omega) = 9.129\text{ mW}$$

Potencia absorbida por la fuente:

$$P = VI = (10\text{ V})(-9.555\text{ mA}) = -95.55\text{ mW}$$

Al hacer la suma de potencias absorbidas por los elementos pasivos se tiene 95.537 mW. Al comparar con la potencia suministrada por la fuente, se encuentra la siguiente desviación o error:

$$\text{Desviación (\%)} = \frac{|95.55\text{ mW} - 95.537\text{ mW}|}{95.55\text{ mWA}} \times 100 = 0.013\%$$

Es un error debido a que en los resultados parciales del análisis se han considerado sólo cierto número de decimales, dejando a las expresiones numéricas incompletas. Es desviación totalmente despreciable. El análisis, bajo el criterio de la 2a. aproximación de los diodos tiene una confiabilidad de 99.98%

EJEMPLO 7.2

Utiliza el método de circuitos equivalentes y calcula la potencia absorbida por cada uno de los elementos de la malla representada en la figura 7.2, si el diodo D_1 es de silicio y el diodo D_2 se cambia por uno de germanio.

Solución

Datos:

$V_s = 10$ V $\quad V_{T(D1)} = 0.7$ V, $V_{T(D2)} = 0.3$ V

$R_1 = 800\ \Omega \quad P_{Vs} = ?, \quad P_{D1} = ?, \quad P_{D2} = ? \quad P_{R1} = ?, \quad P_{R2} = ?$

$R_2 = 100\ \Omega$

Planteamiento:

En el ejemplo anterior se verificó que los dos diodos están polarizados directamente, por tanto, se procede al análisis.

Desarrollo:

La ecuación de voltajes de la malla es:

$$-V_S + IR_1 + V_{D1} + IR_2 + V_{D2} = 0$$

o bien

$$I = \frac{V_S - V_{D1} - V_{D2}}{R_1 + R_2}$$

Al sustituir valores con el criterio de la 2a. aproximación:

$$I = \frac{10\text{ V} - 0.7\text{ V} - 0.3\text{ V}}{800\ \Omega + 100\ \Omega} = 10\text{ mA}$$

Ésta es la corriente que circula por toda la malla. Se obtiene la potencia en cada elemento:

Potencia absorbida por el diodo de Si

$$P = VI = (0.7\text{ V})(10\text{ mA}) = 7\text{ mW}$$

Potencia absorbida por el diodo de Ge

$$P = VI = (0.3\text{ V})(10\text{ mA}) = 3\text{ mW}$$

Potencia absorbida por los resistores:

$$P = I^2R = (10\text{ mA})^2(800\ \Omega) = 80\text{ mW}$$

$$P = I^2R = (10\text{ mA})^2(100\ \Omega) = 10\text{ mW}$$

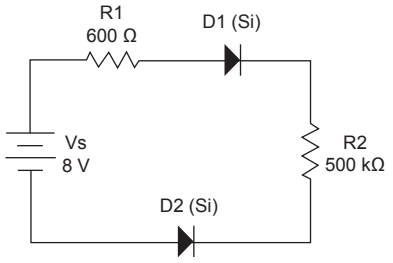


Figura 7.5 Red con diodos para el ejemplo 7.3.

Potencia absorbida por la fuente:

$$P = VI = (10\text{ V})(-10\text{ mA}) = -100\text{ mW}$$

Al hacer la suma de potencias absorbidas por los elementos pasivos se tiene 100 mW. Al comparar con la potencia suministrada por la fuente, se encuentra la siguiente desviación o error:

$$\text{Desviación (\%)} = 0\ \%$$

El análisis, bajo el criterio de la 2a. aproximación de los diodos tiene una confiabilidad de 100% debido a los valores que se han manejado y no existen fracciones que se hayan dejado incompletas.

EJEMPLO 7.3

Calcula la potencia que suministra la fuente de la red en la figura 7.5.

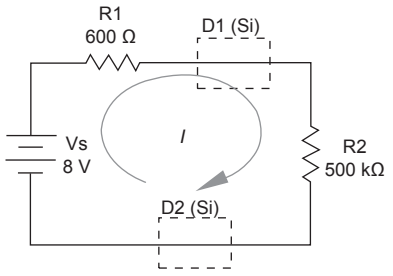


Figura 7.6 Al *cubrir* los diodos se verifica el sentido de la corriente. Ejemplo 7.3.

Solución

Datos:

$V_s = 8\text{ V}$ $\quad V_{T(D1)} = V_{T(D2)} = 0.7\text{ V}$

$R_1 = 600\ \Omega$ $\quad P_{Vs} = ?$

$R_2 = 500\ \Omega$

Planteamiento:

La potencia en la fuente puede calcularse con la expresión $P = VI$. Se conoce el valor de V, es necesario conocer el de I. Como en otros ejemplos, primero deberás verificar que los dos diodos estén polarizados directamente, ya que como están conectados en serie, no basta con que uno esté en estado de *encendido* y el otro en "apagado", puesto que esto abriría el circuito y la corriente en la malla sería cero, y ningún elemento absorbería potencia eléctrica. En caso de haber corriente eléctrica, para determinar su valor se puede hacer el análisis de Kirchhoff utilizando la 2a. aproximación (la 3a. no es recomendable ya que la resistencia interna $R_B << R_1$ y R_2 externas, y la caída de voltaje en ella sería despreciable en la práctica).

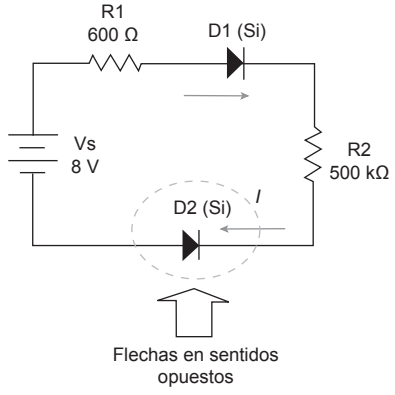


Figura 7.7 La flecha del diodo D_2 está en sentido opuesto al de la corriente, lo que indica que el diodo está polarizado inversamente (estado de *apagado*). El circuito está abierto en este punto y no hay corriente. Ejemplo 7.3.

Desarrollo:

Se "cubren" los dos diodos y se les supone provisionalmente como si fueran sólo conductores, figura 7.6. En ese caso fluiría una corriente a través de R_1 y R_2. Al "descubrir" los diodos y comparar el sentido de la flecha de la corriente generada por la fuente y las de los diodos, figura 7.7, se ve que la flecha del símbolo de D_1 coincide con el sentido de la corriente que se generaría si hubiese circuito cerrado (D_1 estaría en estado de *encendido*). La flecha que representa a D_2 está en sentido opuesto con el de la corriente; por tanto, el diodo D_2 está polariza-

do inversamente y se encuentra en estado "apagado". El circuito se encuentra abierto en este punto y no hay corriente en la malla.

Al no haber corriente en la malla, la potencia en la fuente será:

$$P = VI = (8\text{V})\,(0\text{A}) = 0\text{ W}.$$

EJEMPLO 7.4

Calcula las corrientes I_1 e I_2 y el voltaje V_0, en el circuito de la figura 7.8.

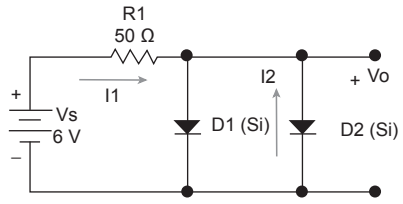


Figura 7.8 Red con diodos en paralelo. Ejemplo 7.4.

Solución

Datos:

$V_s = 6\text{ V}$ $\qquad V_{T(D1)} = V_{T(D2)} = 0.7\text{ V}$

$R_1 = 50\ \Omega$

$I_1 = ?, \quad I_2 = ?, \quad V_0 = ?$

Planteamiento:

Primero deberás verificar que los dos diodos estén polarizados directamente. Como están conectados en paralelo, basta con que por lo menos uno esté en estado de "encendido" para que haya corriente a través de la resistencia, y voltaje V_0 en la salida. En caso de haber corriente eléctrica, se puede hacer el análisis de Kirchhoff utilizando la 2a. aproximación (la 3a. no es recomendable ya que la resistencia interna $R_B << R_1$ externa, y la caída de voltaje en ella sería despreciable en la práctica).

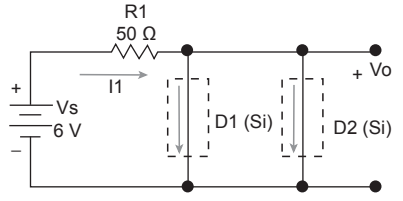


Figura 7.9 Al "cubrir" los diodos se muestra el sentido en que fluiría la corriente. Ejemplo 7.4.

Desarrollo:

Se "cubren" los dos diodos y se les supone como si fueran conductores, figura 7.9. En ese caso fluiría una corriente a través de R_1. Esta corriente encontraría un divisor formado por las ramas donde están conectados los diodos. Al "descubrir" los diodos y comparar los sentidos de las flechas de la corriente generada por la fuente y las de los diodos se ve que éstos coinciden; por tanto, los dos diodos están polarizados directamente, figura 7.10. Entonces se procede con el análisis.

Mediante la 2a. aproximación se representa el circuito completo, como en la figura 7.11. Los dos diodos están en paralelo y el voltaje en sus terminales es $V_{D1} = V_{D2} = 0.7$ V. Pueden sustituirse por una sola fuente de 0.7 V para efecto de análisis de malla como se ve en la figura 7.12.

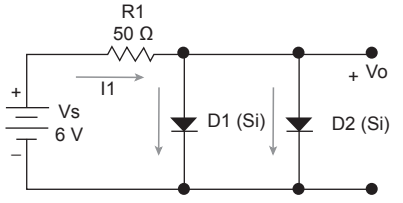


Figura 7.10 Al "descubrir" los diodos se ve en ambos el sentido de la corriente que es el mismo que sus símbolos. Éstos se encuentran polarizados directamente. Ejemplo 7.4.

La ecuación de voltajes de la malla es:

$$-V_S + IR_1 + V_D = 0$$

o bien

$$I = \frac{V_S - V_D}{R_1}$$

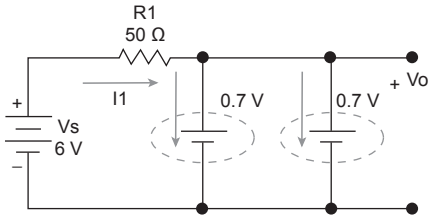


Figura 7.11 Al aplicar la 2a. aproximación se sustituyen los diodos por una fuente de 0.7 V (Si), cada uno. Ejemplo 7.4.

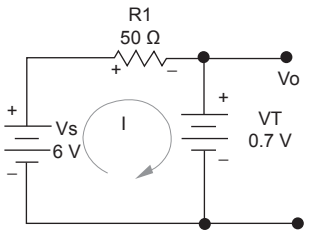


Figura 7.12 Malla equivalente al circuito de la figura 7.11 del ejemplo 7.4.

Al sustituir valores con el criterio de la 2a. aproximación:

$$I = \frac{6\text{ V} - 0.7\text{ V}}{50\ \Omega} = 106\text{ mA}$$

Ésta es la corriente total que circula por la malla. Como resultó con signo positivo se asume que el sentido hipotético asignado en el planteamiento es el correcto. En R_1 circula de izquierda a derecha y se divide en dos partes iguales hacia las ramas que contienen a los diodos. En cada rama (en cada diodo) la corriente circulará de arriba hacia abajo:

$$I_D = \frac{1}{2} = \frac{106\text{ mA}}{2} = 53\text{ mA}$$

La corriente I_2 solicitada en el problema (de abajo hacia arriba) circula en sentido contrario; por tanto, para ese sentido solicitado el valor de la corriente en el diodo 2 es $I_{D2} = -53$ mA.

El voltaje V_0 es el mismo que existe en el diodo D_2, por tanto:

$$V_0 = V_{D1} = V_{D2} = 0.7\text{ V}.$$

.....

La simulación en computadora del circuito del ejemplo 7.4 da el resultado que muestra la figura 7.13.

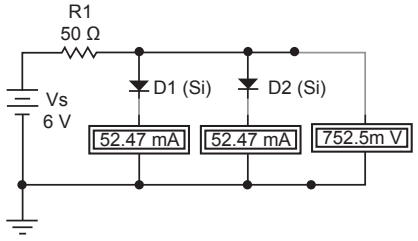


Figura 7.13 Resultado del simulador para el circuito del ejemplo 7.4.

El simulador proporciona un resultado muy semejante al obtenido en el ejemplo 7.4. Si se obtiene el porcentaje de error de los cálculos teóricos *respecto al resultado que presenta el simulador* se tiene, para la corriente en cada diodo:

$$\text{Desviación (\%)} = \frac{|\,53\text{ mA} - 52.47\text{ mA}\,|}{52.47\text{ mA}} \times 100 = 1.01\%$$

El error de 1.01% de los cálculos es totalmente aceptable para un experimento de laboratorio escolar; sin embargo, éste puede reducirse si en los cálculos se aplica la 3a. aproximación, considerando una resistencia interna R_B de cada diodo que es de aproximadamente 1 Ω (el simulador si la considera). La resistencia interna equivalente de los dos diodos en paralelo es de 0.5 Ω. La corriente total sería:

$$I = V_s / R_{eq} = 104.95\text{ mA}$$

Y al dividirse en dos partes iguales se tiene que la corriente en cada diodo sería de 52.47 mA (prácticamente 0% de error).

.....

EJEMPLO 7.5

Calcula la corriente y potencia absorbida por cada elemento en el circuito de la figura 7.14.

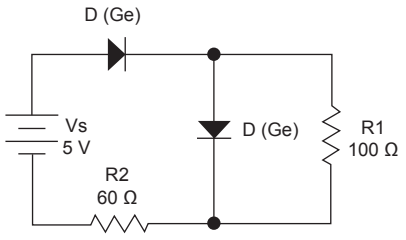


Figura 7.14 Circuito con diodos para el ejemplo 7.5.

Solución
Datos:

$V_s = 5\text{ V}$ $\qquad V_{T(D1)} = V_{T(D2)} = 0.3\text{ V}$
$R_1 = 100\ \Omega$
$R_2 = 60\ \Omega$
$P_{R1} = ?$

Planteamiento:

Al aplicar la prueba práctica de "cubrir" y "descubrir" los símbolos de los diodos en el diagrama simbólico puedes notar que los dos diodos están polarizados directamente (estado de *encendido*). Siendo así, en cada diodo debe haber una caída de voltaje de 0.3 volts aproximadamente. Como R_1 está en paralelo con D_2, en el resistor deberá haber la misma caída de voltaje. Se puede simplificar el circuito a una sola malla como la mostrada en la figura 7.15. Encuentra la ecuación de malla y procede con el análisis como en ejemplos anteriores. Finalmente calcula la potencia en cada elemento.

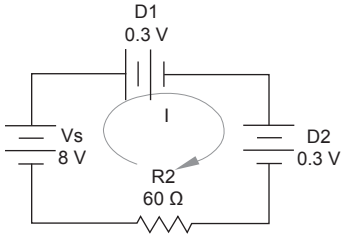


Figura 7.15 Circuito equivalente para la malla del ejemplo 7.5, usando la 2a. aproximación.

Desarrollo:

La ecuación de la malla en la figura 7.15 es:

$$-V_S + IV_{T1} + IV_{T2} + IR_2 = 0$$

$$\therefore I = \frac{V_S - V_{T1} - V_{T2}}{R_2} = \frac{5\text{ V} - 03\text{ V} - 0.3\text{ V}}{60\ \Omega} = 73.333\text{ mA}$$

Esta corriente se divide en dos porciones, una hacia el diodo D_2 y la otra hacia la resistencia R_1. Puedes determinar la intensidad que circula por R_1 al aplicar la ley de Ohm:

$$I_{R1} = \frac{V_{T1}}{R_1} = \frac{0.3\text{ V}}{100\ \Omega} = 3\text{ mA}$$

Si aplicas la ecuación para la potencia:

$$P_{R1} = \frac{(0.3\text{ V})^2}{100\ \Omega} = 0.9\text{ mW}$$

La corriente que circula por D_2 es $I_{D2} = I - I_{R1} = 73.333\text{ mA} - 3\text{ mA}$
$I_{D2} = 70.333\text{ mA}$

Al aplicar la ecuación de potencias a cada elemento se obtiene el resultado para cada elemento. La tabla 7.1 resume el análisis.

Tabla 7.1 Resumen de resultados para el ejemplo 7.5.

Elemento	Voltaje	Corriente	Potencia absorbida
D_1	0.3 V	73.333 mA	21.999 mW
D_2	0.3 V	70.333 mA	21.099 mW
R_1	0.3 V	3.000 mA	.900 mW
R_2	4.4 V	73.333 mA	322.665 mW
Fuente	5.0 V	–73.333 mA	–366.665 mW

7.2 Compuertas lógicas AND y OR con diodos

COMPETENCIAS:
- Comprender la operación de las compuertas lógicas AND y OR con diodos semiconductores. [1]
- Analizar la operación compuertas lógicas tipo AND o tipo OR a base de diodos semiconductores. [2]
- Comprobar la operación de compuertas logicas AND y OR con base en las tablas de valores de verdad correspondientes. [2]
- Valorar la importancia de la lógica matemática básica operada a través de circuitos con diodos semiconductores. [3]

Dadas sus propiedades, de ser conductor en polarización directa y no conductor en polarización inversa, un uso muy práctico que tienen los diodos semiconductores es en la configuración de un circuito lógico de tipo compuerta OR y AND (O e Y). Aunque no es el propósito de este libro estudiar en detalle el funcionamiento de este tipo de circuitos, se tocará el tema con un enfoque de carácter general.

Una compuerta lógica simple es una configuración[1] con dos entradas cuyos estados pueden ser sólo dos: encendido/apagado, (*activado/desactivado*) y a los que convencionalmente se les asignan los siguientes valores numéricos 1 y 0, respectivamente. Se les llama *estados lógicos*. La salida puede tener también uno de los mismos posibles estados lógicos. Dependiendo de la configuración que guarden los elementos que conforman a la compuerta puede tratarse de diversos tipos de *compuertas*. A continuación veremos, como ejemplo de aplicación de los diodos, dos tipos de los más utilizados en ciencias de la computación y en la electrónica: la compuerta OR y la compuerta AND; en un curso de circuitos digitales se estudian más a detalle diversos tipos de compuertas lógicas.

7.2.1 Compuerta lógica OR

Por su operación corresponde a una función lógica de *disyunción;* esto es, el sistema selecciona *una entrada,* o *la otra* o *las dos entradas* para *enviarlas* a la salida. Esto puede representarse mediante un sencillo diagrama simbólico como el que muestra la figura 7.16*a*. En este diagrama se representan dos caminos o vías, por donde pueden introducirse

[1] La configuración puede ser un circuito neumático, eléctrico o electrónico, y su operación consiste en *analizar* el estado lógico de las dos entradas y *seleccionar* el tipo de salida que corresponde.

las señales de *entrada A* y *B;* en cada vía existe un *puente* de paso, que puede estar abierto o cerrado; es decir, podrá pasar la señal o no, dependiendo de la posición del *puente*. Observa el esquema de la figura 7.16*a* y deduce si hay paso por la vía de la señal *A*, ésta podrá llegar hasta el punto de salida (*X*); lo mismo para la señal *B*.

Si el estado de un puente (que llamaremos estado lógico), se representa por:

1 = cerrado (sí hay paso)
0 = abierto (no hay paso)

y se analizan las posibles combinaciones de estados para los puentes de ambas vías, se obtiene un resumen de datos como el mostrado en la figura 7.16*b*; a éste se le conoce como *tabla de valores lógicas* de la compuerta tipo OR.

En el caso de compuertas lógicas electrónicas, los dispositivos que abren o cierran el paso de una señal eléctrica, son elementos semiconductores con configuraciones tan sencillas como tener sólo dos diodos, o ser tan completas y variadas con una gran cantidad de dispositivos, además de los diodos. Un circuito simple con dos diodos configurando una compuerta lógica tipo OR se muestra en la figura 7.16*c*. Las señales de entrada están dadas por los valores de los voltajes V_1 y V_2, la salida, por la presencia de un voltaje V_0. Supón que los diodos son de silicio ($V_T = 0.7$ V). Si se hace $V_1 = V_2 = 0$ V, ambos diodos estarán desactivados, no habrá corriente alguna circulando ($I = 0$ mA) a través del circuito y el voltaje en la R será cero, por tanto, $V_0 = 0$ volts.

Si $V_1 = 5$ V y $V_2 = 0$ V, el diodo D_1 estará activado mientras que D_2 está desactivado. A través de R habrá una corriente $I = \dfrac{V_1 - V_{T1}}{R}$, y por tanto, una caída de voltaje, cuyo valor deberá ser aproximadamente $V_0 = 4.3$ V. Si $V_1 = 0$ V y $V_2 = 5$ V, el diodo D_1 estará desactivado mientras que D_2 está activado; se presentará una situación similar a la anterior. Cuando $V_1 = V_2 = 5$ V, ambos diodos estarán activados, permitiendo el paso de corriente hasta el resistor de carga, así que $V_0 = 4.3$ V. Se puede resumir esto mediante una tabla de valores, como la que muestra la tabla 7.2.

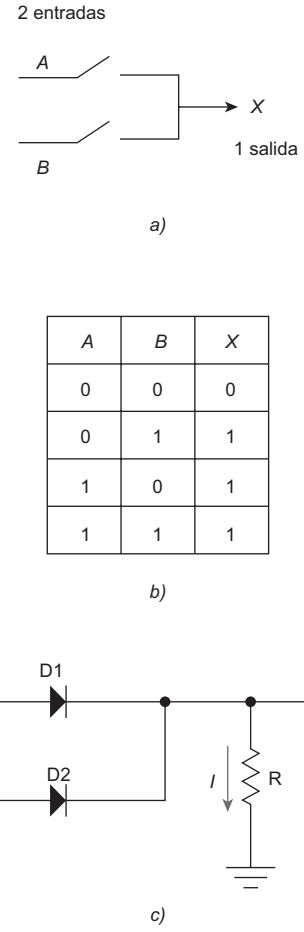


Figura 7.16 Compuerta lógica tipo OR. *a*) Representación esquemática. *b*) Tabla de valores lógicos. *c*) Diagrama electrónico.

Tabla 7.2 Comportamiento o respuesta de un circuito lógico con dos diodos en configuración OR.

Entrada A [V_1 (V)]	Entrada B [V_2 (V)]	Salida X [V_0 (V)]
0	0	0
5	0	4.3
0	5	4.3
5	5	4.3

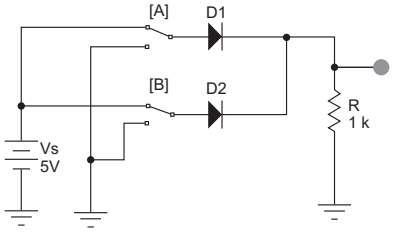


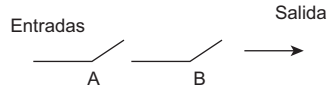
Figura 7.17 Simulación de una compuerta lógica de tipo OR con diodos.

Los datos de la tabla 7.2 se interpretan así: cuando V_1 y V_2 valen 0 V se trata de un estado lógico 0 (desactivado); si V_1 y V_2 valen 5 V, se trata de estados lógicos 1 (activado). Si $V_0 = 0$ V, la salida de la compuerta corresponde a una estado lógico 0 (desactivado); si $V_0 = 4.3$ V, la salida estará en estado lógico 1 (activado). De esta manera, los datos coinciden con los de la figura 7.16*b*.

Al hacer la simulación del circuito electrónico de la figura 7.16*c*, se tiene un arreglo como el de la figura 7.17. Se ha intercalado un bulbo luminoso (gris claro), como indicador de presencia de señal en la salida. Cuando el indicador enciende se interpreta como un estado lógico 1, mientras que apagado corresponde a un 0. Al accionar los interruptores identificados con las letras "A" y "B" se pueden hacer las cuatro posibles combinaciones que presenta la tabla de valores lógicos de la figura 7.16*b*.

7.2.2 Compuerta lógica AND

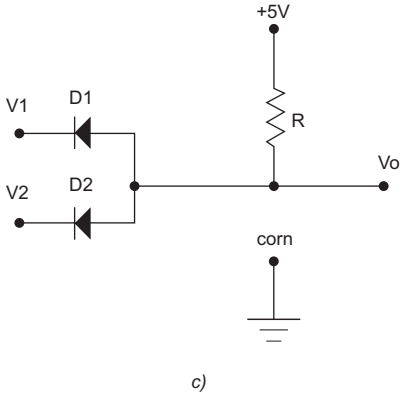
Por su operación corresponde a una función lógica de *conjunción*; esto es, el sistema selecciona *una y otra* entradas para *enviar* a la salida una sola señal. Esto puede representarse mediante un sencillo diagrama simbólico como el que muestra la figura 7.18*a*. En este diagrama se representa *un* camino, que corresponde a la única vía para las dos señales de *entrada A* y *B*, que en seriación proporciona la *salida X*. Habrá señal a la salida cuando los dos *puentes* estén en posición de permitir el paso de cualquier señal. Con uno o los dos que estén interrumpidos, no habrá señal en la salida. Si se analizan las posibles combinaciones de estados lógicos se obtiene un resumen de datos como el mostrado en la figura 7.18*b*; a éste se le conoce como *tabla de valores lógicos* de la compuerta tipo AND. En la figura 7.18*c* se presenta el circuito electrónico con dos diodos, cuya operación es la siguiente:



a)

A	*B*	*X*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

b)



c)

Figura 7.18 Compuerta lógica tipo AND. *a*) Representación esquemática. *b*) Tabla de valores lógicos. *c*) Circuito electrónico con dos diodos.

Las señales de entrada están dadas por los valores de los voltajes V_1 y V_2, la salida, por la presencia de un voltaje V_0, y se tiene una fuente de 5 V cuyo positivo está conectado al ánodo de ambos diodos. Supón que los diodos son de silicio ($V_T = 0.7$ V). Si se hace $V_1 = V_2 = 0$ V (cátodo conectado al común o tierra), ambos diodos estarán polarizados directamente y habrá un voltaje $V_0 = 0.7$ V. La corriente en R será $I = \dfrac{5\text{ V} - 0.7\text{ V}}{R}$, la cual se dividirá en dos partes iguales, una para la rama de cada diodo.

Si $V_1 = +5$ V y $V_2 = 0$ V, el diodo D_1 estará desactivado mientras que D_2 está activado. A través de R habrá una corriente $I = \dfrac{5\text{ V} - 0.7\text{ V}}{R}$, y por tanto, una caída de voltaje, cuyo valor deberá ser aproximadamente $V_0 = 0.7$ V. Si $V_1 = 0$ V y $V_2 = +5$ V, el diodo D_1 estará desactivado mientras que D_2 está activado; se presentará una situación similar a la anterior, con una salida de $V_0 = 0.7$ V. Cuando $V_1 = V_2 = 5$ V, ambos diodos estarán desactivados (abiertos), no hay corriente en el circuito, así que el voltaje $V_0 = 5$ V. Se puede resumir esto mediante una tabla de valores como la que muestra el tabla 7.3.

Tabla 7.3 Comportamiento o respuesta de un circuito lógico con dos diodos en configuración AND.

Entrada A [V_1 (V)]	Entrada B [V_2 (V)]	Salida X [V_0 (V)]
0	0	0.7
5	0	0.7
0	5	0.7
5	5	5

Los datos de la tabla 7.3 se interpretan así: cuando V_1 y V_2 valen 0 V se trata de entradas con un estado lógico 0 (desactivado); si V_1 y V_2 valen 5 V, las señales de entrada serán de estados lógicos *1* (activado). Si $V_0 = 0.7$ V, la salida de la compuerta corresponde a una estado lógico 0 (desactivado); si $V_0 = 5$ V, la salida estará en estado lógico 1 (activado). De esta manera, los datos coinciden con los de la figura 7.18*b*.

Al hacer la simulación del circuito electrónico de la figura 7.18*c*, se tiene una imagen como la que muestra la figura 7.19. Se ha intercalado un voltímetro como indicador de presencia de señal en la salida. En la imagen se tiene a las dos entradas y a la salida en estado lógico 1.

Se recomienda al lector hacer la simulación de los circuitos de las dos compuertas estudiadas y comprobar la tabla de valores lógicos en cada caso.

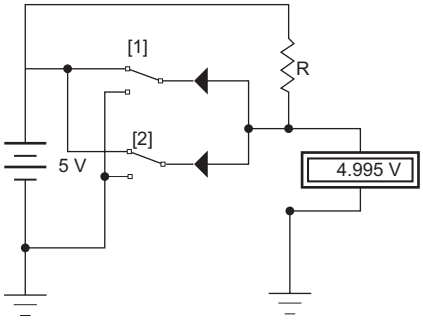


Figura 7.19 Imagen que presenta un simulador de circuitos para la configuración de una compuerta lógica de tipo AND con diodos.

7.3 Rectificador de media onda

El rectificador es uno de los circuitos básicos en los sistemas electrónicos (junto con el amplificador y el oscilador). En términos generales su función es convertir una señal alterna en corriente directa, figura 7.20; la mayoría de las veces, la señal a rectificar es una senoidal. Existen dos tipos de rectificadores con diodos, el de media onda y el de onda completa.

El rectificador de media onda es aquel que al hacer la conversión de ca a cd, por cada ciclo que se tiene a la entrada entrega a la salida solo ½ ciclo. El circuito es muy sencillo y es como el que muestra la figura 7.21. La señal de entrada (V_i) es un voltaje senoidal cuyos valores son positivos para $0 < t < ½T$, y son de signo negativo para $½T < t < T$. Esta señal se aplica a la terminal positiva (ánodo) del diodo *D*, por lo que el semiciclo positivo polariza directamente al diodo, mientras que el semiciclo negativo lo hace inversamente.

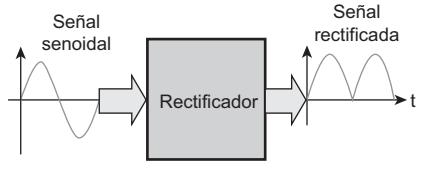


Figura 7.20 Representación esquemática de un rectificador.

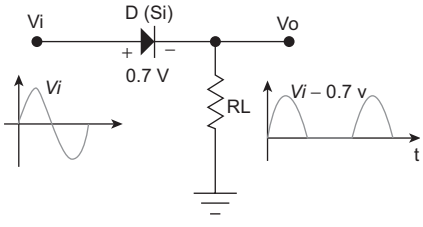


Figura 7.21 Circuito rectificador de media onda.

COMPETENCIAS:

- Comprender el funcionamiento de un diodo semiconductor en el proceso de rectificación de media onda de una señal. [1]
- Comprender el concepto de voltaje de trancición en un circuito rectificador con base en diodos semiconductores. [1]
- Comprender los conceptos sizo y factor derizo en una señal. [2]
- Analizar un circuito rectificador de media onda que opera con base en un diodo semiconductor. [2]
- Calcular el factor derizo de una señal rectificada. [2]
- Evaluar la calidad de un circuito rectificador con base en el valor del factor derizo de la señal rectificada. [2]

Esto quiere decir que para los valores positivos de V_i, el diodo estará en estado de conducción, permitiendo que la corriente circule hasta llegar a la resistencia R_L (carga); provocando una caída de voltaje (V_L), cuyos valores varían en el tiempo de la misma manera que varían los valores de V_i.

Los valores negativos de V_i hacen que el diodo quede desactivado; no permite el paso de la corriente y por tanto no hay caída de voltaje en la carga (R_L). El resultado es una señal senoidal rectificada en media onda, de ahí el nombre de este circuito.

Debido a la caída de voltaje que hay en la unión del diodo, la amplitud de la señal rectificada será

$$V_0 = V_i - V_T \qquad \text{(ecuación 7.1)}$$

Del segundo miembro de la ecuación 7.1 se pueden tener tres posibles combinaciones de valores, dando cada una de ellas diferente resultado:

a) $V_i > V_T$. Se tendrá un $V_o > 0$ (positivo).
b) $V_i = V_T$. Se tendrá un $V_o = 0$ (no hay voltaje de salida)
c) $V_i < V_T$. Se tendrá un $V_o < 0$ (negativo)

Debes observar que en la entrada, para $V_i = V_T$ es cuando se presenta la alternancia de una polaridad a otra, de positivo a negativo y viceversa. A este valor de V_i se le llama entonces *voltaje de transición,* figura 7.21.

El voltaje de salida del rectificador es variable en el tiempo, también de forma senoidal y efectivamente no se aprovecha el semiciclo completo, debido precisamente al voltaje de transición que es un voltaje que se opone a los valores positivos de V_i que tienden a polarizar directamente al diodo. De ahí entonces, que existan pequeños intervalos de tiempo Δt del semiciclo positivo que no se obtienen a la salida, lo que explica la ecuación 7.1.

Si le llamamos V_p a la amplitud del voltaje rectificado tendremos entonces que

$$V_p = V_m - V_T \qquad \text{(ecuación 7.2)}$$

donde se le está llamando V_m a la amplitud de V_i y V_T al voltaje de umbral del diodo.

Si a la salida del rectificador se aplica un voltímetro de cd, éste registrará un voltaje de cd cuyo valor equivale a

$$V_{cd} = 0.318\ V_p \qquad \text{(ecuación 7.3)}$$

valor que corresponde al *promedio* de los valores instantáneos del voltaje rectificado. Esto significa que si la señal *rectificada* se utiliza para alimentar a una carga de cd (por ejemplo un motor de cd provocará en éste el mismo efecto que provocaría una fuente de cd cuyo valor fuera de 0.318 V_p).

Si a la salida del rectificador se aplica un voltímetro de ca, éste registrará un voltaje *rms* cuyo valor equivale a

$$V_{rms} = 0.385\ V_p \qquad \text{(ecuación 7.4)}$$

valor que corresponde al *promedio cuadrático* de los valores instantáneos del voltaje rectificado. Esto significa que si la señal *rectificada* se utiliza para alimentar a una carga de ca (por ejemplo un motor de ca) provocará en éste el mismo efecto que provocaría una fuente de ca (cuyo valor fuera de 0.385 V_p).

EJEMPLO 7.6

Supón que en la figura 7.22 se tiene un voltaje de entrada al rectificador de media onda dado por $V_i = 6$ sen $377t$ volts. ¿Qué voltaje medirá en la resistencia de carga (R_L) un voltímetro de cd? ¿Qué voltaje registrará uno de ca? Comprueba tu resultado mediante una simulación del circuito.

Solución
Datos:

$V_i = 6$ sen 377 t volts
$\omega = 377$ rad/s
$V_T = 0.7$ V
$V_{cd} = ?$
$V_{rms} = ?$

Planteamiento:

Según los datos y el planteamiento del problema bastará con aplicar las ecuaciones 7.2, 7.3 y 7.4.

Desarrollo:

La amplitud de la señal de entrada es $V_m = 6$ V, entonces un valor pico de la señal rectificada será:

$$V_p = V_m - V_T = 6\text{ V} - 0.7\text{ V} = 5.3\text{ V}$$

A partir de este valor pueden aplicarse las ecuaciones 7.3 y 7.4.

$$V_{cd} = 0.318\ V_p = 0.318\ (5.3\text{ V}) = 1.685\ V_{cd}$$
$$V_{rms} = 0.385\ V_p = V_{rms} = 0.385\ (5.3\text{ V}) = 2.04\ V_{rms}$$

Para comprobar los resultados se procede a la simulación del circuito obteniéndose una imagen como la figura 7.23.

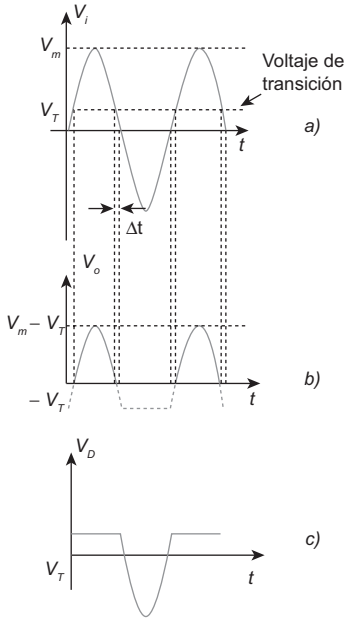


Figura 7.22 Formas de señales en el rectificador de media onda. *a*) Voltaje de entrada. *b*) Voltaje en la carga R_L. *c*) Voltaje en el diodo.

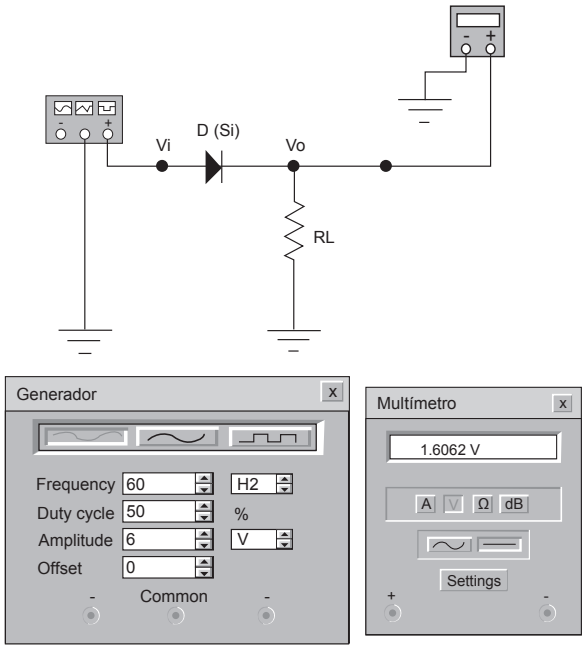


Figura 7.23 Imagen que proporciona el simulador de circuitos para el rectificador de media onda del ejemplo 7.6.

Aunque la señal rectificada de media onda es un voltaje de cd (ya que no presenta alternancias en su polaridad, pues no presenta voltajes negativos), tiene variaciones en sus valores instantáneos; es una señal pulsante de media onda. Si el propósito de un rectificador es convertir una señal de ca en cd, éste se ha logrado, sólo faltaría determinar con qué nivel de eficiencia o también la desviación que ha tenido el proceso. Esto se obtiene calculando el *factor de rizo* de la señal, que es un porcentaje de las variaciones de los valores respecto al valor esperado, se calcula según la siguiente ecuación:

$$r(\%) = \frac{V_{rms}}{V_{cd}} \times 100 \qquad \text{(ecuación 7.5)}$$

Por ejemplo, el factor de rizo del rectificador del ejemplo 7.6 es:

$$r(\%) = \frac{V_{rms}}{V_{cd}} \times 100 = \frac{2.04\,\text{V}}{1.685\,\text{V}} \times 100 = 121\,\%$$

Este porcentaje nos dice que aun cuando este rectificador ya opera como una fuente de alimentación de cd, la calidad de la señal que entrega aún deja qué desear respecto a lo que sería un voltaje de cd sin variaciones. En secciones posteriores se verá cómo puede disminuirse el factor de rizo.

Si el diodo del circuito rectificador de la figura 7.22 se invierte en su posición, el efecto de rectificación será el "complemento" del ejemplo 7.6. Esto quiere decir que seguirá siendo un rectificador de media onda, sólo que al invertirlo, los semiciclos positivos ahora lo polarizarán inversamente, y serán los semiciclos negativos los que lo polaricen direc-

tamente y lo coloquen en estado de activado o en conducción. La gráfica correspondiente se presenta en la figura 7.24. Otra variante puede ser que en lugar de cambiar de posición al diodo se invierta la polaridad de la fuente y se tendría un resultado semejante.

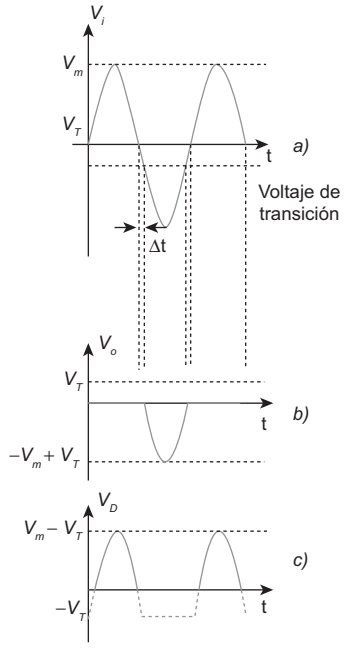


Figura 7.24 Formas de señales en el rectificador de media onda. *a*) Voltaje de entrada. *b*) Voltaje en la carga R_L. *c*) Voltaje en el diodo.

7.4 Rectificador de onda completa

7.4.1 Rectificador con dos diodos

Una variante del rectificador de media onda consiste en aplicar dos diodos en el mismo circuito para aprovechar los dos semiciclos de una señal senoidal de entrada. La sencilla configuración de la figura 7.25 logra este propósito entregando a su salida una señal rectificada como la que muestra la figura 7.26*b*. Este circuito recibe el nombre de *rectificador de onda completa*.

Observa que para $0 < t < \frac{1}{2}T$ a la entrada del circuito se tiene el semiciclo positivo de V_i; es decir, se tiene una polaridad cuyo positivo está aplicado al ánodo de D_1 y el negativo al ánodo de D_2. Esto hace que D_1 tienda a estar polarizado directamente, mientras que D_2 tiende a la polarización inversa. De acuerdo al modelo simplificado del diodo (2a. aproximación), para todo $V_i > V_T$ se tendrá un $V_o > 0$ (positivo), por la corriente que circula a través de D_1, aunque D_2 esté desactivado. La corriente en la carga fluye en un sentido de arriba hacia abajo en el diagrama, produciendo una caída de voltaje cuyo positivo está en el nodo de arriba y el negativo en el común.

Para $\frac{1}{2}T < t < T$ a la entrada del circuito se tiene el semiciclo negativo; es decir, que V_i tiene una polaridad cuyo positivo está aplicado al ánodo de D_2 y el negativo al ánodo de D_1. Esto invierte la situación anterior, hace que D_2 tienda a estar polarizado directamente, mientras que D_1 tiende a la polarización inversa. De acuerdo al modelo simplificado del diodo (2a. aproximación), para todo $V_i < -V_T$ habrá corriente a través de D_2, por estar activado y ésta pasará a la carga en un sentido también de arriba hacia abajo en el diagrama, produciendo nuevamente una caída de voltaje cuyo positivo está en el nodo de arriba y el negativo en el común, un $V_o > 0$ (positivo), como en el semiciclo positivo. De esta manera se está rectificando la señal senoidal completamente; aunque debe hacerse notar que, en realidad no se aprovechan los 180º de cada semiciclo por la oposición que presenta el voltaje de umbral de la unión en cada diodo; esto hace que la onda se "desplace" hacia abajo en la gráfica en una magnitud igual a la del V_T.

El resultado, figura 7.26*b*, es una señal rectificada de onda completa que, aunque no es una línea horizontal recta como tenemos la idea de que debe ser una corriente de cd, realmente lo es, ya que esta señal ahora ya *no tiene alternancias en su polaridad*, sólo presenta voltajes de *valores positivos*; también puede llamarse una señal de cd pulsante. Es de esperarse que el promedio de los valores sea más elevado que en el caso de rectificación de media onda, ya que ahora se han reducido *casi* en 100 % los valores en cero volts.

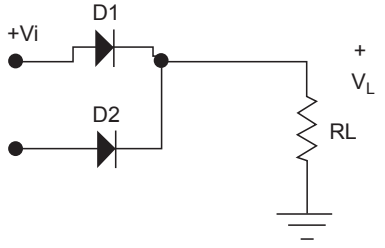


Figura 7.25 Rectificador de onda completa con 2 diodos.

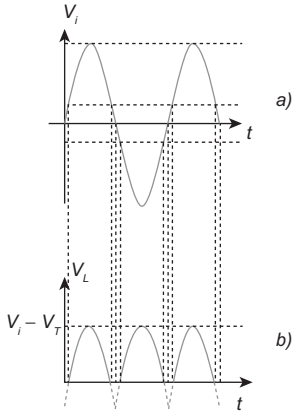


Figura 7.26 Señales en un rectificador de onda completa con 2 diodos. *a*) Entrada (V_i). *b*) Voltaje en la carga (V_L).

COMPETENCIAS:
- Comprender el funcionamiento de un rectificador de onda completa con base en dos diodos. [1]
- Analizar un circuito rectificador onda completa que opera con base en dos diodos. [2]

De igual manera que en una media onda, en la rectificación de onda completa se tienen dos formas de promedio para los valores del voltaje, aquel que puede ser registrado con un voltímetro de cd, al que se le llama voltaje de cd (promedio aritmético de los valores instantáneos), y el que detecta un voltímetro de ca (raíz media cuadrática de los valores instantáneos), llamado voltaje *rms* o voltaje *eficaz*. En términos matemáticos se calculan de la siguiente manera:

$$V_{cd} = 0.636\ V_p \qquad \text{(ecuación 7.6)}$$

$$V_{rms} = 0.308\ V_p \qquad \text{(ecuación 7.7)}$$

donde V_p es la amplitud o voltaje pico de la señal rectificada. El factor de rizo está dado nuevamente por la ecuación 7.5.

EJEMPLO 7.7

Si al circuito de la figura 7.25 se le aplica un voltaje de entrada, igual al que se aplicó en el ejemplo 7.6 ($V_i = 6$ sen 377 t volts). Obtén la forma de señal de la salida, el nivel de voltaje de cd y de ca, así como su factor de rizo.

Solución

Datos:

$V_i = 6$ sen $377t$ volts
$\omega = 377$ rad/s
$V_T = 0.7$ V
$V_{cd} = ?$
$V_{rms} = ?$

Planteamiento:

Según los datos y el planteamiento del problema bastará con aplicar las ecuaciones 7.5, 7.6 y 7.7.

Desarrollo:

La amplitud de la señal de entrada es $V_m = 6$ V, entonces, para el semiciclo positivo, el valor pico de la señal rectificada será:

$$V_p = V_m - V_T = 6\text{ V} - 0.7\text{ V} = 5.3\text{ V}$$

para el semiciclo negativo, el valor pico de la señal rectificada será:

$$V_p = V_m - V_T = 6\text{ V} - 0.7\text{ V} = 5.3\text{ V}$$

A partir de este valor pueden aplicarse las ecuaciones 7.6 y 7.7.

$$V_{cd} = 0.636\ V_p = 0.636\ (5.3\text{ V}) = 3.37\text{ V}_{cd}$$

$$V_{rms} = 0.308\ V_p = 0.308\ (5.3\text{ V}) = 1.632\text{ V}_{rms}$$

El factor de rizo es:

$$r(\%) = \frac{V_{rms}}{V_{cd}} \times 100 = \frac{1.632\ \text{V}}{3.37\ \text{V}} \times 100 = 48.4\ \%$$

La señal que se obtiene a la salida del rectificador de onda completa se presenta en la figura 7.27.

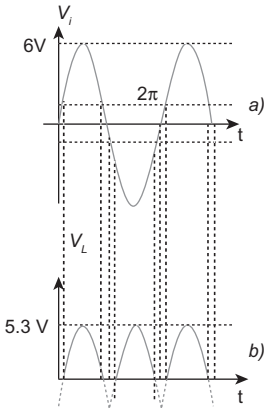


Figura 7.27 Señal en el rectificador de onda completa del ejemplo 7.7. *a*) Señal de entrada. *b*) Señal rectificada de onda completa.

Al comparar los resultados de los ejemplos 7.6 y 7.7 se puede observar que al aplicar la misma señal de entrada a dos circuitos rectificadores distintos, la calidad del rectificador de onda completa con dos diodos es superior a la del rectificador de media onda con un solo diodo. Esto se debe a que en el segundo circuito se elevó el nivel de voltaje de cd, mientras que se disminuyó el nivel de ca (*rms*). Si estos resultados se concentran en una tabla como la tabla 7.4, se puede tener un panorama general de esta comparación y obtener algunas conclusiones al respecto.

Tabla 7.4 Resumen de resultados al comparar la operación de un rectificador de media onda con uno de onda completa, con la misma señal de entrada.

Tipo de rectificador	Total de diodos	V_{cd}	V_{rms}	r(%)
Media onda	1	1.685 V	2.04 V	121%
Onda completa	2	3.37 V	1.632	48.4%

COMPETENCIAS:

- Comprender el funcionamiento de un rectificador de onda completa con base en un puente de cuatro diodos. [1]
- Analizar un circuito rectificador de onda completa que opera con base en un puente de cuatro diodos. [2]

7.4.2 Rectificador con puente de diodos

Una variante del rectificador de onda completa es el que utiliza en su operación 4 diodos distribuidos en una configuración denominada puente de diodos, como se ve en la figura 7.28. Si a esta configuración se le aplica un voltaje senoidal V_i, para $0 < t < \frac{1}{2}T$, los valores de voltaje del semiciclo positivo provocarán que los diodos D_1 y D_3 tiendan a estar polarizados directamente (activados), mientras que D_2 y D_4 lo estarán inversamente (desactivados); por tanto, habrá circulación de cargas fluyendo desde el positivo de la fuente externa, pasando por D_1, luego por R_L, enseguida por D_3 hasta llegar al negativo de la misma fuente. Observa que las ramas donde se ubican D_2 y D_4 están "abiertas". En resumen, habrá una caída de voltaje (V_o) en la carga con su positivo al lado derecho del diagrama y su negativo a la izquierda, ya que la corriente fluye de derecha a izquierda.

Para $\frac{1}{2}T < t < T$, se ha dado la alternancia en la polaridad de V_i, y ahora quedarán polarizados directamente los diodos D_2 y D_4, mientras que D_1 y D_3 quedan desactivados. La corriente fluirá a través de D_4, R_L, D_2 y retornando al negativo de la fuente externa, que ahora estará en

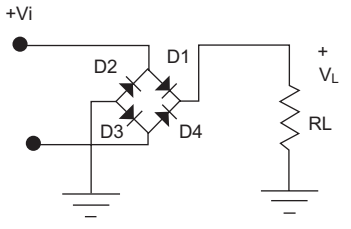


Figura 7.28 Circuito rectificador de onda completa con puente de diodos.

la parte superior del diagrama. Observa que nuevamente la corriente fluye por R_L en un sentido de derecha a izquierda en el diagrama, lo que significa una caída de voltaje de la misma polaridad que en el semiciclo positivo de la señal. Este circuito también aprovecha los dos semiciclos de la señal de entrada, por lo que se constituye en un rectificador de onda completa.

Una importante observación en esta configuración es que en cada semiciclo se tiene una disminución en la amplitud de la señal de salida equivalente a $2V_T$, ya que cada vez la corriente pasa ahora a través de dos diodos. Cabe hacerse la pregunta ¿si se tiene una caída de voltaje del doble que en el rectificador de media onda, cuál sería la ventaja de usar un rectificador con cuatro diodos?

Puesto que la señal de salida del rectificador con puente de diodos es de la misma forma que el de dos diodos, sólo que con una amplitud "menor", los valores de voltaje de cd y *rms*, así como el *factor de rizo* se obtienen de la misma manera en ambos tipos de rectificadores de onda completa.

EJEMPLO 7.8

Obtén la señal de salida para el rectificador de onda completa de la figura 7.28, si utilizas diodos de silicio y aplicas una señal de entrada de $V_i = 6 \text{ sen } 37\,t$ volts. Calcula el factor de rizo.

Solución

Datos:

$V_i = 6 \text{ sen } 377t$ volts
$\omega = 377$ rad/s
$V_T = 0.\ 7$ V
$V_{cd} = ?$
$V_{rms} = ?$

Planteamiento:

Según los datos y el planteamiento del problema bastará con aplicar las ecuaciones 7.5, 7.6 y 7.7, considerando que para cada semiciclo hay una caída de $2V_T$ volts.

Desarrollo:

La amplitud de la señal de entrada es $V_m = 6$ V, entonces, para el semiciclo positivo, el valor pico de la señal rectificada será:

$$V_p = V_m - 2V_T = 6 \text{ V} - 1.4 \text{ V} = 4.6 \text{ V}$$

para el semiciclo negativo, el valor pico de la señal rectificada será:

$$V_p = V_m - V_T = 6 \text{ V} - 0.7 \text{ V} = 4.6 \text{ V}$$

A partir de este valor pueden aplicarse las ecuaciones 7.6 y 7.7.

$$V_{cd} = 0.636\ V_p = 0.636\ (4.6\ \text{V}) = 2.925\ V_{cd}$$
$$V_{rms} = 0.308\ V_p = 0.308\ (4.6\ \text{V}) = 1.416\ V_{rms}$$

El factor de rizo es:

$$r(\%) = \frac{V_{rms}}{V_{cd}} \times 100 = \frac{1.416\ \text{V}}{2.925\ \text{V}} \times 100 = 48.4\ \%$$

Al comparar nuevamente los resultados de los ejemplos 7.6 y 7.7 con el ejemplo 7.8 se puede observar que al aplicar la misma señal de entrada a tres circuitos rectificadores distintos, los resultados cambian; aunque la calidad de los rectificadores de onda completa es superior a la del rectificador de media onda con un solo diodo. Esto se debe a que en los rectificadores de onda completa se elevó el nivel de voltaje de cd, mientras que se disminuyó el nivel de ca (*rms*). Si estos resultados se concentran en una tabla de datos como la tabla 7.5, se puede tener un panorama general de esta comparación y obtener algunas conclusiones al respecto.

Tabla 7.5 Resumen de resultados al comparar la operación de un rectificador de media onda con rectificadores de onda completa, de dos y cuatro diodos, en respuesta a la misma señal de entrada.

Tipo de rectificador	Total de diodos	V_{cd}	V_{rms}	r(%)
Media onda	1	1.685 V	2.04 V	121%
Onda completa (2 diodos)	2	3.37 V	1.632	48.4%
Onda completa (puente de diodos)	4	2.925	1.416	48.4%

En todo circuito rectificador sucede que los diodos están polarizados directamente en un semiciclo e inversamente polarizados en el otro semiciclo de la señal de entrada. La capacidad de todo diodo para soportar un voltaje tanto en una condición como en la otra está limitada por las características de su estructura cristalina y por la cantidad y tipo de impurezas con que haya sido procesado. Es necesario conocer estas especificaciones (dadas por el fabricante) antes de utilizar un diodo en un circuito real para evitar aplicarle algún voltaje que sobrepase su capacidad y evitar su deterioro.

El máximo voltaje de polarización inversa que puede soportar un diodo semiconductor sin que se provoque una corriente de avalancha,

o la ruptura, se denomina *voltaje de pico inverso* (VPI). La magnitud del voltaje de polarización inversa que se le aplica, se aprecia en los semiciclos en que el diodo está "abierto". Simbólicamente puede expresarse como $|-V_p| \leq |\text{VPI}|$. Algunas consideraciones acerca de importantes fenómenos que se dan en la región de polarización inversa se tratarán en la siguiente sección, con el tema del diodo Zener.

7.5 Fuente de alimentación básica

COMPETENCIAS:
- Describir las etapas fndamentales de una fuente de alimentación ed. [1]
- Analizar por etapas el circuito base de una fuente de alimentación de ed. [2]
- Evaluar la calidad de una fuente de alimentación de ed. con base en el factor de rizo de la señalde salida. [3]

Todos los circuitos electrónicos requieren de ser alimentados con energía eléctrica para realizar sus funciones; en su mayoría con una variedad de voltajes, que por lo común van de 1.5 a 40 o 50 volts de cd. Estos voltajes son obtenidos a partir de pilas, o conjunto de pilas (baterías), según la demanda de voltaje y de corriente del sistema por alimentar. Una alternativa, que representa inclusive algunas ventajas sobre las anteriores, es una fuente de alimentación de cd o fuente de potencia, que consiste en un circuito o sistema cuya función es obtener energía eléctrica de ca a partir de la toma de corriente que proporciona la compañía proveedora,[2] y convertirla a un voltaje de cd de menor valor. Estas fuentes de potencia se encuentran integradas a la gran mayoría de sistemas electrónicos como televisores, reproductores de audio, computadoras personales, equipo biomédico, equipo de laboratorio, hornos de microondas, lavadoras y un sin fin de aparatos y equipos electrónicos de uso no sólo en el hogar sino en casi todo tipo de actividad en la actualidad. De allí que *la fuente* viene a representar uno de los más importantes circuitos en los sistemas electrónicos.

La figura 7.29 muestra un diagrama a bloques de las etapas que comprende una fuente de alimentación básica, cuya descripción veremos a continuación.

7.5.1 1a. etapa: transformador

Un transformador es un dispositivo diseñado para transferir energía eléctrica desde un circuito a otro, sin que entre éstos haya una conexión

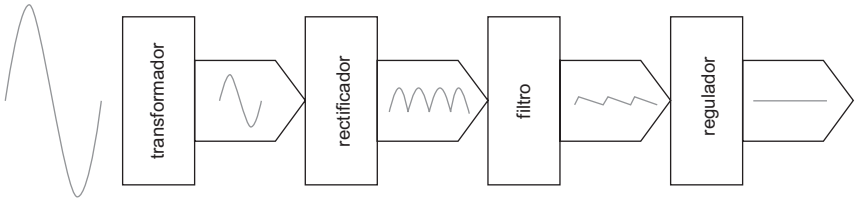


Figura 7.29 Diagrama a bloques de una fuente básica de alimentación.

[2] La compañía proveedora de energía eléctrica en México es la Comisión Federal de Electricidad. Por lo general entrega 110 y 220 V_{rms} a una frecuencia de 60 Hz.

física por contacto; sino que la transferencia se realiza a través de un campo magnético. Tiene además, la capacidad de entregar en sus terminales de salida valores de voltaje y de corriente diferentes a los que recibe en sus terminales de entrada.

Un uso que se les da, muy común, es en los sistemas de distribución de potencia eléctrica, aunque también, con capacidades menores se encuentran en los medidores de ca. En los sistemas electrónicos, los transformadores se encuentran en las fuentes de alimentación.

El funcionamiento de un transformador es con base en el fenómeno conocido como *inductancia mutua*; que es el efecto que se presenta cuando un campo magnético de algún elemento tiene influencia sobre otros elementos de su entorno. El resultado de este fenómeno es que se inducen corrientes y voltajes en dichos elementos; resultados que en muchos sistemas son indeseables.

Las fuentes de poder de los sistemas electrónicos utilizan transformadores reductores para reducir la amplitud de la señal que entrega la compañía proveedora de energía eléctrica, de 117 V_{rms} a un valor que puede ir desde los 5 o 6 V_{rms} hasta los 40 V_{rms} aproximadamente. En el laboratorio de electrónica por lo general se utilizan transformadores reductores de 117 V_{rms} (60 Hz) a 24 V_{rms} (60 Hz), con una o más derivaciones centrales en el secundario (tres o más terminales) con capacidad para soportar intensidades de corriente de 3 A. Transformadores con estas características son económicos, fáciles de encontrar en el mercado y prácticos para su montaje. Un diagrama eléctrico de esta etapa se muestra en la figura 7.30.

7.5.2 2a. etapa: rectificador

La salida del transformador se aplica como señal de entrada a la segunda etapa que es la de rectificación; conformada por un rectificador que bien puede ser de media onda o de onda completa con dos o cuatro diodos. Esta señal es senoidal de 60 Hz con amplitud disminuida respecto a la ca que se tiene a la entrada de la fuente. La magnitud de esta amplitud se calcula a partir del voltaje 24 V_{rms}:

$$A_o = (24\ \text{V})\sqrt{2} = 33.941\ V_p$$

Éste es el voltaje pico o V_m que tendrá la señal que va a ser rectificada.

Si la fuente considerada opera con un puente de diodos, entregará a la salida de la 2a. etapa un voltaje rectificado en onda completa con una amplitud V_p de

$$V_p = V_m - 2V_T = 33.941\ \text{V} - 2(0.7\ \text{V})$$
$$V_p = 32.541\ \text{V}_p$$

Además de tener una ligera disminución en su amplitud, la señal rectificada ahora tiene una frecuencia del doble de la original (periodo reducido a la mitad); ahora su frecuencia es 120 Hz (T = 1/120 Hz), dado que cada *semiciclo* de la señal senoidal ahora conforma *un ciclo*

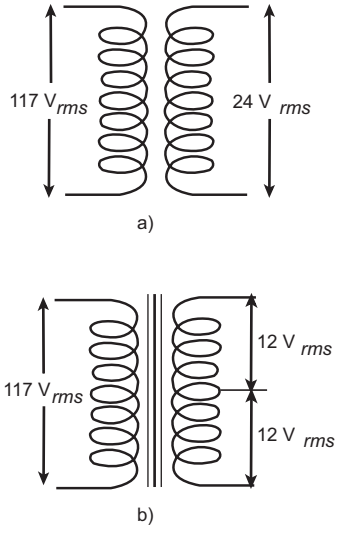


Figura 7.30 *a*) Transformador con núcleo de aire. *b*) Con núcleo de hierro y derivación central en el secundario.

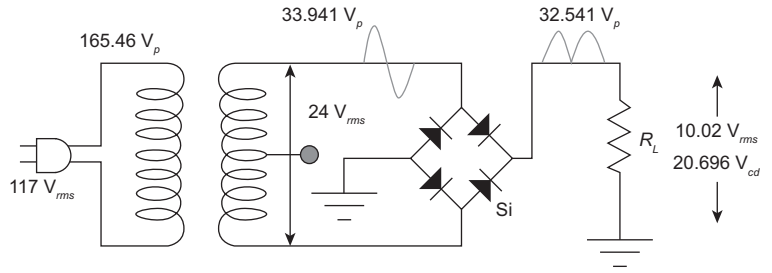


Figura 7.31 Diagrama simbólico de las etapas transformador y rectificador, para una fuente básica de poder con carga R_L.

para la señal rectificada, figura 7.31. Este voltaje rectificado se aplica a la siguiente etapa, que es la de filtro.

7.5.3 3a. etapa: filtro

La salida de un rectificador de onda completa presenta un factor de rizo de 48% aproximadamente; en la etapa de filtrado se busca disminuir la magnitud de este rizo para llevarla hasta a 5 o 6 % máximo. Esta operación se logra utilizando uno o varios capacitores. Asume que se trata de un filtro con un capacitor, como se ilustra en la figura 7.32.

Al conectar un capacitor C en paralelo con la resistencia de carga R_L se ha conformado un circuito RC a la salida del rectificador, cuya constante de tiempo está dada por la ecuación:

$$\tau = R_L C \qquad \text{(ecuación 7.8)}$$

Como el tiempo de carga (o de descarga) de un circuito RC es de aproximadamente 5τ, se buscará usar un capacitor cuyo valor permita que el tiempo de descarga sea *mayor* que la duración de un ciclo de la señal rectificada. Esto es $5\tau > 1/120$ Hz, es decir $5\tau > 8.333$ ms. Por ejemplo, si se tiene una resistencia de carga de 1 kΩ y se elige un capacitor de 47 μF, se obtendrá una constante de tiempo $\tau = (1\ \text{k}\Omega)(47\ \mu\text{F}) = 47$ ms; por lo que $5\tau = 235$ ms.

El hecho de tener un tiempo de descarga de la sección RC mucho mayor que la duración de un ciclo de la señal rectificada de onda completa es con el propósito de no permitir que el capacitor C tenga tiempo

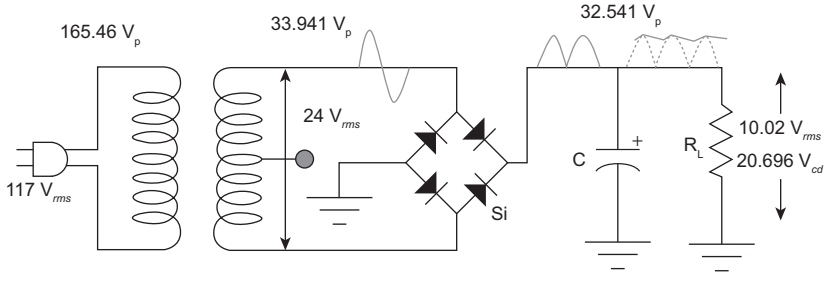


Figura 7.32 Diagrama simbólico de las etapas transformador rectificador y filtro, para una fuente básica de poder con carga R_L.

para *descargarse totalmente* en ningún momento. Cada 8.333 ms, se está *recargando* hasta un valor máximo de 32.541 V_p que es el voltaje pico de la señal rectificada, como se aprecia en la figura 7.33. Esto significa que el voltaje en el capacitor, y por consecuencia en la R_L que está en paralelo con éste, variando en un rango de valores, dando por resultado un voltaje de pico a pico (V_{pp}), cuyo máximo está dado por la amplitud de la señal rectificada (V_p). Se trata de un nuevo voltaje de rizo, cuya forma de onda se comporta como si fuera una señal triangular.

Los valores que ahora tiene el voltaje de rizo de una señal rectificada y filtrada están dados por las siguientes ecuaciones:

El voltaje de rizo de pico a pico es:

$$V_{r(pp)} = \frac{I_{cd}}{fC}\,\frac{V_{cd}}{V_p} \qquad \text{(ecuación 7.9)}$$

En la cual $V_{r(pp)}$ es el voltaje de rizo de pico a pico.

I_{cd} = intensidad de corriente cd en la carga.
$V_{cd} \Rightarrow$ voltaje de cd en la carga.
$V_p \Rightarrow$ voltaje pico (amplitud de la señal rectificada).
$f \Rightarrow$ frecuencia de la señal rectificada.
$C \Rightarrow$ capacitancia del capacitor.

Como el voltaje *rms* de una señal triangular es $\frac{A_o}{\sqrt{3}}$, y también se sabe que la amplitud es ½ del voltaje de pico a pico, se tiene que

$$V_{rms} = \frac{A_o}{\sqrt{3}} = \frac{V_{r(pp)}}{2\sqrt{3}} \qquad \text{(ecuación 7.10)}$$

El voltaje de cd es el promedio aritmético del *voltaje de rizo de pico a pico*; o sea:

$$V_{cd} = V_p - \frac{1}{2}\,V_{r(pp)} \qquad \text{(ecuación 7.11)}$$

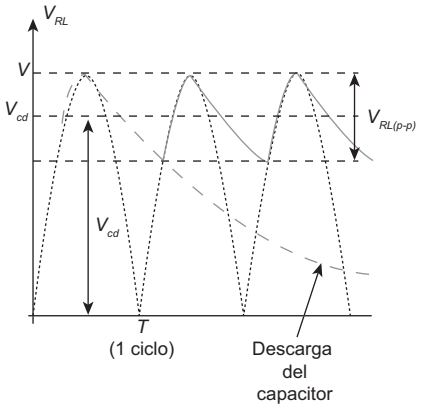


Figura 7.33 Voltaje de salida de un filtro capacitivo.

EJEMPLO 7.9

Calcula el factor de rizo a la salida de la fuente de la figura 7.32, si el voltaje de pico después del rectificador es de 32.541 V y la corriente en la resistencia de carga es de 120 mA cuando el filtro es un capacitor de 470 µF.

Solución

Datos:

$C = 470\ \mu\text{F}$
$r = ?\,\%$
$V_p = 32.541\ \text{V}$

Planteamiento:

No se tienen datos ni elementos suficientes para encontrar el voltaje de cd aplicando las ecuaciones de la 7.9 a 7.11. Sin embargo, el valor

del capacitor hace pensar que el rizo deberá ser de tal magnitud que pueda utilizarse la hipótesis de que el voltaje de cd sea igual al voltaje de pico.

Desarrollo:

Hipótesis: $V_{cd} = V_p$

El factor de rizo es $r(\%) = \dfrac{V_{r(rms)}}{V_{cd}}$, por tanto debemos determinar ambos tipos de voltaje en la fuente.

El voltaje *rms* puede determinarse a partir de la ecuación 7.10, por lo que antes debemos determinar el voltaje de pico a pico. Éste puede encontrarse a partir de la ecuación 7.9, la cual, al considerar la hipótesis planteada queda expresada de la siguiente manera:

$$V_{r(pp)} = \frac{I_{cd}}{fC} \text{ (1)}$$

Al sustituir valores en esta expresión se tiene:

$$V_{r(pp)} = \frac{0.12 \text{ A}}{(120 \text{ Hz})(470 \mu\text{F})} \text{ (1)} = 2.127 \ V_{pp}$$

Al sustituir este valor en la ecuación 7.10:

$$V_{rms} = \frac{2.127 \text{ V}}{2\sqrt{3}} = 0.614 \text{ V}.$$

Ahora se puede calcular el voltaje de cd, según la ecuación 7.11:

$$V_{cd} = 32.541 \text{ V} - \frac{1}{2}(2.127 \text{ V}) = 31.477 \text{ V}$$

Con estos valores se puede determinar el factor de rizo:

$$r(\%) = \frac{V_{r(rms)}}{V_{cd}} = \frac{0.614 \text{ V}}{31.477 \text{ V}} \times 100 = 2.03\%.$$

7.5.4 4a. etapa: regulador

El factor de rizo existente a la salida de la etapa de filtro puede disminuirse aún más, hasta llevarlo a valores menores de 0.1%, o prácticamente 0% mediante el proceso de regulación de voltaje, que consiste en *alisar* casi, o completamente, la señal filtrada. Existen varias formas de regular la señal, utilizando dispositivos semiconductores como transistores, circuitos integrados, o también diodos Zener.

Regulador con diodo Zener

Cuando se vio el diodo Zener quedó asentado que este dispositivo opera en polarización inversa, y es capaz de conducir una corriente de avalancha una vez que ha alcanzado cierto valor de voltaje de polarización denominado precisamente el voltaje Zener (V_Z). Valores de magnitud menores que V_Z mantienen al diodo en estado de no conducción, mien-

tras que V_Z lo convierte en conductor. Los voltajes de polarización inversa con magnitudes mayores que V_Z, no modifican el voltaje en las terminales del dispositivo; es decir, éste fija dicho valor para cualquier voltaje de polarización inversa de magnitud mayor que V_Z. De ahí que, aun cuando el voltaje de polarización inversa tenga variaciones, el diodo mantiene el V_Z en sus terminales. Es por esta característica que el dispositivo se utiliza para funciones de regulación de voltaje.

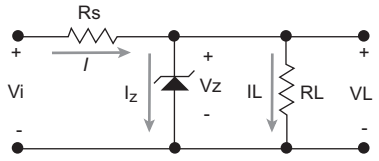


Figura 7.34 Circuito regulador de voltaje con diodo Zener.

Si a la salida de la sección de filtro se conecta un diodo Zener (polarizado inversamente), éste fijará el voltaje en sus terminales al valor del V_Z del dispositivo, mientras $V_{cd} > V_Z$. El voltaje a la salida del *regulador* permanece constante, inclusive cuando la resistencia de carga de salida varíe en cierto intervalo y cuando el voltaje de entrada al regulador varíe en un determinado rango. El circuito regulador de voltaje con diodo Zener se ve en la figura 7.34. En esta figura se le llama V_i al voltaje que entra a la sección regulador, y V_L al voltaje en la carga. R_S es una resistencia limitadora de la corriente I, y se utiliza para protección del diodo y la carga.

Para saber si los valores de los elementos que integran al circuito regulador son los apropiados, primero debes determinar el estado del Zener (conducción o no conducción); para esto, utilizando la estrategia de "ocultar" el diodo, como se hizo con los rectificadores, se supone al diodo Zener como no existente y se sustituye por un circuito abierto en el cual debe haber un voltaje V. Si $V \geq V_Z$, el Zener se encuentra en estado de conducción o "encendido"; si $V < V_Z$, entonces el dispositivo estará en no conducción o "apagado".

Si el diodo Zener se encuentra en estado de conducción o "encendido" se procede a hacer el análisis del circuito en cd, como sigue:

En la figura 7.34 se observa un divisor de voltaje para V_i, de manera que hay una caída de voltaje en R_S y otra en R_L.

$$V = V_L = \frac{R_L V_i}{R_S + R_L} \qquad \text{(ecuación 7.12)}$$

En estado de conducción del diodo Zener, por éste circulará una corriente:

$$I_Z = I - I_L \qquad \text{(ecuación 7.13)}$$

Y estará absorbiendo una potencia

$$P_Z = V_Z I_Z \qquad \text{(ecuación 7.14)}$$

La resistencia de carga es variable y el voltaje de entrada es fijo

La resistencia de carga puede variar dentro de cierto rango de valores, cuando se tiene un voltaje fijo V_i a la entrada al regulador. Por ley de Ohm esto hace que se tenga también un rango de variación para la corriente en la carga, y según la ecuación 7.13, repercute en variaciones en la corriente del Zener; asimismo provocará variaciones en la potencia que absorbe el dispositivo. Es importante, entonces, determinar los valores máximo y mínimo que deberá tener una resistencia de carga para

cada diodo Zener que se aplique como regulador de voltaje, a efecto de que éste opere dentro de los rangos determinados por el fabricante. Al hacer el análisis en la red se puede encontrar que el valor mínimo de la carga es

$$R_{Lmín} = \frac{R_S V_Z}{V_i - V_Z} \qquad \text{(ecuación 7.15)}$$

Mientras que la carga máxima está dada por

$$R_{Lmáx} = \frac{V_Z}{I_{Lmín}} \qquad \text{(ecuación 7.16)}$$

EJEMPLO 7.10

Encuentra el rango de valores para R_L en el circuito regulador de la figura 7.35, si $R_S = 100\ \Omega$ y se utiliza un diodo Zener con $V_Z = 20$ V e $I_{zmáx} = 100$ mA. Se aplica un voltaje a la entrada de $V_i = 32$ V.

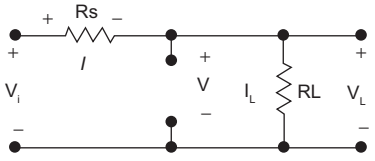


Figura 7.35 Esquema del estado del diodo Zener.

Solución
Datos:

$R_S = 100\ \Omega$
$V_Z = 20$ V
$I_{zmáx} = 100$ mA
$V_i = 32$ V
$R_L = ?$

Planteamiento:

Cuando en la carga se tenga $R_{Lmín}$ estará circulando por ella corriente máxima (por ley de Ohm), y según la ecuación 7.13 (ley de Kirchhoff de corrientes), por el diodo Zener estará circulando la corriente mínima que mantendrá a la salida del regulador un $V_L = 20$ V.

Cuando en la carga se tenga $R_{Lmáx}$ estará circulando por ella corriente mínima (por ley de Ohm), y según la ecuación 7.13 (ley de Kirchhoff de corrientes), por el diodo Zener estará circulando la corriente máxima que mantendrá a la salida del regulador un $V_L = 20$ V.

Desarrollo:

Mediante un divisor de voltaje para V_i se puede ver que si en R_L debe haber $V_L = 20$ V, en R_S debe haber

$$V_{RS} = V_i - V_L = 32\text{ V} - 20\text{ V} = 12\text{ V}$$

Entonces la corriente total que hay en el regulador es:

$$I = \frac{V_{Rs}}{R_S} = \frac{12\text{ V}}{100\ \Omega} = 120\text{ mA}$$

En el caso de que $I_Z = 0$ mA, significa que toda la corriente I circula por R_L ($I_{Lmáx}$); entonces en la carga hay una resistencia mínima de

$$R_{Lmín} = \frac{V_{RL}}{I_{Lmáx}} = \frac{20\text{ V}}{120\text{ mA}} = 166\ \Omega.$$

La corriente mínima que circulará por la carga será cuando por el diodo Zener circule $I_{Zmáx}$= 100 mA, por tanto, en la carga habrá:

$$I_{Lmín} = I - I_{Zmáx} = 120\text{ mA} - 100\text{ mA} = 20\text{ mA}$$

Una corriente será mínima cuando la resistencia sea máxima y el voltaje a la salida se mantenga en VL= 20 V, entonces

$$R_{Lmáx} = \frac{V_{RL}}{I_{Lmín}} = \frac{20\text{ V}}{20\text{ mA}} = 1000\ \Omega.$$

En resumen, para que se mantenga un voltaje de $V_L = 20$ V a la salida del rectificador se requiere que la resistencia de carga se encuentre dentro de un rango de valores comprendido en $R_{Lmín} \leq R_L \leq R_{Lmáx} \Rightarrow$ $166\ \Omega \leq R_L \leq 1\ \text{k}\Omega$.

Del resultado obtenido en el ejemplo 7.10 puede elaborarse una gráfica para R_L como la que muestra la figura 7.36.

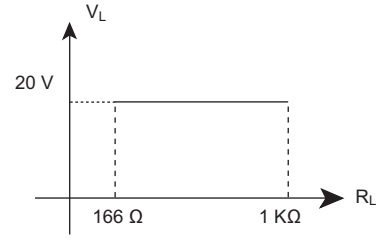


Figura 7.36 Gráfica para valores de R_L que mantienen un voltaje de 20 V a la salida del rectificador del ejemplo 7.10.

La resistencia de carga es fija y el voltaje de entrada es variable

Tomemos ahora otro caso, cuando la resistencia de carga es de valor fijo, pero el voltaje de entrada al circuito regulador está variando dentro de cierto rango. Por ley de Ohm esto hace que se tenga también un rango de variación para la corriente en el circuito, y esto repercute en variaciones en la corriente del Zener; asimismo provocará variaciones en la potencia que absorbe el dispositivo. Es importante, entonces, determinar los valores máximo y mínimo que deberá tener el voltaje de entrada al circuito para cada diodo Zener que se aplique como regulador de voltaje que alimenta a una carga de valor conocido y fijo, a efecto de que éste opere dentro de los rangos especificados por el fabricante.

Considerando nuevamente que hay un divisor de voltaje en el circuito regulador, si V_i es tan pequeño que no alcance a proporcionar al diodo Zener el voltaje V_Z, que sea capaz de activarlo, la carga no tendrá el voltaje V_L requerido. Y si por el contrario, el V_i es superior a un límite máximo aceptado, puede provocar un excedente de corriente en el diodo Zener y perjudicarlo. Entonces se requiere que $V_{imín}$ tenga un valor tal, que al aplicar el divisor de voltaje se tenga

$$V_L = V_Z = \frac{R_L V_i}{R_L + R_S}$$

Entonces,

$$V_{imín} = \frac{(R_L + R_S)V_Z}{R_L} \qquad \text{(ecuación 7.17)}$$

Por otro lado, el valor máximo para V_i será aquel que proporcione $V_L = V_Z$ y en la resistencia limitadora una caída de voltaje $V_{Rs} = I_{Rs} R_s$ con un valor máximo de $I_{Rs.}$

$$V_{i\,máx} = I_{Rs\,máx} R_s + V_Z \qquad \text{(ecuación 7.18)}$$

EJEMPLO 7.11

Halla el rango de valores para V_i en el circuito regulador de la figura 7.34, para mantener un voltaje en la carga de 20 V, si $R_S = 100\ \Omega$, $R_L = 800\ \Omega$, y se utiliza un diodo Zener con $I_{zmáx} = 100$ mA.

Solución
Datos:

$R_S = 100\ \Omega$
$R_L = 800\ \Omega$
$V_Z = 20$ V
$I_{zmáx} = 100$ mA
$V_i = ?$

Desarrollo:

El voltaje de entrada mínimo se calcula al aplicar la ecuación 7.17

$$V_{imín} = \frac{(800\ \Omega + 100\ \Omega)\ 20\ \text{V}}{800\ \Omega} = 22.5\ \text{V}.$$

El voltaje de entrada máximo se calcula al aplicar la ecuación 7.18 $V_{i\,máx} = I_{Rs\,máx} R_s + V_Z$ en la cual I_{Rs} será máxima cuando por la resistencia limitadora R_s circule

$$I_{Rs\,máx} = I_{Zmáx} + I_L = 100\ \text{mA} + \frac{20\ \text{V}}{800\ \Omega}$$

$$I_{Rs\,máx} = 125\ \text{mA}$$

Entonces $$V_{i\,máx} = I_{Rs\,máx} R_s + V_Z = (125\ \text{mA})(100\ \Omega) + 20\ \text{V}$$

$$V_{i\,máx} = 32.5\ \text{V}$$

La gráfica correspondiente al resultado del ejemplo 7.11 se tiene en la figura 7.37.

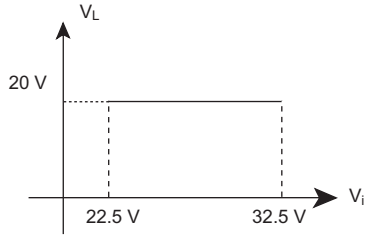


Figura 7.37 Gráfica para valores de V_i que mantienen un voltaje de 20 *V* a la salida del rectificador del ejemplo 7.11.

Regulador con circuito integrado (CI)

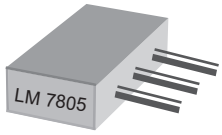
Se llama circuito integrado a un encapsulado que contiene una diversidad de circuitos con microcomponentes, entre los que se cuentan resistores, capacitores, diodos, diodos Zener, transistores, etcétera. Los hay con diversas funciones, entre las que se puede destacar la de los *reguladores*, cuya función es fijar un voltaje de cd a su salida para poder aplicarlo a un circuito o dispositivo que se le considera como la carga a alimentar.

El análisis del funcionamiento interno de estos circuitos integrados no se contempla en los propósitos de este libro, aunque puede decirse que su operación y conexiones externas son por demás sencillas y fáciles de conocer. Los reguladores de circuito integrado tienen capacidad para soportar corriente eléctrica que va desde algunos cientos de miliamperes hasta algunas decenas de amperes, lo que corresponde a rangos de potencia desde los miliwatts hasta decenas de watts.

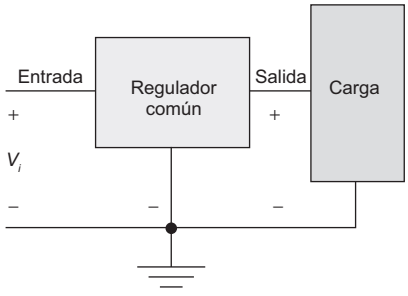
Un regulador de voltaje de CI básico es el de tres terminales, figura 7.38, que a su entrada recibe un voltaje no regulado y entrega a su salida un voltaje fijo y regulado a un valor especificado para cada CI. La terminal del centro corresponde a una conexión tierra (común); la del lado izquierdo al positivo de la entrada, mientras que la del lado derecho es la terminal positiva de salida; ambas, se refieren al punto común.

Los reguladores de voltaje de CI son de dos tipos: los de voltaje positivo, de la *serie* LM 78XX que proporcionan voltajes regulados fijos de +5 a +25 V_{cd} y los de voltaje negativo, de la *serie* LM 79XX que proporcionan voltajes regulados fijos de –5 a –25 V_{cd} aproximadamente, dependiendo del fabricante. Generalmente aceptan voltajes de entrada no mayores de 40 volts, que provienen de una sección de filtro, y una potencia máxima de 2 W aproximadamente.

La variedad de dispositivos semiconductores monolíticos para regulación de voltaje es cada vez más amplia; los hay también de salida de voltaje ajustable. Como ejemplo, la tabla 7.6 muestra una sección de la tabla de parámetros correspondientes, particularmente al regulador monolítico de 3 terminales LM390 de *National*, voltaje fijo positivo. En este caso puede encontrarse en el mercado con salida de 5 V, 12 V y 15 V, con una corriente máxima de 1 A. Observa que para cada salida, el dispositivo requiere de un voltaje mínimo de entrada (V_i), por ejemplo, para poder entregar 5 V a la salida, requiere de un $V_{i(mín)} = 7.5$ V; para entregar un $V_L = 12\ V_{cd}$, requiere en $V_{i(mín)} = 14.6$ V.



a)



b)

Figura 7.38 Regulador de voltaje de circuito integrado de tres terminales. *a*) Dispositivo LM 7805, voltaje positivo *b*) Diagrama a bloques.

Tabla 7.6 Parámetros del regulador monolítico de 3 terminales de voltaje positivo, serie LM78XX

Capacidad de salida múltiple	No
Encendido/ Apagado Pin	No
Voltaje de entrada, mín (Volt)	7.50,14.60,17.70
Voltaje de entrada, máx (Volt)	35
Corriente de salida, máx	1000 mA
Voltaje de salida (Volt)	5, 12, 15

Fuente: *Catálogo National Semiconductor*, consultado en línea: http://www.national.com

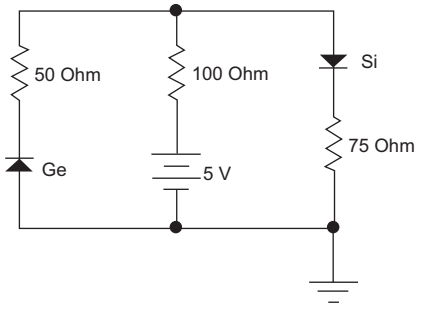


Figura 7.39 Ejercicio 7.1.

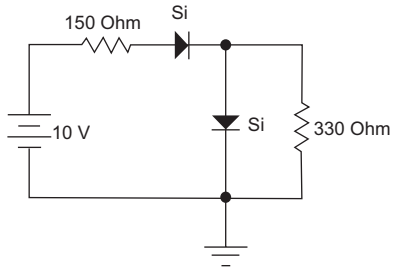


Figura 7.40 Ejercicio 7.2.

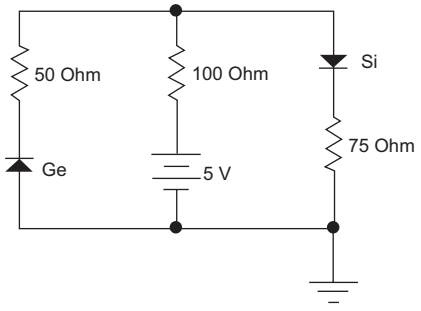


Figura 7.41 Ejercicio 7.3.

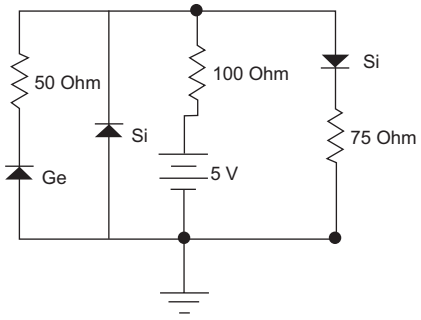


Figura 7.42 Ejercicio 7.6.

Actividades para la evaluación de competencias

Circuitos básicos con diodos semiconductores

7.1 Encuentra las características de operación para cada uno de los diodos del circuito en la figura 7.39. Comprueba tus resultados mediante la simulación del circuito. [2]

7.2 Para el circuito de la figura 7.40 calcula la potencia que absorbe cada uno de los 5 elementos. Comprueba por medio de la simulación del circuito. [2]

7.3 Calcula la intensidad de corriente que circula a través de cada elemento en el circuito de la figura 7.41 identificando su sentido de circulación mediante flechas en cada caso. Simula el circuito para comprobar tus resultados. [2]

7.4 Repite el ejercicio 7.3 invirtiendo la conexión de la fuente de alimentación. Comprueba resultados por medio de una simulación del circuito. [3]

7.5 ¿Qué potencia absorberá cada diodo en el caso del ejercicio 7.4? [2]

7.6 Para el circuito de la figura 7.42 calcula la diferencia de potencial en la resistencia de 100 ohms. Comprueba por simulación del circuito. [2]

7.7 Calcula la intensidad de corriente que circula por cada diodo en el circuito de la figura 7.42. [2]

Compuertas lógicas AND y OR con diodos

7.8 A partir del diagrama de la figura 7.17 realiza la simulación del circuito para construir una tabla de valores de verdad de una función de disyunción lógica OR. [2]

Rectificador de media onda

7.9 Calcula el voltaje máximo que tendrá la onda de salida en el circuito de la figura 7.21 si $V_i = 12 \text{ sen } 400\,t$ volts. [2]

7.10 Calcula los valores para el voltaje de cd y el de ca en el ejercicio 7.9 y determina el factor de rizo para la señal que se obtiene a la salida. Comprueba mediante la simulación del circuito. [3]

Rectificador de onda completa

7.11 Calcula el voltaje pico de la señal de salida en R para el circuito de la figura 7.43 cuando en el devanado primario del transformador se aplica una señal eléctrica de $V_i = 117\ V_{rms}$. Dibuja la gráfica de la señal de salida indicando sus características más relevantes. [2]

7.12 Calcula el factor de rizo de la señal de salida para el circuito de la figura 7.43 Comprueba tus resultados por medio de la simulación del circuito. [2]

7.13 Si el V_i para el circuito de la figura 7.28 es de 24 V_{rms} y $R_L = 1\ k\Omega$, ¿cuál será el valor I_{cd} en la resistencia de carga? Comprueba por medio de la simulación del circuito. [2]

7.14 Calcula el valor del voltaje de transición en V_i para el circuito del ejercicio 7.13. [2]

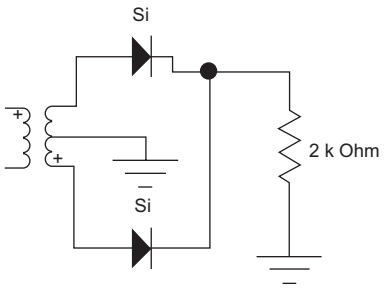


Figura 7.43 Ejercicios 7.11 y 7.12.

Fuente de alimentación básica

7.15 Calcula el voltaje de rizo pico-pico a la salida del circuito de la figura 7.32 si se usa un capacitor de 1 200 μF y R_L= 2 kΩ. Comprueba tu resultado por medio del simulador de circuitos. [3]

7.16 ¿Se puede utilizar una resistencia para 250 mW en el caso del ejercicio 7.15? Explica y justifica tu respuesta por medio de análisis del circuito de la figura 7.32. [3]

7.17 ¿Si se desea obtener un voltaje de salida regulado con valor V_L= 12 V en el circuito de la figura 7.32 puede usarse un regulador de CI LM7812? Explica y justifica tu respuesta. [3]

7.18 Calcula el rango de valores para el voltaje V_i en el circuito de la figura 7.34 para tener un V_L = 8 V, si R_S = 50 Ω, R_L = 1 kΩ, $P_{Zmáx}$ = 500 mW. [2]

7.19 Elabora una gráfica ilustrativa para el resultado obtenido en el ejercicio 7.18. [2]

7.20 Calcula el rango de valores que puede tener el resistor R_L en el circuito de la figura 7.34 para tener un V_L = 8 V, si se aplica un voltaje de entrada fijo V_i= 15 volts, si R_S= 50 Ω, y $P_{Zmáx}$ = 500 mW. [2]

7.21 Elabora una gráfica ilustrativa para el resultado obtenido en el ejercicio 7.20. [2]

7.22 Explica brevemente la diferencia que hay entre reguladores de circuito integrado de la serie LM 78XX y los de la serie LM 79XX. [1]

Notas:

[1] Competencias de la dimensión Instrumental.
[2] Competencias de la dimensión Sistémica.
[3] Competencias de la dimensión Interpersonal.

Capítulo 8

Transistores bipolares de unión

Estructura

Temas	Conceptuales
8.1 Construcción de un transistor bipolar de unión	• Qué es un transistor bipolar de unión (BJT).
8.2 Operación de un transistor bipolar de unión 8.2.1 Ambos diodos polarizados inversamente. 8.2.2 Ambos diodos polarizados directamente. 8.2.3 Diodo 1-2 en polarización inversa, diodo 2-3 en polarización directa. 8.2.4 Diodo 1-2 en polarización directa, diodo 2-3 en polarización inversa.	• Polarización de un BJT. • Identificación de las terminales de un BJT. • Intensidad de corriente a través de un BJT. • Simbología empleada para el BJT. • Conceptos *saturación, corte y operación* en un BJT.
8.3 Configuración base común 8.3.1 Características de la configuración base común. 8.3.2 Parámetro alfa (α) de un BJT.	• Características de operación de un BJT en configuración de base común. • Qué es la α de un BJT.
8.4 El transistor como amplificador	• Concepto de ganancia o amplificación en un BJT en configuración de base común.
8.5 Configuración emisor común 8.5.1 Características de la configuración emisor común. 8.5.2 Parámetro (β) de un BJT. 8.5.3 Configuración colector común.	• Características de operación de un BJT en configuración de emisor común. • Qué es la β de un BJT. • Descripción de la configuración de colector común en un BJT.
8.6 Polarización de un BJT 8.6.1 Región de operación de un BJT en configuración emisor común.	• Concepto de polarización de un BJT. • Descripción de las curvas características de salida y regiones de operación en un BJT.
8.7 Circuitos de polarización 8.7.1 Análisis de circuitos de polarización. 8.7.2 Diseño de circuitos de polarización.	• Circuito de polarización fija. • Circuito de polarización estabilizado en emisor. • Circuito de polarización retroalimentado. • Circuito de polarización automática.
Actividades para la evaluación de competencias	

temática

	CONTENIDOS	
	Procedimentales	**Actitudinales**
	• Proceso para la construcción de un BJT.	• Elementos para valorar la importancia del transistor como dispositivo que ha revolucionado el desarrollo de la tecnología electrónica y sus aplicaciones. • Elementos para apreciar la importancia de los transistores y su aplicación en el desarrollo de los sistemas electrónicos lógicos. • Apreciar la importancia del papel que juegan los transistores en la fabricación de uno de los circuitos básicos en la electrónica como es el amplificador.
	• Proceso de polarización de un BJT. • Aplicación de las leyes de Kirchhoff en el estudio de un BJT.	
	• Relación entre valores de corriente en terminales del BJT en configuración de base común.	
	• Proceso de amplificación de corriente y de voltaje al utilizar un BJT en configuración de base común.	
	• Relación entre valores de corriente en terminales del BJT en configuración de emisor común.	
	• Localización de un punto de operación con apoyo de las curvas características de salida de un BJT.	
	• Proceso de análisis de circuitos de polarización para un BJT. • Proceso de diseño de circuitos de polarización para un BJT.	

Orientación general		
Analizar la manera en que operan los transistores bipolares de unión y su aplicación en circuitos amplificadores de una etapa.		
Competencias		
Dimensión Instrumental [1]	**Dimensión Sistémica [2]**	**Dimensión Interpersonal [3]**
Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:
1.1 Comprender cómo se construye un transistor bipolar de unión. 1.2 Identificar la simbología empleada para representar un BJT. 1.3 Comprender la forma en que opera un BJT. 1.4 Comprender la configuración de base común para operar un BJT. 1.5 Comprender el concepto *alfa* (α) de un BJT. 1.6 Comprender el concepto de amplificación, relacionado con un BJT. 1.7 Comprender la configuración de emisor común para operar un BJT. 1.8 Comprender el concepto *beta* (β) de un BJT. 1.9 Comprender la estructura de un circuito de polarización para un BJT. 1.10 Diferenciar el proceso de análisis del proceso de diseño de un circuito de polarización de un BJT.	2.1 Analizar las condiciones que determinan el estado de operación de un BJT. 2.2 Analizar las características de operación de un BJT en configuración de base común. 2.3 Calcular el valor de la α de un BJT a partir de sus curvas características. 2.4 Analizar las características de operación de un BJT en configuración de emisor común. 2.5 Calcular el valor de la β de un BJT a partir de sus curvas características. 2.6 Analizar las regiones de operación de un BJT a través de sus curvas características. 2.7 Analizar un circuito de polarización fija con base en las leyes de voltajes y corrientes. 2.8 Analizar un circuito de polarización con estabilización en el emisor, con base en las leyes de voltajes y corrientes. 2.9 Analizar un circuito de polarización con retroalimentación de colector a base, aplicando las leyes de voltajes y corrientes. 2.10 Analizar un circuito de polarización automática aplicando las leyes de voltajes y corrientes. 2.11 Desarrollar técnicas para el diseño de circuitos de polarización de un BJT. 2.12 Desarrollar la técnica de diseño de un circuito de polarización fija para un BJT, con base en las leyes de voltajes y corrientes. 2.13 Desarrollar la técnica de diseño de un circuito de polarización fija para un BJT, con base en las leyes de voltajes y corrientes. 2.14 Desarrollar la técnica de diseño de un circuito de polarización con retroalimentación de colector a base para un BJT, aplicando las leyes de voltajes y corrientes. 2.15 Desarrollar la técnica de diseño de un circuito de polarización con divisor de voltaje para un BJT, aplicando las leyes de voltajes y corrientes.	3.1 Valorar la Importancia de los estudios de investigadores, con relación a los transistores y sus aportaciones al desarrollo de la tecnología.

Introducción

COMPETENCIA:
Valorar la importancia de los estudios de investigadores con relación a los transistores y sus aportaciones al desarrollo de la tecnología. [3]

El *transistor*, que se empezó a utilizar a finales de la década de los años cuarenta del siglo XX, se consideró en su época como una maravilla de lo compacto en comparación con el tamaño de los tubos al vacío. Sin embargo, a partir de 1950 el tamaño de los dispositivos electrónicos se ha reducido en un factor de alrededor de 10 veces cada cinco años. En 1960, cuando se empezó a usar la palabra microelectrónica, un bloque (*chip*) de silicio de un área de 0.5 cm^2 podía contener de 10 a 20 transistores con varios diodos, resistores y capacitores. Hoy en día tales bloques pueden contener varias docenas de miles de componentes.

Gran parte del estímulo para miniaturizar circuitos electrónicos provino de los programas para construir cohetes balísticos, los cuales tenían una limitada capacidad de carga. A medida que la microtecnología electrónica se desarrolló, se aplicó muy rápidamente a computadoras comerciales, reduciendo enormemente el tamaño de sus procesadores. Más tarde se diseñaron diferentes dispositivos portátiles como las calculadoras y otros que han inundado la casa, la oficina, la escuela, las carreteras, etcétera. La vida actual ha experimentado un notable vuelco debido a estos avances, cuando en la primera década del siglo XXI vivimos ya la era de la *nanoelectrónica*.

Cuando se empezó a usar el transistor no hubo gran modificación en la forma de conectar componentes individuales en circuitos electrónicos; aunque, por supuesto, el tamaño de los circuitos decreció debido a la disminución del tamaño del transistor. Sin embargo, en el mismo transistor ya hubo una novedad: fue el primer componente electrónico en el que materiales con diferentes características no se conectaron sino que simplemente se unieron.

8.1 Construcción de un transistor bipolar de unión

COMPETENCIA:
Comprender cómo se construye un transistor bipolar de unión. [1]

En la elaboración de un *transistor bipolar de unión* (*BJT*)[1], se utiliza una pieza de material semiconductor extrínseco pulido, por ejemplo de silicio, que tiene impurezas *p*. Al oxidarlo se produce en su superficie una pequeña capa de dióxido de silicio. En seguida se cubre la superficie del bloque con un material especial que se endurece al exponerlo a la luz. Encima se coloca una máscara de alta precisión, producida por óptica muy precisa y se ilumina. En los lugares no expuestos a la luz, el material especial se disuelve y el dióxido de silicio que está abajo se elimina. Así, varias regiones, determinadas de antemano, quedan expuestas, mientras que el resto de la superficie está cubierta.

A continuación se introduce el bloque en una atmósfera controlada, de tal forma que las impurezas *n* se difundan a través de la superficie expuesta, dentro de lo que era silicio *p.* Así se forma una zona *n.* El siguiente paso es eliminar la capa de dióxido de silicio de todo el bloque y hacer crecer una capa de material con impurezas *n.* Se obtiene de esta manera una unión de dos materiales tipo *n* con un material tipo *p*, el resultado es un *transistor bipolar de unión* tipo *npn,* que se puede esquematizar como muestra la figura 8.1.

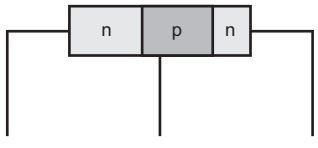


Figura 8.1 Representación esquemática de un transistor de unión *npn*.

[1] Por sus iniciales en inglés se abrevia BJT (*Bipolar Junction Transistor*).

COMPETENCIAS:
- Identificar la simbología empleada para presentar un BJT. [1]
- Comprender la toma en que opera un BJT. [1]
- Analizar las condiciones que determinan el estado de operación [2]

La capa central *p* se construye más delgada que las capas de las orillas tipo *n*, aproximadamente en una proporción de 150:1; de la misma manera ésta se encuentra menos impurificada que las capas exteriores (aproximadamente en proporción 10:1). El proceso puede adecuarse para obtener también un transistor bipolar de unión tipo *pnp*; con dos capas de material tipo *p* y una tipo *n* en medio de ellas.

Se han formado dos uniones *p-n*, cuyo comportamiento será igual que el de la unión del diodo semiconductor visto en el capítulo anterior.

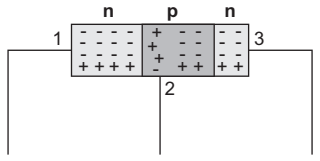
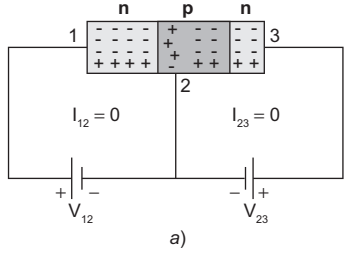


Figura 8.2 Representación de un BJT tipo *npn*.

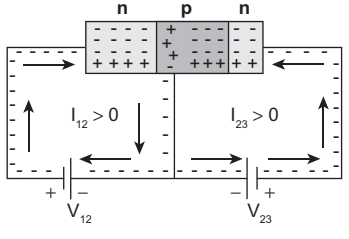
8.2 Operación de un transistor bipolar de unión

Considera al transistor ilustrado en la figura 8.2; se trata de un BJT tipo *npn*. Por ahora, llamaremos a sus terminales, 1, 2 y 3 de izquierda a derecha, respectivamente. Las capas cuyas terminales son 1 y 2 integran un *diodo de unión p-n*, mientras que la 2 y 3, de manera similar, forman otro *diodo*. Pensemos que se les apliquen sendas fuentes de polarización a los diodos, lo cual permite tener las siguientes posibilidades:

- Ambos diodos polarizados inversamente.
- Ambos diodos polarizados directamente.
- Diodo 1-2 en polarización inversa, diodo 2-3 en polarización directa.
- Diodo 1-2 en polarización directa, diodo 2-3 en polarización inversa.



a)



b)

Figura 8.3 *a*) Ambos diodos del BJT polarizados inversamente. *b*) Ambos diodos polarizados directamente.

8.2.1 Ambos diodos polarizados inversamente

En la figura 8.3*a* se muestran ambos diodos del BJT polarizados inversamente. Al haber atracción del polo positivo de la fuente V_{12} hacia los portadores mayoritarios del material tipo *n*, donde hace contacto, provoca que éstos se alejen de la unión *p-n* aumentando el tamaño de la región de agotamiento en la unión. Los electrones que emanen del polo negativo de dicha fuente tendrían como única vía la terminal *2* hacia el material *p*, algunos de ellos se recombinarían con algunos huecos de este material, pero no lograrían superar la barrera de energía que se ha formado por el incremento de la región de agotamiento. El resultado es que el diodo 1-2 se encuentra en estado de *no conducción* o "apagado", la corriente $I_{D12} = 0$ mA. En el diodo 2-3 se presenta una situación similar. Se dice que el transistor está en estado de *corte*.

8.2.2 Ambos diodos polarizados directamente

En la figura 8.3*b* se muestran ambos diodos del BJT polarizados directamente. El polo negativo de cada fuente de polarización ejerce una fuerza de repulsión sobre los portadores mayoritarios de los materiales tipo *n*, acercándolos a la unión *p-n* en cada diodo, en tanto que el polo positivo de cada fuente ejerce una fuerza de atracción hacia los mismos.

Se estrecha la región de agotamiento y los portadores mayoritarios son capaces de superar la barrera de energía en la unión. Se da el fenómeno de la conducción en ambos diodos por estar polarizados directamente. La corriente tiende a aumentar, limitada solamente por las características del cristal y por la magnitud del voltaje de polarización. Se dice que el transistor se encuentra en estado de *saturación*.

8.2.3 Diodo 1-2 en polarización inversa, diodo 2-3 en polarización directa

Si el diodo 1-2 está polarizado inversamente, actuará como corte o "apagado", no circulan las cargas eléctricas ($I_{12} = 0$ mA), mientras que en el diodo 2-3 habrá una corriente eléctrica $I_D > 0$, por estar polarizado directamente.

8.2.4 Diodo 1-2 en polarización directa, diodo 2-3 en polarización inversa

Se espera que el diodo 1-2 esté en conducción ($I_D > 0$) y el diodo 2-3 en corte ($I_D = 0$); sin embargo, en el diodo 2-3 no sucede lo que estamos esperando. Veamos el fenómeno detenidamente.

El polo negativo de la fuente $V_{12,}$ conectada al material *n* del diodo 1-2 polariza al diodo directamente, ejerciendo repulsión sobre los portadores mayoritarios (electrones), acercándolos con esto a la unión p-$n_{(1\text{-}2).}$ El polo positivo de esta misma fuente (V_{12}), ejerce atracción sobre ellos a través de la terminal 2; algunos de estos electrones libres siguen esta trayectoria y se reincorporan a la fuente de polarización V_{12}. Pero observa que el polo positivo de la fuente V_{23} que polariza inversamente al diodo 2-3, también ejerce atracción sobre los electrones libres del material *n* del diodo 1-2; y con ello les agrega energía. La pieza de material tipo *p* del centro (terminal 2) se ha construido deliberadamente delgada y con muy pocas impurezas; esto facilita que *casi todos* los portadores mayoritarios del material *n* (terminal 1) crucen la unión p-$n_{(1\text{-}2)}$, atraviesen la pieza de material tipo *p* (terminal 2) y continúen su viaje hasta penetrar al material *n* (terminal 3), ocupando cada vez los huecos disponibles, hasta salir del cuerpo del cristal e incorporarse a la fuente de polarización V_{23} a través de su polo positivo, que es el que los atrae.

Lejos de lo que se hubiera podido pensar, hay corriente desde el material *n* (terminal 1) hasta el material *n* (terminal 3), pasando por el material *p*, de en medio. Se dice que el transistor está en *operación*.

El fenómeno que se presenta en el último caso fue determinante para asignar un nombre, en vez de número, a cada una de las tres partes del transistor bipolar de unión (BJT). A la terminal que hasta ahora hemos identificado con el número 1, se le denomina *emisor*; a la terminal 3 se le llama *colector* y a la terminal del centro (2) se le llama la *base*. Observa que el nombre corresponde perfectamente a la función que cada una de las partes realiza para la conducción de las cargas eléctricas.

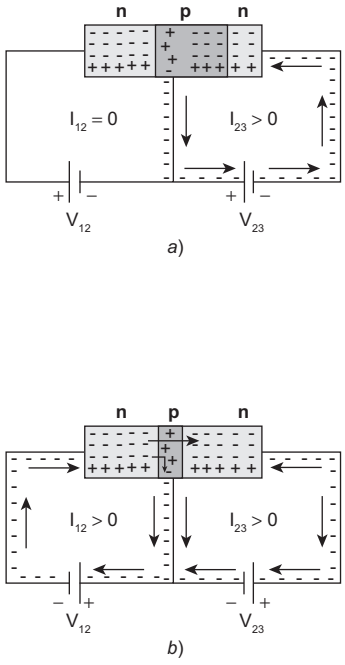


Figura 8.4 *a*) El diodo 1-2 del BJT polarizado inversamente mientras que el diodo 2-3 se polariza directamente. *b*) El diodo 1-2 polarizado directamente y el diodo 2-3 con polarización inversa.

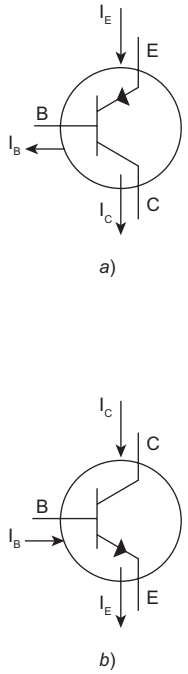


Figura 8.5 Símbolos utilizados para representar al BJT. (a) Tipo *pnp*. (b) Tipo *npn*.

Cuando el transistor BJT se encuentra en condiciones de *saturación* o *corte*, el dispositivo se utiliza como un *conmutador* porque *prende* o *apaga*. Cuando está en condiciones de *operación*, su funcionamiento será el de un amplificador; y es la función que se estudiará en este capítulo como lo contempla un curso de electrónica básica. Las otras funciones corresponden a cursos de electrónica más avanzados.

Se ha analizado la *operación* de un transistor tipo *npn*; sin embargo, para un transistor tipo *pnp*, se presenta el fenómeno de la conducción desde el emisor hasta el colector, invirtiendo las polaridades en las fuentes; siempre que se polarice directamente al diodo *emisor-base* e inversamente al diodo *base-colector.*

Con la finalidad de facilitar la comprensión de un fenómeno tan complejo, como es el que se presenta en la conducción de cargas en un BJT, en el análisis anterior se ha considerado el movimiento *real* de los electrones, o sea, lo que se llama el *sentido real* de la corriente, mediante representaciones esquemáticas. Recuerda que en la mayoría de los textos relacionados con la corriente eléctrica se utiliza el *sentido convencional*; precisamente al contrario de lo que ahora se ha tomado en cuenta, para efectos de explicación. En lo sucesivo seguiremos utilizando el *sentido convencional* de la corriente.

Si comparas las figuras 8.4*b* y 8.5, verás que representan al mismo fenómeno, la corriente a través de un transistor BJT. Observa que si consideramos al dispositivo como un nodo, nos podremos dar cuenta de que se cumple la ley de Kirchhoff de corrientes, por tanto, se tiene que la corriente en la terminal *emisor* (I_E) es igual a la suma de las corrientes en las terminales de *base* (I_B) y de *colector* (I_C). Esto se puede expresar en la siguiente forma:

$$I_E = I_B + I_C \qquad \text{(ecuación 8.1)}$$

Los símbolos utilizados para la representación de transistores BJT consideran el *sentido convencional* de la corriente, y se muestran en la figura 8.5. Para ambos tipos de BJT, tanto el *npn* como el *pnp,* el símbolo presenta una flecha en la terminal de *emisor* (*E*), indicando el *sentido convencional* de la corriente en el dispositivo. Del lado opuesto al emisor se representa la terminal *colector* (*C*), mientras que en medio de ambas se presenta a la *base* (*B*).

El símbolo del BJT tipo *npn* tiene la flecha del *emisor* apuntando hacia *fuera* del dispositivo; mientras que el del tipo *pnp* su flecha apunta hacia *dentro* del mismo. Es la diferencia básica entre ambos símbolos, ya que, como se puede apreciar, se tiene que el sentido de la corriente en cada tipo de transistor es exactamente al contrario en uno y en otro.

Analicemos el modelo propuesto por la ecuación 8.1, para ello relaciónalo con la figura 8.6. Esta figura esquematiza una manera de visualizar más a detalle el fenómeno del flujo de cargas a través del transistor tipo *npn*. Se aprecia una flecha que representan el movimiento real de los electrones viajando a través de la ruta *emisor*⇒ *base* ⇒ *colector*⇒ *exterior;* se trata de los portadores mayoritarios presentes en el material tipo *n* de la terminal emisor. Una pequeña parte de estos portadores se desvía a través de la base hacia el exterior, atraídos por el potencial

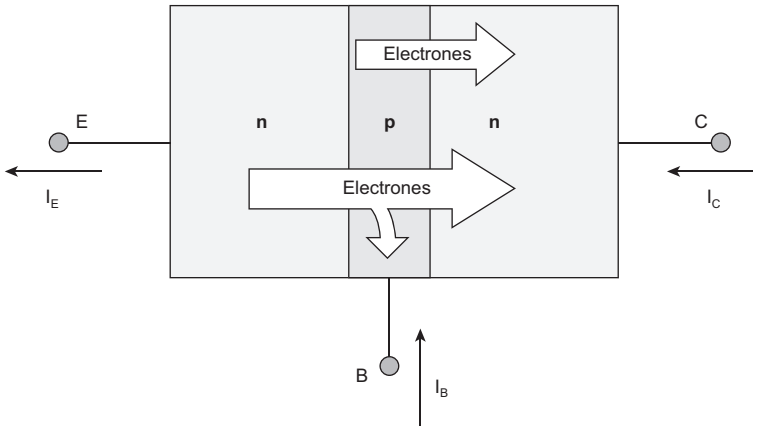


Figura 8.6 Corrientes de electrones y huecos en un transistor tipo *npn* polarizado en condición de operación.

positivo de la fuente que polariza al diodo *emisor-base.* Hay otra flecha, de menor tamaño y en el mismo sentido que la anterior, que representa el movimiento de electrones que provienen de la *base* (portadores minoritarios en el material tipo *p*), atraídos por el potencial positivo de la fuente que polariza al diodo *base-colector*, siguiendo la ruta *base*⇒ *colector*⇒ *exterior.* Podemos llegar a la conclusión de que la corriente que pasa por *colector* (I_C) está formada por la suma de los portadores mayoritarios provenientes del *emisor* y portadores minoritarios provenientes de la *base*; todos viajando hacia el colector, atraídos por el potencial positivo que polariza inversamente al diodo *base-emisor*. A la corriente debida a portadores minoritarios provenientes del material tipo *p*, se le conoce como corriente de fuga (I_{CO}), que equivaldría a la corriente de saturación inversa I_S en un diodo rectificador. Esto se puede representar así:

$$I_C = I_{Cmayoritarios} + I_{COminoritarios} \qquad \text{(ecuación 8.2)}$$

Dadas las magnitudes de estas dos corrientes, la que forman los portadores mayoritarios es del orden de los miliamperes, mientras que la debida a portadores minoritarios es del orden de micro o nanoamperes, y las tecnologías utilizadas en la elaboración de transistores permiten que sea cada vez más pequeña, lo que significa que para fines prácticos se puede considerar como despreciable.

Las flechas en gris claro de la figura 8.6 representan las corrientes del transistor BJT en el sentido convencional.

8.3 Configuración base común

COMPETENCIAS:
- Comprender la configuración de base común para un BJT. [1]
- Analizar las características de operación de un BJT configuración de base común. [2]

Como ya se indicó se abordará el estudio del transistor BJT en condiciones de *operación*, cuando el *diodo de entrada* está polarizado directamente, mientras que el *diodo de salida* será polarizado inversamente. En estas condiciones, el dispositivo funcionará como un *amplificador,* como se verá más adelante.

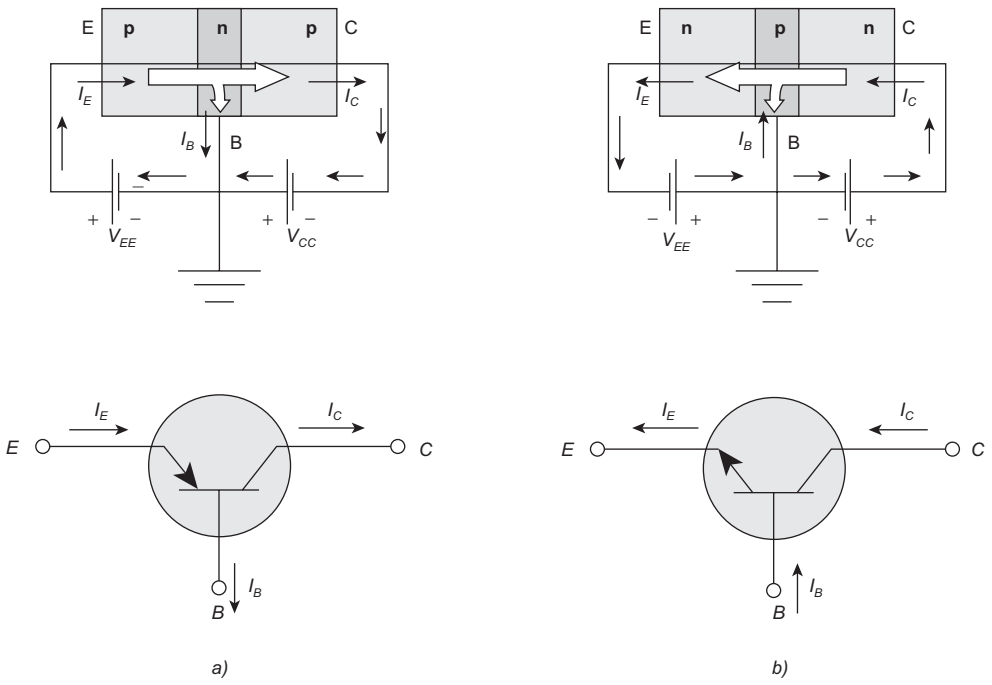


Figura 8.7 Configuración base común para transistores BJT. *a*) Tipo *pnp*. *b*) Tipo *npn*.

8.3.1 Características de la configuración base común

En el análisis de la sección anterior se tiene como entrada al diodo *emisor-base* como salida al diodo *base-colector* y como punto de referencia o *común* a la terminal de la *base*, de ahí que a esta configuración se le dé el nombre de *base común*. La notación y simbología utilizada para esta configuración se muestra en la figura 8.7, para ambos tipos de transistores. La flecha en los símbolos utilizados representa el *sentido convencional de la corriente de emisor*. Esto significa que para explicarnos el funcionamiento en conjunto del BJT como amplificador, requerimos de conocer las características tanto de su sección de entrada (diodo *EB*), como las de salida (diodo *BC*).

Las características de entrada están dadas para un punto de excitación determinado, en el cual influyen las características de salida. En el diodo de entrada *emisor-base* (*EB*) fluirá una corriente que se identifica como corriente de emisor (I_E), del orden de los miliamperes, al tiempo que el diodo está polarizado directamente por un voltaje que se identifica como V_{BE}, medido en volts. Esto da como resultado la curva característica del diodo *emisor-base* representada en la figura 8.8. Esta curva se ve influida de manera directa por la magnitud del voltaje que existe entre terminales del diodo de salida *colector-base* (V_{CB}). A mayor valor de V_{CB} la curva característica del diodo *EB* se desplaza hacia la izquierda de la gráfica; esto significa que para elevar la corriente en el emisor se necesita menor voltaje en las terminales de *base-emisor*. Si se disminuye el voltaje entre terminales *colector-base* (diodo de salida), la curva característica del diodo de entrada *emisor-base* se ve desplazada hacia la derecha; lo que quiere decir que para elevar el valor de la corriente de emisor (I_E) se requerirá un mayor voltaje entre base y emisor.

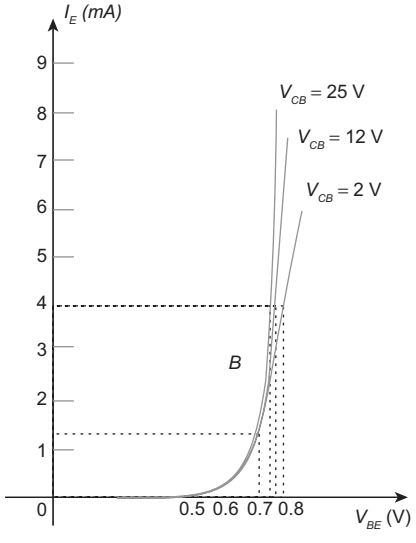


Figura 8.8 Curva característica para el diodo de entrada en un transistor de silicio en configuración base común.

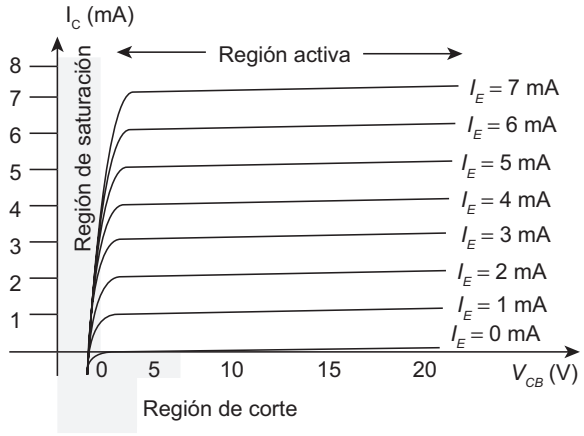


Figura 8.9 Curvas características de salida o de colector para un transistor en configuración base común.

De la misma manera, las características de salida están influidas directamente por las condiciones dadas en el diodo de entrada. Anteriormente se explicó que una gran cantidad de portadores mayoritarios pasan del emisor al colector, casi todos, de manera que la corriente de colector depende en gran medida del valor de la corriente del emisor. En la figura 8.9 se muestran las curvas características de salida o curvas de colector para un transistor en configuración base común.

En el eje vertical se grafican los valores para I_C y en el horizontal los valores para el voltaje entre colector y base (V_{CB}); mientras que en el primer cuadrante de este sistema cartesiano aparecen curvas de corriente de emisor (I_E). La región activa o de operación corresponde a una polarización directa en el diodo de entrada y polarización inversa en el diodo de salida; el transistor funciona como *amplificador*. A la izquierda de $V_{CB} = 0$ se localiza la región de saturación del transistor; (cuando ambos diodos, de entrada y salida, están polarizados directamente); abajo del valor $I_C = 0$ se localiza la región de corte (ambos diodos están polarizados inversamente). Observa que cuando $I_E = 0$ mA, la corriente I_C también es prácticamente cero; aun cuando se incremente el voltaje V_{CB}, esto no afecta sensiblemente a los valores de I_C. Además, las curvas para la corriente de emisor son casi horizontales para la mayor parte de la región activa. Para tener un valor mayor para I_C se requiere tener también un valor mayor para I_E. Lo anterior permite concluir en que

$$I_C \cong I_E \qquad \text{(ecuación 8.3)}$$

8.3.2 Parámetro alfa (α) de un BJT

En las curvas características del transistor en configuración base común, figura 8.9, se aprecia la relación tan estrecha que existe entre las magnitudes de I_C e I_E; por otra parte, la ecuación 8.3 nos dice que estas magnitudes son casi guales; sin embargo, en la realidad no lo son. De hecho I_C será siempre menor que I_E, por la corriente, aunque sea muy

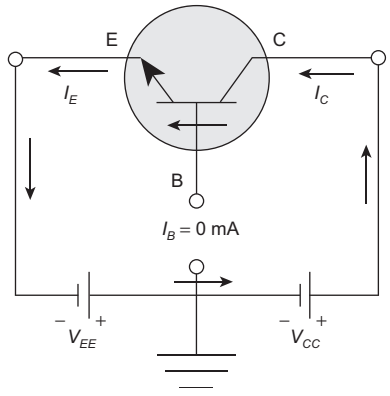


Figura 8.10 Transistor BJT tipo *npn* polarizado para operar en la región activa.

pequeña, que fluye por la terminal de base. Entre más se aproxime el valor de I_C al de I_E, se dice que la efectividad del transistor es mayor; de ahí que la relación entre ambas corrientes es un parámetro importante para todo BJT. Esta relación recibe el nombre de la *alfa* (α) del dispositivo y está dada por la ecuación 8.4. Así que la situación que corresponde a la ecuación 8.3 se muestra en el diagrama de la figura 8.10.

$$\alpha_{cd} = \frac{I_C}{I_E} \qquad \text{(ecuación 8.4)}$$

Los valores de $\alpha_{cd} =$ están determinados por el grado de impurificación que pueda tener el cristal del transistor; y varían en un rango aproximadamente de 0.90 a 0.998.

También se puede tener una expresión para α en ca, que viene a representar un parámetro o factor de amplificación en ca para un amplificador en configuración base común.

$$\alpha_{ca} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_E}\Big|_{V_{CB}} = \text{constante} \qquad \text{(ecuación 8.5)}$$

EJEMPLO 8.1

Calcula la corriente de colector en un BJT polarizado en base común, cuando la corriente en emisor es de 58 mA con $\alpha_{cd} = 0.95$.

Solución

Datos:

$I_E = 58$ mA
$I_C = ?$
$\alpha_{cd} = 0.95$

Planteamiento:

A partir de la ecuación 8.4 puede obtenerse una expresión para I_C.

Desarrollo:

De la ecuación 8.4 se tiene que
$I_C = \alpha_{cd} I_E = (0.95)(58 \text{ mA}) = 55.1 \text{ mA}$

8.4 El transistor como amplificador

COMPETENCIA:
Comprender el concepto de amplificación, relacionado con un BJT. [1]

Cuando escuchamos el término *amplificar*, nos imaginamos una acción de hacer *más grande* alguna magnitud conocida. Se puede entender entonces que en un proceso de amplificación se tiene una magnitud *original* y una magnitud *aumentada* o *amplificada*, como variables en un sistema que tenga una entrada, que sería la magnitud original, y una salida, dada por la magnitud mayor o amplificada. En

los sistemas electrónicos el proceso de amplificación es muy común, puesto que al trabajar con pequeñas corrientes y pequeños voltajes se requiere que en un momento dado sean amplificados para su utilización posterior. De ahí que uno de los circuitos básicos en estos sistemas sea precisamente un *amplificador*.

La operación de los sistemas amplificadores, de corriente y de voltaje, se basa en la acción amplificadora de los transistores; que se muestra mediante un esquema de la figura 8.11.

En el esquema se representa un circuito amplificador con una impedancia de entrada de 40 Ω y una resistencia de carga $R_L = 2$ kΩ. Supón que se trata de un transistor con $\alpha_{ca} = 0.95$, y está polarizado para operar en la región activa, como un amplificador. A la entrada se aplica una señal senoidal de valor $V_i = 100\ \text{mV}_{\text{rms}}$, lo que provocará que el punto de operación del diodo de entrada *EB* se desplace hacia arriba y hacia abajo, en la curva característica del diodo, manteniendo una corriente alterna en el emisor, con valor eficaz de

$$i_E = \frac{V_i}{Z_i} = \frac{0.1\ \text{V}}{40\ \Omega} = 2.5\ \text{mA}$$

Según lo expresado en la ecuación 8.5, se obtiene que la corriente en el colector es:

$$i_C = (0.95)\ (2.5\ \text{mA}) = 2.375\ \text{mA}$$

La ley de Ohm nos dice que esta corriente, al pasar por la carga de 2 kΩ, producirá una caída de voltaje de

$$V_L = (2.375\ \text{mA})(2\ \text{k}\Omega) = 4.75\ \text{V}_{\text{rms}}$$

Se observa que debido a la transferencia de corriente desde la entrada hasta la salida, a través del transistor, en la carga se obtiene un voltaje de mayor magnitud; es decir, amplificado. De hecho, el nombre de este dispositivo obedece precisamente a esta función de transferencia de energía hacia un re*sistor* en la carga. El factor de amplificación de este circuito está dado por la ecuación 8.6.

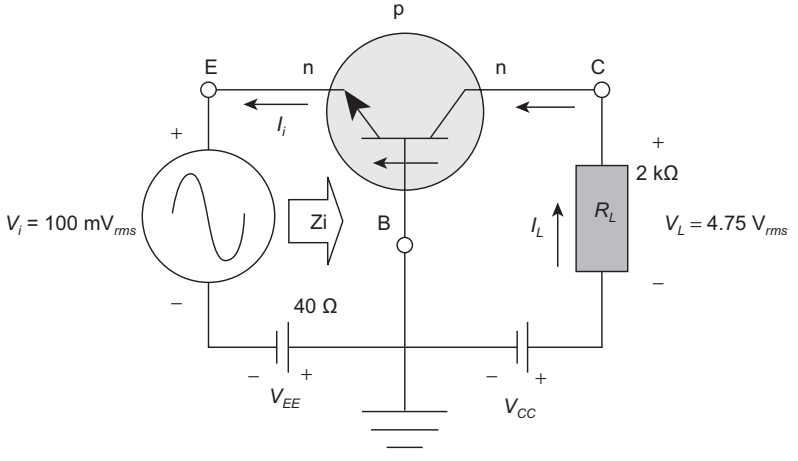
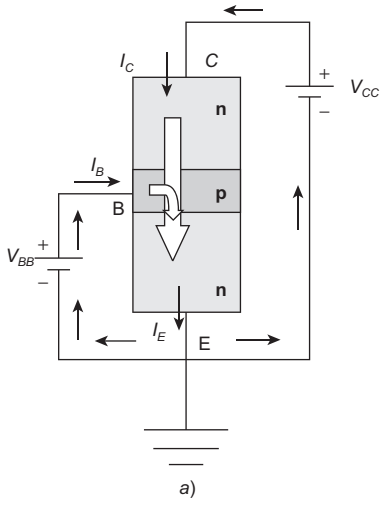


Figura 8.11 Operación básica de amplificación de voltaje en un BJT de configuración base común.



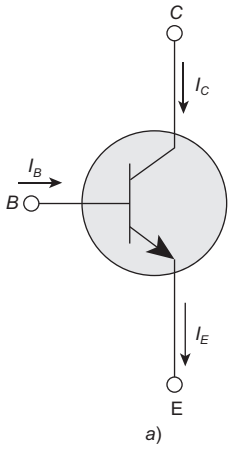


Figura 8.12 *a*) Configuración emisor común para un BJT tipo *npn*. La señal de entrada se aplica entre base y común. La salida se obtiene entre colector y común. *b*) Símbolo de un BJT tipo *npn* en configuración emisor común.

COMPETENCIAS:

- Comprender la configuración de emisor común para operar un BJT. [1]
- Analizar las características de operación de un BJT de emisor común. [2]

$$A_v = \frac{V_L}{V_i} \qquad \text{(ecuación 8.6)}$$

$$A_v = \frac{4.75\ \text{V}}{0.1\ \text{V}} = 47.5$$

Esto quiere decir que por cada unidad de voltaje *rms* que se tenga a la entrada, habrá 47.5 unidades a la salida. Los valores típicos de factor de amplificación en transistores de configuración base común son de entre 40 y 300. Observa que este amplificador de voltaje tiene un factor de amplificación de corriente menor que 1, ya que todo el tiempo $I_L < I_i$.

$$A_i = \frac{I_L}{I_i} \qquad \text{(ecuación 8.7)}$$

8.5 Configuración emisor común

Si ahora se cambia la ubicación de las terminales del transistor, conectando la terminal de emisor al común o tierra, se obtiene una nueva configuración llamada de *emisor común*, cuya entrada estará entre terminales base y emisor, mientras que la salida será del colector al común. Ésta es la configuración que con mayor frecuencia se utiliza en circuitos amplificadores con BJT. Se esquematiza en la figura 8.12.

8.5.1 Características de la configuración emisor común

En esta configuración, como en las demás, se cumple con la ley de Kirchhoff de corrientes (ecuación 8.1), como si el transistor fuera un solo nodo. También se tienen dos tipos de características que determinan la operación del BJT, la curva correspondiente al diodo base-emisor, que es la entrada, en la cual se ve el comportamiento de la corriente de base (I_B), del orden de los microamperes, respecto a la diferencia de potencial entre base y emisor (V_{BE}), figura 8.13*a*. En éstas se puede apreciar que la corriente de base tiene un comportamiento como el que corresponde a la corriente en un diodo polarizado directamente, aunque ésta se ve modificada por el voltaje que existe en la salida, voltaje colector-emisor (V_{CE}).

Las curvas de salida de configuración emisor común, se muestran en la figura 8.13*b*. En el eje vertical se tienen los valores para la corriente de colector (I_C) en miliamperes, mientras que en el eje horizontal se grafica el voltaje entre colector y emisor (V_{CE}), en volts. En éstas también se distinguen tres regiones de trabajo para el dispositivo: región de saturación, comprendida entre un voltaje $0 < V_{CE} < V_{CEsat}$; donde V_{CEsat} es el voltaje entre colector y emisor que hace entrar en saturación al dispositivo. Debajo de la curva correspondiente a una $I_B = 0\ \mu\text{A}$ se localiza la región de corte. A la derecha del voltaje V_{CEsat} y arriba de la curva $I_B = 0\ \mu\text{A}$ se ubica la región activa para esta configuración, donde se observa la parte más lineal de las curvas características.

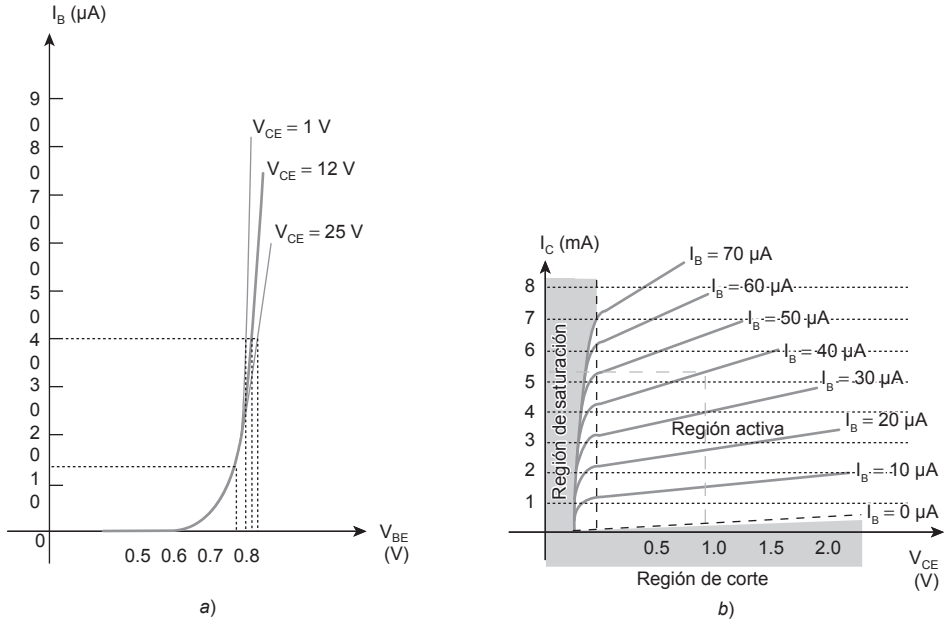


Figura 8.13 Curvas características de un transistor BJT de silicio en configuración de emisor común. *a*) Característica de la base o entrada. *b*) Características de colector o salida.

Las curvas características de emisor común representan el comportamiento del BJT en un punto Q de operación. Si, por ejemplo, este punto estuviera ubicado en la curva de entrada con un voltaje $V_{BE} = 0.75$ V, y un voltaje $V_{CE} = 12$ V, significa que su corriente de base sería de $I_B = 40$ μA, en la figura 8.13*a*. Conocida la corriente de base se localiza la curva característica correspondiente a esta corriente en la gráfica de salida de la figura 8.13*b*, así como el valor del voltaje colector-emisor (12 V); se traza una línea vertical y en el cruce de estas dos se encuentra el punto de operación. Al trazar una línea horizontal hacia la izquierda, en el cruce de ésta con el eje vertical se localiza el valor para la corriente de colector, de 5.3 mA. A estos valores, que caracterizan al punto de operación, se acostumbra representarlos agregando un subíndice Q. En el ejemplo que se acaba de manejar, las características del punto de operación serán:

$$V_{BEQ} = 0.75 \text{ V}$$
$$I_{BQ} = 40 \text{ μA}$$
$$V_{CEQ} = 12 \text{ V}$$
$$I_{CQ} = 5.3 \text{ mA}$$

La región activa de la configuración emisor común se emplea para amplificación tanto de voltaje, como de corriente o de potencia. La región de corte no está tan bien definida como en el caso de la configuración base común.

Un aspecto importante y que distingue a las curvas características de emisor común, es que cuando la corriente de base es de cero μA, la corriente en el colector es mayor que cero.

COMPETENCIAS:
- Comprender el concepto de beta (β) de un BJT. [1]
- Calcular el valor de la β de un BJT a partir de sus curvas características. [1]

8.5.2 Parámetro (β) de un BJT

De manera similar a como se ha definido la α para el transistor en la configuración base común, se define a la β del transistor como la relación que existe entre la corriente de salida I_C y la corriente de entrada I_B en configuración emisor común.

$$\beta_{cd} = \frac{I_C}{I_B} \qquad \text{(ecuación 8.8)}$$

β es un *factor de amplificación de corriente en cd.* De lo que se acaba de ver en la sección anterior, $I_C > I_B$, los valores para β son del orden de varios cientos. En las hojas de datos de estos dispositivos a la β se le identifica también como h_{fe}, refiriéndose a un parámetro de amplificación de corriente del BJT. Algunos multímetros tienen escala para la medición de h_{fe}.

Cuando el transistor opera en ca, la β_{ca} se define de la siguiente manera:

$$\beta_{ca} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}\Big|_{V_{CE}} = \text{constante} \qquad \text{(ecuación 8.9)}$$

La relación que existe entre α y β se puede encontrar a partir de la ley de Kirchhoff de corrientes aplicada en el transistor. Como

$$I_E = I_C + I_B \qquad \text{(ecuación 8.10)}$$

Como nos interesa conocer la relación entre dos factores de transferencia, se expresa la ecuación 8.10 en términos de la corriente de salida I_C, usando las ecuaciones 8.4 y 8.8 y sustituyendo la expresión de I_E y de I_B, para quedar la ecuación anterior como sigue:

$$\frac{I_C}{\alpha} = I_C + \frac{I_C}{\beta} \qquad \text{(ecuación 8.11)}$$

Si se divide toda la ecuación 8.11 entre I_C se obtiene ahora:

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{1}{\beta} \qquad \text{(ecuación 8.12)}$$

A partir de la ecuación 8.12, se puede despejar cualquiera de las dos únicas incógnitas que quedan para obtener una expresión de α en función de β, o viceversa, dando por resultado la relación entre estos dos factores:

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta + 1} \qquad \text{(ecuación 8.13)}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \qquad \text{(ecuación 8.14)}$$

Las ecuaciones 8.13 y 8.14 son muy útiles para determinar el valor de una cuando se conoce el de la otra.

8.5.3 Configuración colector común

La última de las tres posibles configuraciones para un transistor bipolar de unión (BJT) es aquélla en que el colector pasa a ser la terminal que se pone en contacto hacia el punto común o tierra. Se le llama *configuración colector común* y se muestra en la figura 8.14, donde se identifican los sentidos de corrientes y polaridades de voltajes para un dispositivo tipo *npn*. Esta configuración se usa con propósitos de acoplamiento de impedancias entre dos etapas de algún sistema electrónico, debido a que ésta se caracteriza por tener una alta impedancia a la entrada y una baja impedancia a la salida, lo contrario de las configuraciones vistas anteriormente. Para efectos de diseño de este tipo de acopladores pueden emplearse las mismas curvas características de la configuración emisor común con muy buenos resultados. Un curso de electrónica básica no contempla el estudio de este tipo de circuitos, que es en los que generalmente se usa esta configuración. Alguna información relacionada con el tema podrá consultarse en textos de electrónica avanzada o de especialidad.

8.6 Polarización de un BJT

COMPETENCIA:
Analizar las regiones de operación de un BJT mediante sus curvas características. [2]

En secciones anteriores se trató el tema de polarización de un diodo, en donde se dijo que este proceso consiste en aplicar una diferencia de potencial entre sus terminales para que el dispositivo se ubique en un punto de operación y realice alguna función. En aquel caso se vio que un diodo puede estar polarizado directa o indirectamente, lo que provoca que se tengan dos formas diferentes de funcionamiento, como "encendido" o como "apagado". En el caso de un transistor bipolar de unión, que es un dispositivo de tres terminales, también es necesario polarizarlo para que pueda realizar sus funciones. La polarización de un BJT consiste en aplicar entre sus terminales voltajes de cd que ayudan a establecer niveles fijos de corriente y de voltaje que ubiquen al transistor en un punto de operación Q.[2] Este punto puede estar ubicado en distintas coordenadas dentro de la gráfica de las curvas características, tanto de entrada como de salida de una configuración. Para controlar estos voltajes y corrientes se utilizan elementos resistivos conformando un circuito de polarización, cuyo cálculo y diseño tiene como inicio la determinación del punto Q en que debe operar el transistor.

Limitaremos el estudio de la polarización de un BJT a circuitos en la configuración emisor común que es, como se mencionó, la más

[2] Se usa la letra "Q" para nombrar a un punto de operación del transistor, como una abreviatura del término en inglés *quiescent point*, que significa "punto de reposo".

frecuentemente usada para el diseño de circuitos amplificadores. Antes de hablar de los circuitos necesarios para la polarización del BJT revisemos la región donde se ubicará el punto *Q* para efectos de trabajar como un amplificador.

8.6.1 Región de operación de un BJT en configuración emisor común

Para cada transistor existe una región para un punto *Q*, con características dadas; se le llama *región de operación*, y se localiza en la gráfica de sus curvas características de salida. Estas gráficas están dadas en las hojas de datos de cada transistor, y se obtienen en el laboratorio por medio de un equipo llamado *trazador de curvas*. En la figura 8.14*a* se muestra la que corresponde a un dispositivo tipo *npn* en configuración emisor común. En ésta se distinguen las siguientes áreas o regiones de operación:

Región de saturación

Es el área de la gráfica para voltajes de polarización *colector-emisor* tales que $0 < V_{CE} < V_{CEsat}$. El punto de operación *Q* se encuentra en esta región cuando el BJT tiene polarización directa, tanto a la entrada como a la salida. Observa que los incrementos de la corriente en colector son súbitos para pequeñas variaciones del voltaje V_{CE}. El transistor opera como un conmutador en estado de "encendido".

Región de corte

Es el área de la gráfica comprendida por debajo de la curva de $I_B = 0\ \mu A$. El punto de operación *Q* se encuentra en esta región cuando el BJT tiene polarización inversa, tanto a la entrada como a la salida. Observa que los incrementos de la corriente en el colector son muy pequeños, debido a la corriente de saturación inversa. No influyen de manera significativa las variaciones del voltaje V_{CE}. El transistor opera como un conmutador en estado de *apagado*.

Región activa

Comprende el área donde las curvas de corriente de base tienden a ser rectas. Está limitada a la izquierda por la región de saturación y abajo por la curva $I_B = 0\ \mu A$; en la parte superior por la *curva de potencia*. Los valores de voltaje de polarización que hacen que el punto de operación *Q* se ubique en la región activa son tales que $V_{CEsat} < V_{CE} < V_{CEmáx}$. En esta región, el transistor opera como un *amplificador*. La figura 8.14*b* es como una imagen de espejo de la anterior, y muestra las curvas correspondientes a un dispositivo tipo *pnp*.

La curva de potencia de un transistor está determinada por el valor de potencia máxima capaz de absorber el dispositivo. Este valor se encuentra en las hojas de datos de semiconductores. Por ejemplo, el transistor cuyas curvas se ven en la figura 8.14 absorbe una potencia máxima de

$P_{máx} = 60$ mW. Con base en este valor se traza la curva de potencia, cuyos puntos corresponden a productos de pares de valores correspondientes siempre a características de salida $P_{máx} = V_{CE} I_C = 60$ mW. Por ejemplo, para un voltaje de $V_{CEmáx} = 22$ V y una potencia de 60 mW, corresponde una $I_C = \dfrac{P_{máx}}{V_{CEmáx}} = \dfrac{60\,\text{mW}}{23\,\text{V}} = 2.6$ mA; para un $V_{CE} = 7.5$V se tiene una corriente $I_C = 8$ mA, etcétera. Cualquier punto de operación por arriba o a la derecha de la curva de potencia provocará una absorción superior a 60 mW, ocasionando calentamiento del dispositivo y su consecuente deterioro. Por ejemplo si por el transistor circula una corriente de 6 mA cuando se tiene un V_{CE} =15 V, la potencia que éste absorberá será $P = V_{CE} I_C = (15\text{ V})(0.006\text{ A}) = 90$ mW. Se trata de un punto fuera de la región activa, por encima de la curva de potencia.

Una importante observación acerca de las curvas de salida presentadas en la figura 8.14 es el signo (aunque no aparece en la gráfica) de los valores del voltaje de polarización V_{CE}. Como el colector debe polarizarse inversamente, si las curvas corresponden a un transistor tipo *npn*, se aplica un voltaje positivo, las curvas de corriente de base aparecen hacia la derecha, y los valores de V_{CE} crecen también de izquierda derecha. Cuando se trata de las curvas de un transistor tipo *pnp*, los voltajes de V_{CE} deben ser negativos, pues es la polaridad que hay que aplicarle a un colector tipo *p* para que esté polarizado inversamente; por lo que las curvas de corriente de base y los voltajes de V_{CE} crecen de derecha a izquierda, hacia el lado negativo. Un trazador de curvas, presentará las gráficas orientadas como muestra la figura 8.14; sin embargo, en los documentos impresos, como textos y hojas de datos se acostumbra en muchos casos dibujar las curvas de ambos tipos de transistor en el primer cuadrante, señalando los signos que correspondan a V_{CE}, según sea positivo o negativo.

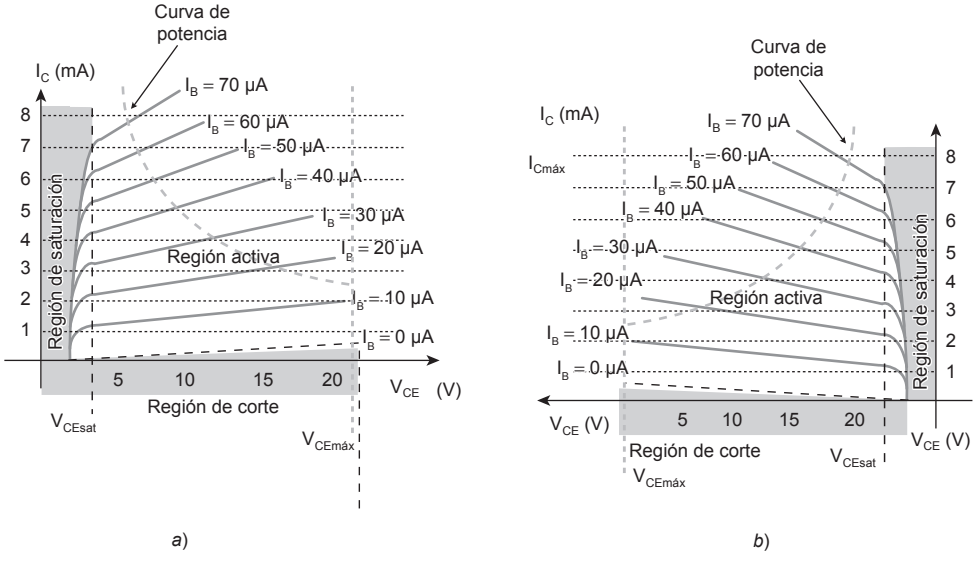


Figura 8.14 Curvas características de salida de un BJT *a*) Tipo *npn*. *b*) Tipo *pnp*.

COMPETENCIAS:
- Comprender la estructura de un circuito de polarización de un BJT. [1]
- Diferenciar el proceso de análisis del proceso de diseño de un circuito de polarización BJT. [1]

8.7 Circuitos de polarización

Se le da el nombre de *circuito de polarización* al conjunto de elementos activos (fuentes de voltaje) y pasivos (resistores) que se conectan con un BJT para controlar las corrientes y voltajes asociados a las características de un punto de operación *Q* ubicado en la región activa, para hacer que el dispositivo opere como un amplificador.

Se pueden tener diferentes circuitos de polarización, entre los cuales destacaremos los más utilizadas en amplificadores de emisor común: *a*) Polarización fija. *b*) *p* estabilización en el emisor. *c*) Por divisor de voltaje en la base.

Acerca de un circuito de polarización existen dos procesos de carácter general, que son inversos entre sí: el análisis del circuito y el diseño del circuito.

- *Diseño de un circuito de polarización.* Es el proceso que consiste en calcular los valores fuentes de alimentación y de las resistencias que deben asociarse al BJT para lograr las características del punto de operación *Q* deseado. Se lleva a efecto con base en los datos que se obtienen de las características del punto de operación y en *criterios* de diseño particular para cada tipo de circuito.
- *Análisis de un circuito de polarización.* Se analiza un circuito que ha sido diseñado previamente, ya sea por el propio experimentador o por otra persona, quien le ha asignado ya los valores a cada resistencia y a la fuente de alimentación. El objetivo del proceso de análisis es *determinar los voltajes y corrientes asociados a cada elemento del circuito* al momento de funcionar.

Iniciaremos el estudio de los circuitos de polarización con el proceso de *análisis*, para cada uno de los tipos mencionados, para continuar después con el de *diseño* o *síntesis* de estos circuitos.

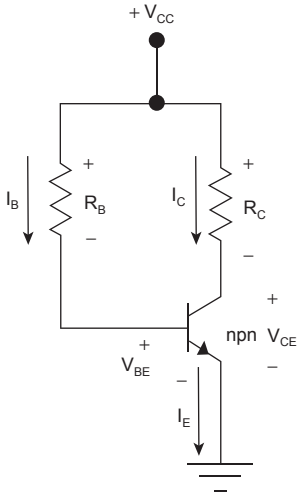


Figura 8.15 Circuito de polarización fija para un BJT tipo *npn*.

8.7.1 Análisis de circuitos de polarización

a) *Circuito de polarización fija*

Es el más simple de los circuitos de polarización. El emisor se conecta al común, mientras que en la base se coloca una resistencia R_B y otra en el colector, que se representa por R_C. Estas dos resistencias se conectan por su otro extremo al polo positivo (para *npn*) de la fuente de alimentación (V_{CC}), figura 8.15. El análisis de este circuito se hace en el siguiente orden:

1. Se identifica la polaridad de la fuente de alimentación. En el caso de un transistor *npn*, el positivo se alimenta a través de R_B y R_C. El negativo de la fuente está conectado al común.
2. La flecha de la terminal del emisor indica el sentido en que fluye la corriente en esta terminal, I_E (sentido convencional, de *más* a *menos*). En un transistor tipo *npn* esta corriente "sale" del transis-

tor, y de acuerdo con la ley de Kirchhoff de corrientes (ecuación 8.10), las corrientes I_B e I_C deben "entrar" al transistor. Esto permite identificar el sentido de las corrientes que pasan a través de R_B y R_C. En la figura 8.15 fluyen de arriba hacia abajo.

3. Sabiendo que el sentido de las corrientes es de positivo a negativo, se pueden asignar las polaridades a las caídas de voltaje en cada resistencia, V_{RB} y V_{RC} y la caída de voltaje entre colector y emisor V_{CE}.
4. Una vez identificados los sentidos de corrientes y polaridades de voltajes, se procede al análisis del circuito con los métodos conocidos para cd. Para esto deben distinguirse dos mallas, la de *entrada*, formada por la fuente, el resistor de la base y el diodo base-emisor del transistor, figura 8.16*a*, y la malla de salida, formada por la fuente, el resistor del colector y la caída de voltaje V_{CE} (figura 8.16*b*).

Análisis de la malla de entrada (base-emisor)

El objetivo de este análisis es encontrar una expresión para la corriente de base I_B. Se aplica la ley de Kirchhoff para establecer la ecuación de voltajes para esta malla.

$$\overset{\checkmark}{-V_{CC}} + \overset{\times\checkmark}{I_B R_B} + \overset{\checkmark}{V_{BE}} = 0 \qquad \text{(ecuación 8.15)}$$

En la ecuación 8.15 se han identificado las variables de valor conocido, con el símbolo ✓ y la única incógnita considerada I_B, con el símbolo ✗. Al despejar la incógnita se tiene

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{CB}}{R_B} \qquad \text{(ecuación 8.16)}$$

Al sustituir valores de las variables conocidas se puede tener el valor numérico para la corriente de base. Este valor, junto con el de la β del transistor, nos ayudará a realizar el análisis de la malla de salida, como sigue.

Análisis de la malla de salida (colector-emisor)

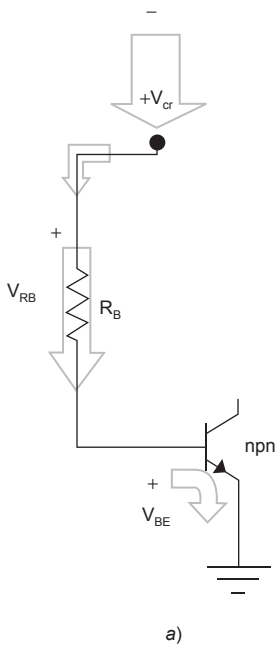
La ecuación voltajes de malla de salida es

$$\overset{\checkmark}{-V_{CC}} + \overset{\times\checkmark}{I_C R_C} + \overset{\times}{V_{CE}} = 0 \qquad \text{(ecuación 8.17)}$$

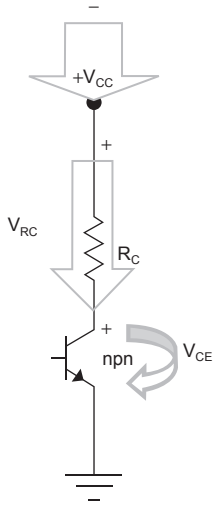
En la ecuación 8.17 se observa que hay dos cantidades desconocidas, la corriente de colector y el voltaje colector-emisor. Puesto que se trata de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, no es posible resolverla por sí misma. Sin embargo, conformando un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas se puede resolver. La ecuación faltante para completar dicho sistema está dada por la ecuación 8.8, por lo que el sistema se integra así:

$$-V_{CC} + I_C R_C + V_{CE} = 0 \qquad \text{(ecuación 8.17)}$$

$$I_C = \beta_{cd} I_B \qquad \text{(ecuación 8.8)}$$



a)



b)

Figura 8.16 Circuito de polarización fija. *a*) Malla de entrada (base-emisor). *b*) Malla de salida (colector-emisor).

COMPETENCIA:
Analizar un circuito de polarización fija con base en las leyes de voltajes y corrientes. [2]

Al sustituir la expresión de I_C de la ecuación 8.8 en la ecuación 8.17:

$$\overset{\checkmark}{-}V_{CC}+\overset{\checkmark}{\beta_{cd}}\overset{\checkmark\checkmark}{I_B R_C}+\overset{\times}{V_{CE}}=0 \qquad \text{(ecuación 8.18)}$$

Al quedar una sola incógnita se despeja:

$$V_{CE}=V_{CC}-\beta_{cd} I_B R_C \qquad \text{(ecuación 8.19)}$$

Tabla 8.1 Voltajes relevantes en el circuito de polarización fija.

Nombre	Medido entre	Representación
Alimentación	Terminales de la fuente	V_{CC}
Caída en resistencia de base	Terminales de RB	V_{RB}
Caída en resistencia de colector	Terminales de RC	V_{RC}
Voltaje base-emisor	Base y emisor	V_{BE}
Voltaje de base	Base y común	V_B
Voltaje colector-emisor	Colector y emisor	V_{CE}
Voltaje de colector	Colector y común	V_C
Voltaje de emisor	Emisor y común	V_E

En la tabla 8.1 se muestran los voltajes relevantes que deben interesar al experimentador en el análisis del circuito de polarización fija.

Al aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes por secciones del circuito de polarización fija se pueden encontrar relaciones entre los voltajes incluidos en la tabla 8.1

$$V_{CC}=V_{\mathrm{RB}}+V_{BE}$$
$$V_{CC}=V_{\mathrm{RC}}+V_{CE}$$
$$V_B=V_{\mathrm{BE}}$$
$$V_E=0$$
$$V_C=V_{CE}+V_{\mathrm{E}}$$
$$V_{\mathrm{BE}}=V_{\mathrm{B}}-V_E$$

EJEMPLO 8.2

Haz el análisis del circuito de polarización fija de la figura 8.17, si el transistor es de silicio. Elabora un cuadro de datos y comprueba mediante el simulador de circuitos.

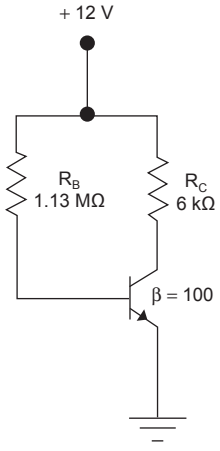


Figura 8.17 Circuito de polarización fija para el ejemplo 8.2.

Solución

Datos:

$V_{CC} = 12$ V
$\beta = 100$
$R_B = 1.13$ MΩ
$R_C = 6$ kΩ

Planteamiento:

Se calcula la corriente de base, mediante el análisis de Kirchhoff. Posteriormente se analiza la malla de salida para calcular el voltaje de colector a emisor.

Desarrollo:

Análisis de la malla de entrada (base-emisor)

La ecuación de voltajes de la malla es

$$-V_{CC} + I_B R_B + V_{BE} = 0$$

Al despejar I_B y sustituir valores, se tiene:

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{CB}}{R_B} = \frac{12\text{ V} - 0.7\text{ V}}{1.13\text{ M}\Omega} = 10\ \mu\text{A}$$

Por la ecuación 8.8 se obtiene la corriente de colector:

$$I_C = \beta_{cd} I_B = (100)\,(10\ \mu\text{A}) = 1\text{ mA}$$

Finalmente, se calcula el voltaje colector-emisor a partir de la ecuación de voltajes de la malla de salida:

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C = 12\text{ V} - (1\text{ mA})\,(6\text{ k}\Omega) = 6\text{ V}.$$

Resumen del análisis

Parámetro	Valor calculado	Parámetro	Valor calculado
I_B	10 μA	V_B	0.7 V
I_C	1 mA	V_{RC}	6 V
I_E	1.01 mA	V_C	6 V
V_{RB}	11.3 V	V_{CE}	6 V
V_{BE}	0.7 V	V_E	0 V

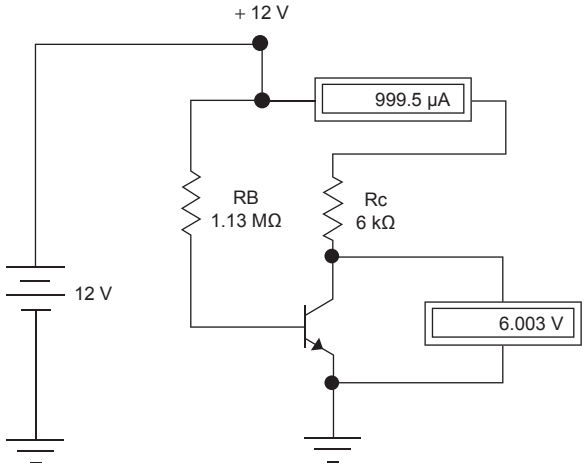


Figura 8.18 Sección de la imagen obtenida de la simulación para el circuito del ejemplo 8.2.

COMPETENCIA:
Analizar un circuito de polarización con estabilización en el emisor, con base en las leyes de voltajes y corrientes. [2]

La comprobación del análisis se lleva a cabo por medio de la simulación del circuito. El resultado de ésta se muestra la figura 8.18.

b) *Circuito de polarización con estabilización en el emisor*

Una variante del circuito de polarización fija es aquella a la cual se le agrega una tercera resistencia, precisamente en la terminal del emisor, como se muestra en la figura 8.19. Esto quiere decir que ya no estará en corto circuito el emisor, sino que entre éste y el común habrá una caída de voltaje diferente de cero, debido a la resistencia que se le agrega y que se le designa por R_E. Se le conoce como circuito de polarización con *estabilización en el emisor*. El análisis de este circuito se hace en el siguiente orden:

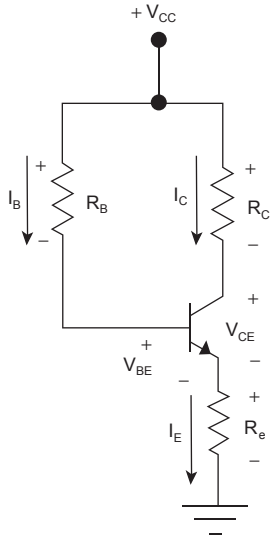


Figura 8.19 Circuito de polarización con estabilización en el emisor.

1. Se identifica la polaridad de la fuente de alimentación. En el caso de un transistor *npn*, el positivo se alimenta a través de R_B y R_C. El negativo de la fuente está conectado al común.
2. La flecha de la terminal de emisor indica el sentido en que fluye la corriente en esta terminal, I_E (sentido convencional, de *más* a *menos*). En un transistor tipo *npn* esta corriente "sale" del transistor, y de acuerdo con la ley de Kirchhoff de corrientes (ecuación 8.10), las corrientes I_B e I_C deben "entrar" al transistor. Esto permite identificar el sentido de las corrientes que pasan a través de R_B, R_C y R_E. En la figura 8.19 fluyen todas de arriba hacia abajo.
3. Sabiendo que el sentido de las corrientes es de positivo a negativo, se pueden asignar las polaridades a las caídas de voltaje en cada resistencia, V_{RB}, V_{RC} y V_{RE} y a la caída de voltaje entre colector y emisor V_{CE}.
4. Una vez identificados los sentidos de corrientes y polaridades de voltajes, se procede al análisis del circuito con los métodos conocidos para cd, como se hizo en el circuito de polarización

fija. Para esto deben distinguirse dos mallas, la de *entrada*, formada por la fuente, el resistor de la base, el diodo base-emisor del transistor y el resistor del emisor, figura 8.20*a*; y la malla de salida, formada por la fuente, el resistor del colector, la caída de voltaje V_{CE} y el resistor de emisor (figura 8.20*b*). Observa que la caída de voltaje en la R_E es *común* a las dos mallas.

Análisis de la malla de entrada (base-emisor)

El objetivo de este análisis es encontrar una expresión para la corriente de base I_B. Al aplicar la ley de Kirchhoff, se establece la ecuación de voltajes para esta malla.

$$\begin{matrix} \checkmark & \times\checkmark & \checkmark & \times\checkmark \\ -V_{CC} + I_B R_B + V_{BE} + I_E R_E = 0 \end{matrix} \qquad \text{(ecuación 8.20)}$$

En la ecuación 8.20 se han identificado las variables de valor conocido, con el símbolo ✓ y las dos incógnitas existentes en la malla I_B, e I_E con el símbolo ✗. Como en el caso anterior, puesto que se trata de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, se requiere de otra ecuación para conjuntar un sistema. Se puede expresar la corriente de emisor en función de la corriente de base conjuntando las ecuaciones 8.8 y 8.10.

$$I_E = I_B + I_C \qquad \text{e} \qquad I_C = \beta I_B$$

Entonces, la ecuación 8.10 queda

$$I_E = I_B + \beta I_B \qquad \text{(ecuación 8.21)}$$

Que es lo mismo que expresar

$$I_E = (\beta + 1)\, I_B \qquad \text{(ecuación 8.22)}$$

Al despejar la incógnita, se tiene que sustituyendo las ecuaciones 8.21 y 8.22 en la ecuación 8.20:

$$-V_{CC} + I_B R_B + V_{BE} + [\,(\beta + 1)\, I_B\,]\, R_E = 0$$

que se puede simplificar en

$$-V_{CC} + I_B [R_B + (\beta + 1)\, R_E\,] + V_{BE} = 0$$

para tener, finalmente una expresión para la corriente de base:

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{[R_B - (\beta + 1) R_E]} \qquad \text{(ecuación 8.23)}$$

La ecuación 8.23 es la expresión para la corriente de base en el circuito de polarización con *estabilidad en el emisor*; si la comparamos con la ecuación 8.16, que es para la corriente de base en el circuito de *polarización fija*, observaremos que son iguales en sus numeradores, pero en el denominador son diferentes, dado que ahora aparece la β y en polarización fija no. Esto quiere decir que la corriente de base en estabilización por resistencia en el emisor está influida por los efectos de β (a mayor valor de β, disminuyen los valores de I_B), mientras que en la polarización fija no lo está.

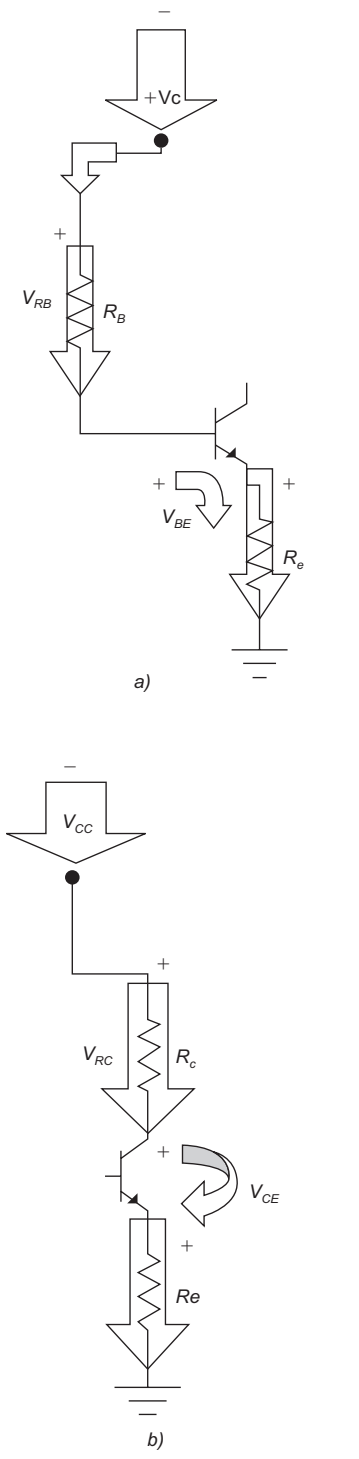


Figura 8.20 Circuito de polarización con estabilidad en el emisor. *a*) Malla de entrada (base-emisor). *b*) Malla de salida (colector-emisor).

Al sustituir valores de las variables conocidas se puede tener el valor numérico para la corriente de base. Este valor, junto con el de la β del transistor, nos ayudará a realizar el análisis de la malla de salida, como sigue.

Análisis de la malla de salida (colector-emisor)

La ecuación voltajes de malla de salida es

$$\underset{\checkmark}{-V_{CC}}+\underset{\checkmark\checkmark}{I_C R_C}+\underset{\times}{V_{CE}}+\underset{\checkmark\checkmark}{I_E R_E}=0 \qquad \text{(ecuación 8.24)}$$

O de otra manera:

$$-V_{CC}+\beta I_B R_C+V_{CE}+(\beta+1)\,I_B R_E=0$$

En la ecuación 8.24 se observa que la única incógnita es el voltaje *colector-emisor*. Al despejarla se tiene:

$$V_{CE}=V_{CC}-V_{CE}-I_B[\beta R_C+(\beta+1)R_E] \qquad \text{(ecuación 8.25)}$$

Si $\beta >> 1$, la ecuación 8.25 puede simplificarse:

$$V_{CE}=V_{CC}-V_{CE}-I_B\beta(R_C+R_E) \qquad \text{(ecuación 8.26)}$$

De la ecuación 8.26 puede llegarse a la conclusión que presenta la expresión 8.3:

$$I_C \cong I_E$$

Un resumen de los parámetros relevantes en el análisis del circuito de polarización con estabilización en el emisor se presenta en la tabla 8.2.

Tabla 8.2 Voltajes relevantes en el circuito de polarización con estabilización en el emisor.

Nombre	Medido entre	Representación
Alimentación	Terminales de la fuente	V_{CC}
Caída en resistencia de base	Terminales de R_B	V_{RB}
Caída en resistencia de colector	Terminales de R_C	V_{RC}
Caída en resistencia de emisor	Terminales de R_E	V_{RE}
Voltaje base-emisor	Base y emisor	V_{BE}
Voltaje de base	Base y común	V_B
Voltaje colector-emisor	Colector y emisor	V_{CE}
Voltaje de colector	Colector y común	V_C
Voltaje de emisor.	Emisor y común	V_E

En la tabla 8.2 se muestran los voltajes relevantes que deben interesar al experimentador en el análisis del circuito de polarización con estabilización en el emisor. De hecho, son los mismos que en polarización fija, sólo que se agrega el voltaje en el resistor de emisor V_{RE}.

Al aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes por secciones del circuito de polarización fija se pueden encontrar relaciones entre los voltajes incluidos en la tabla 8.2.

$$V_{CC} = V_{RB} + V_{BE} + V_{RE}$$

$$V_{CC} = V_{RC} + V_{CE} + V_{RE}$$
$$V_B = V_{BE} + V_{RE}$$
$$V_E = I_E R_E$$
$$V_C = V_{CE} + V_E$$
$$V_{BE} = V_B - V_E$$

EJEMPLO 8.3

Calcula el voltaje colector-emisor del circuito de polarización con estabilización en el emisor de la figura 8.21, si el transistor es de silicio. Elabora un cuadro de datos y comprueba mediante el simulador de circuitos.

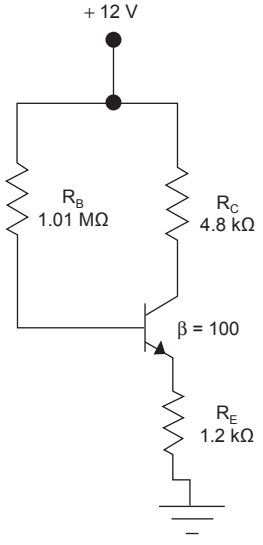


Figura 8.21 Circuito de polarización con estabilización en el emisor. Ejemplo 8.3.

Solución

Datos:

$V_{CC} = 12$ V
$\beta = 100$
$R_B = 1.01$ MΩ
$R_C = 4.8$ kΩ
$R_E = 1.2$ kΩ
$V_{CE} = ?$

Planteamiento:

Se calcula la corriente de base, mediante el análisis de Kirchhoff. Posteriormente se analiza la malla de salida para calcular el voltaje de colector a emisor.

Desarrollo:

Análisis de la malla de entrada (base-emisor)

La ecuación de voltajes de la malla es

$$-V_{CC} + I_B R_B + V_{BE} + (\beta + 1)\, I_B R_E = 0$$

Al despejar I_B y sustituir valores, se tiene:

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{[R_B + (\beta + 1)R_E]} = \frac{12\text{ V} - 0.7\text{ V}}{1.01\text{ MΩ} + (101)1.2\text{ kΩ}} = 9.989\ \mu\text{A}$$

De la ecuación 8.8 se obtiene la corriente de colector:

$$I_C = \beta_{cd} I_B = (100)\ (9.989\ \mu\text{A}) = 0.998\text{ mA}$$

Finalmente, se calcula el voltaje colector-emisor a partir de la ecuación de voltajes de la malla de salida:

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C - I_E R_E =$$

$$= 12\text{ V} - (0.998\text{ mA})(4.8\text{ k}\Omega) - (1.007\text{ mA})(1.2\text{ k}\Omega) = 6.001\text{ V}$$

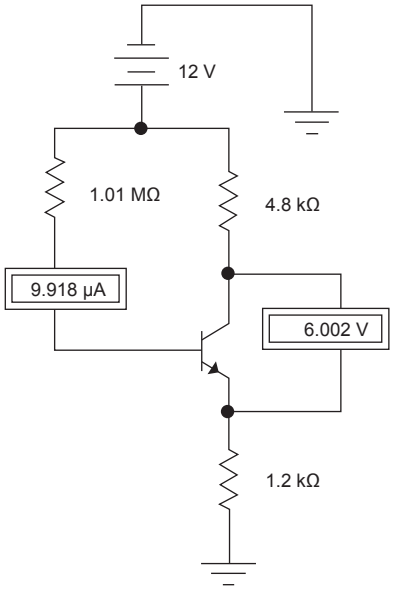


Figura 8.22 Simulación para el circuito del ejemplo 8.3

Resumen del análisis

Parámetro	Valor calculado	Parámetro	Valor calculado
I_B	9.989 µA	V_{RE}	1.208 V
I_C	0.998 mA	V_{RC}	4.79 V
I_E	1.007 mA	V_C	6 V
V_{RB}	10.088 V	V_{CE}	6.001 V
V_{BE}	0.7 V	V_E	1.208 V

La comprobación del análisis se lleva a cabo por medio de la simulación del circuito. El resultado aparece en la figura 8.22.

c) *Circuito de polarización con realimentación de colector a base (semiautomática)*

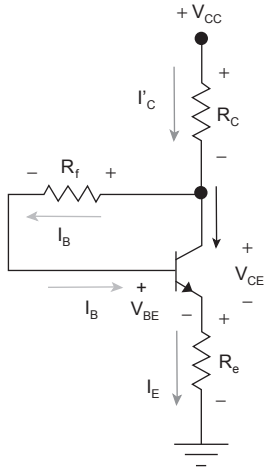


Figura 8.23 Circuito de polarización con realimentación de colector a base (semiautomática).

Un tercer tipo de circuito básico de polarización del BJT, con un mejor nivel de estabilización es el que posee realimentación desde el colector a la base, a través de una resistencia R_f que conecta a ambas terminales, como el que se presenta en la figura 8.23. Este tipo de circuito es menos dependiente de las variaciones de β o de los cambios de temperatura, que los dos anteriores. El análisis de este tipo de circuito se realiza de manera similar a los ya estudiados, iniciando con la determinación de la corriente de base I_B al aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes en la malla de entrada. Al conocer el valor de I_B, se determina el valor de I_C para continuar con el análisis de la malla de salida, lo que permitirá determinar el voltaje entre colector y emisor V_{CE}.

Análisis de la malla de entrada

Observa que la corriente que proviene de la fuente de alimentación se ha identificado como I'_C, la que al llegar al nodo donde se unen la terminal de colector con el resistor R_f, se encuentra con un divisor de corriente, dando origen a dos corrientes I_B, que fluye a través de R_f, y la I_C que fluye hacia el colector.

COMPETENCIA:
Analizar un circuito de polarización con retroalimentación de colector a partir de las leyes de voltajes y corrientes. [2]

$$I'_C = I_B + I_C \qquad \text{(ecuación 8.27)}$$

Las dos corrientes, componentes de I_C, después de pasar a través del transistor, salen de éste por la terminal de emisor dando por resultado que:

$$I_E = I_B + I_C \qquad \text{(ecuación 8.28)}$$

Lo que nos permite ver que $I'_C = I_E$ (ecuación 8.29)

Con estas observaciones, y al aplicar la ley de Kirchhoff de voltajes se obtiene la ecuación de voltajes para la malla de entrada:

$$-V_{CC} + I'R_C + I_B R_f + V_{BE} + I_E R_E = 0 \qquad \text{(ecuación 8.30)}$$

Al sustituir en la ecuación 8.27 las expresiones para cada una de las corrientes y dejar la expresión en función de una sola de ellas, la I_B, se tiene una nueva expresión, equivalente a la anterior.

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{(\beta + 1)(R_E + R_C) + R_f} \qquad \text{(ecuación 8.31)}$$

La ecuación 8.31 presenta de nuevo una dependencia de I_B respecto a los valores de β; lo que traerá por consecuencia, a primera vista, variaciones en la corriente de colector con las variaciones de β según la expresión 8.8.

Tabla 8.3 Expresiones obtenidas para la corriente de base en tres diferentes circuitos de polarización del BJT. El formato es el mismo.

Circuito de polarización	Modelo para corriente de base
Fija	$I_B = \dfrac{V_{CC} - V_{CB}}{R_B}$
Con estabilización en emisor	$I_B = \dfrac{V_{CC} - V_{BE}}{[R_B + (\beta + 1)R_E]}$
Con retroalimentación colector-base	$I_B = \dfrac{V_{CC} - V_{BE}}{(\beta + 1)(R_E + R_C) + R_f}$

Veamos más detenidamente lo anterior. La corriente de base en los tres casos presenta un modelo cuyo formato es un cociente que contiene en el numerador la diferencia de dos voltajes, a los que se les puede identificar por $V = V_{CC} - V_{BE}$. En el denominador se tiene una resistencia conectada a la base identificada por R_B o por R_f en el último caso, a la que pode-

mos llamarle simplemente R_B para todos los casos. Además de R_B otras resistencias, que son R_E y R_C; al efecto de estas resistencias podemos llamarle R_{eq} (resistencia equivalente). Finalmente, el formato para la expresión de corriente de base puede ser

$$I_B = \frac{V}{[R_B + (\beta + 1)R_{eq}]} \qquad \text{(ecuación 8.32)}$$

De acuerdo con la ecuación 8.8, la corriente en el colector será entonces:

$$I_C = \beta I_B = \frac{\beta V}{[R_B + (\beta + 1)R_{eq}]} \qquad \text{(ecuación 8.33)}$$

Observemos que mientras mayor sea el valor de R_{eq}, comparado con el de R_B, ($R_{eq} >> R_B$), la ecuación 8.33 tiende a ser

$$I_C = \beta I_B \cong \frac{\beta V}{\beta R_{eq}} \cong \frac{V}{R_{eq}}$$

Con lo cual se puede llegar a la conclusión de que cuanto mayor sea R_{eq} comparado con R_B ($\beta R_{eq} >> R_B$), la corriente en el colector tiende a ser cada vez *más independiente de los valores de* β.

Finalmente el voltaje entre colector y emisor se calcula de manera semejante como se hizo con los circuitos anteriores, analizando la malla de salida, para obtener:

$$V_{CE} = V_{CC} - I'_C R_C - I_E R_E \qquad \text{(ecuación 8.34)}$$

EJEMPLO 8.4

Calcula el voltaje colector-emisor del circuito de polarización con realimentación colector-base de la figura 8.24, si el transistor es de silicio y tiene una β = 100. Elabora un cuadro de concentración de datos del análisis y haz la simulación del circuito para efectos de comprobación del análisis teórico.

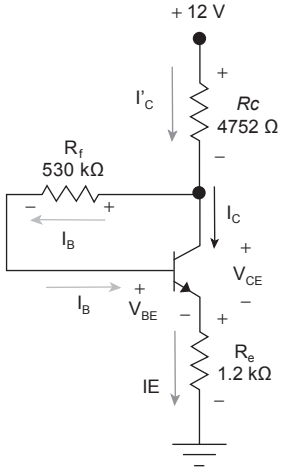


Figura 8.24 Circuito de polarización semiautomática para el ejemplo 8.4.

Solución

Datos:

$V_{CC} = 12$ V
$\beta = 100$
$R_B = 530$ kΩ
$R_C = 4752$ kΩ
$R_E = 1.2$ kΩ
$V_{CE} = ?$

Planteamiento:

Se calcula la corriente de base, mediante el análisis de Kirchhoff. Posteriormente se analiza la malla de salida para calcular el voltaje de colector a emisor.

Desarrollo:

Análisis de la malla de entrada (base-emisor)

La ecuación de voltajes de la malla es

$$-V_{CC} + I'R_C + I_B R_f + V_{BE} + I_E R_E = 0$$

Al despejar I_B y sustituir valores, se tiene:

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{(\beta + 1)(R_E + R_C) + R_f} = \frac{12\text{ V} - 0.7\text{ V}}{(101)(1.2\text{ k}\Omega + 4.752\text{ k}\Omega) + 530\text{ k}\Omega}$$

$$I_B = 9.989\ \mu\text{A}$$

De la ecuación 8.8 se obtiene la corriente de colector:

$$I_C = \beta_{cd} I_B = (100)\,(9.989\ \mu\text{A}) = 0.998\text{ mA}$$

Finalmente, se calcula el voltaje colector-emisor a partir de la ecuación de voltajes de la malla de salida:

$$V_{CE} = V_{CC} - I'_C R_C - I_E R_E = V_{CC} - (\beta + 1)\, I_B\, (R_C - R_E)$$

Donde $I_E = I'_C = I_B + I_C = 9.989\ \mu\text{A} + 0.998\text{ mA} \cong 1\text{ mA}$

$$V_{CE} = 12\text{ V} - [(1\text{ mA})\,(4.752\text{ k}\Omega + 1.2\text{ k}\Omega)] = 6.048\text{ V}$$

COMPETENCIA:
Analizar un circuito de polarización automática aplicando las leyes de voltajes y corrientes. [2]

Tabla 8.4 Resumen del análisis para el circuito del ejemplo 8.4.

Parámetro	Valor calculado	Parámetro	Valor calculado
I_B	9.989 μA	V_{RE}	1.208 V
I_C	0.998 mA	V_{R_c}	4.785 V
I_E	1.007 mA	V_C	7.256 V
V_{R_f}	5.294 V	V_{CE}	6.048 V
V_{BE}	0.7 V	V_E	1.208 V

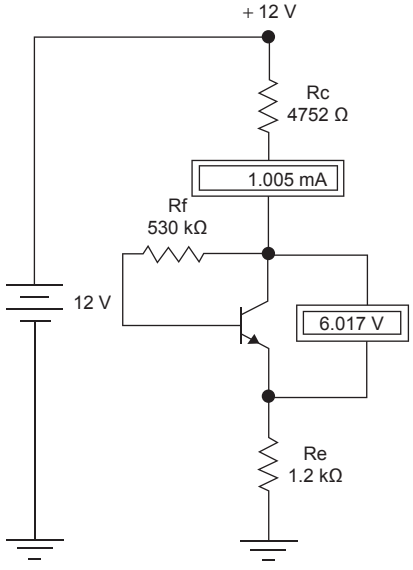


Figura 8.25 Imagen que presenta un simulador para el circuito del ejemplo 8.4.

La comprobación del análisis se lleva a cabo por medio de la simulación del circuito. El resultado de ésta se muestra en la figura 8.25.

Circuito de polarización por divisor de voltaje (automática)

Un tipo de circuito básico de polarización del BJT, con un nivel superior de estabilización es el que tiene un par de resistencias en la base R_1 y R_2 que se comporta como si fueran un divisor de voltaje, como el

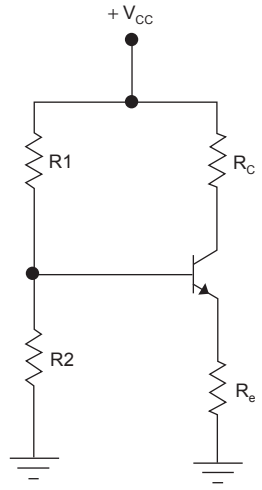


Figura 8.26 Circuito de polarización independiente de β, o polarización automática para un BJT.

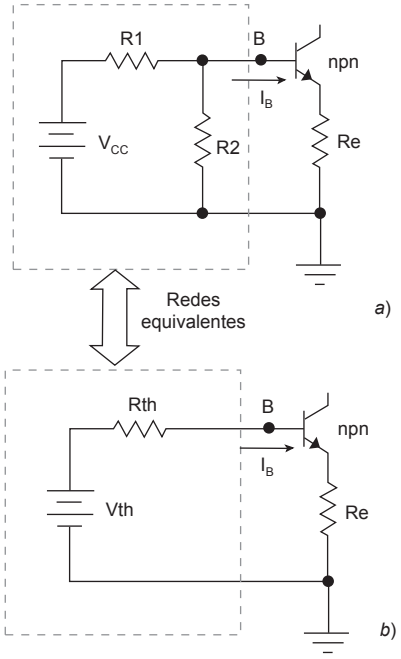


Figura 8.27 *a*) Red conectada a la entrada del circuito de polarización automática. *b*) Equivalente de Thévenin de la red de entrada.

que se presenta en la figura 8.26. Este tipo de circuito es *prácticamente independiente de las variaciones de* β o de los cambios de temperatura, que los tres anteriores. Para el análisis de este tipo de circuito se tiene que obtener un circuito equivalente de Thévenin en la red de entrada; se le llama método de *análisis exacto*,[3] de la siguiente forma:

Análisis exacto

Consideremos la red de entrada del circuito de la figura 8.26 por separado, como se muestra en la figura 8.27*a*. Está formada por dos mallas; una de ellas la integran la fuente de alimentación y los resistores R_1 y R_2 y la otra la forman R_2, el diodo *base-emisor* del BJT y el resistor R_E. La sección formada por la fuente y los dos resistores R_1 y R_2 (señalada por una línea punteada en gris oscuro) se pueden sustituir por un circuito equivalente de Thévenin, que estará formado por la fuente de Thévenin V_{Th} conectada en serie con una resistencia *equivalente de Thévenin* (R_{Th}), como se muestra en la figura 8.27*b*.

Para obtener el valor de R_{Th} se sustituye la fuente de alimentación original por un cortocircuito (figura 8.28*a*), lo que dará por resultado que R_1 y R_2 quedan conectados en paralelo.

$$R_{Th} = R_1 \parallel R_2 \qquad \text{(ecuación 8.35)}$$

De acuerdo al teorema de Thévenin, la fuente de voltaje equivalente es aquella cuyo valor corresponde al voltaje a circuito abierto en la red que se analiza. La figura 8.28*b* muestra esta sección del circuito, desconectada de la base del BJT, quedando sus terminales en circuito abierto. El valor de la fuente de Thévenin será el voltaje que existe en estas condiciones de circuito abierto en las terminales de R_2.

$$V_{Th} = \frac{R_2 V_{CC}}{R_1 + R_2} \qquad \text{(ecuación 8.36)}$$

Cuando se tienen los valores de los componente del circuito equivalente de Thévenin, se "conecta" a la base del BJT, al sustituir a los elementos de la malla de entrada original, configurándose una red como la que se ve en la figura 8.27*b*. En ésta se puede ver ahora una sola malla conformada por V_{Th}, R_{Th}, el diodo *base-emisor* y R_E. A partir de este paso se puede obtener una expresión para la corriente de base, al aplicar las mismas técnicas utilizadas en el análisis de otros circuitos de polarización. La ecuación de voltajes en la malla de entrada es ahora:

$$-V_{Th} + I_B R_{Th} + V_{BE} + I_E R_E = 0 \qquad \text{(ecuación 8.37)}$$

De las ecuaciones 8.10 y 8.21, y despejando para I_B, se obtiene la expresión para la corriente de base:

$$I_B = \frac{V_{Th} - V_{BE}}{R_{Th} + (\beta + 1) R_E} \qquad \text{(ecuación 8.38)}$$

[3] En algunos circuitos de polarización automática se usa también un método de *análisis aproximado*, sólo que no es de aplicación general, sino solo bajo ciertas condiciones del circuito, por lo cual no se incluye.

Cuando ya se conoce la expresión que permite calcular el valor de I_B, este último se sustituye en la ecuación 8.8, para encontrar el valor de la corriente en el colector y, poder seguir ahora con el análisis de la malla de salida en el circuito original, formada por la fuente de alimentación V_{CC}, el resistor del colector, el voltaje entre colector y emisor y el resistor del emisor, figura 8.27.

Al aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff se obtiene la ecuación de la malla de salida:

$$-V_{CC} + I_C R_C + V_{CE} + I_E R_E = 0 \qquad \text{(ecuación 8.39)}$$

A partir de la ecuación 8.39 se despeja para obtener el voltaje entre colector y emisor:

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C - I_E R_E\ 0 \qquad \text{(ecuación 8.40)}$$

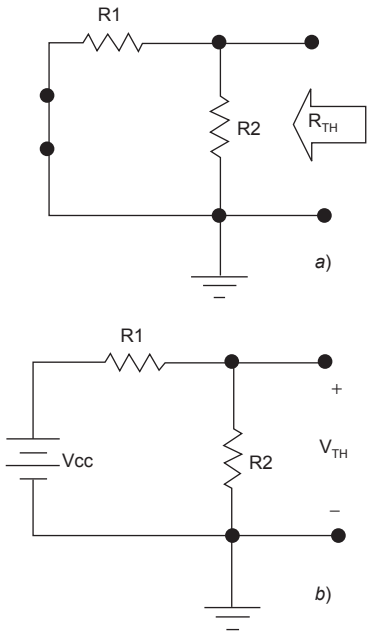


Figura 8.28 Cálculo del circuito equivalente de Thévenin. *a*) Resistencia equivalente. *b*) Voltaje de Thévenin.

EJEMPLO 8.5

Con el método de análisis exacto, calcula el voltaje colector-emisor del circuito de polarización automática de la figura 8.29, si el transistor es de silicio, con una $\beta = 100$. Elabora un cuadro de concentración de datos del análisis y haz la simulación del circuito para efectos de comprobación del análisis teórico.

Solución

Datos:

$V_{CC} = 12$ V
$\beta = 100$
$R_1 = 57.1$ kΩ
$R_2 = 12$ kΩ
$R_C = 4.8$ kΩ
$R_E = 1.2$ kΩ

Planteamiento:

Se calcula la corriente de base, mediante el cálculo del equivalente de Thévenin, haciendo el análisis de Kirchhoff.

A partir de la corriente de base se calcula la corriente de colector y posteriormente se analiza la malla de salida para calcular el voltaje de colector a emisor.

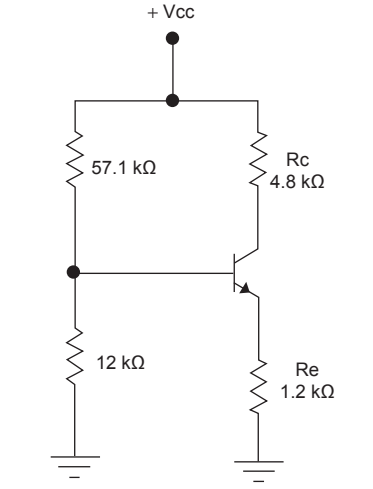


Figura 8.29 Circuito de polarización automática para el ejemplo 8.5.

Desarrollo:

Análisis de la malla de entrada por medio de un equivalente de Thévenin.

Cálculo de la corriente de base en la malla de entrada

a) Cálculo de la resistencia de Thévenin:

Procediendo como en la figura 8.28*a* la resistencia equivalente de R_1 y R_2 es:

$$R_1 \,||\, R_2 = \frac{(57.1\ \text{k}\Omega)(12\ \text{k}\Omega)}{57.1\ \text{k}\Omega + 12\ \text{k}\Omega} = 9916\ \Omega$$

b) Cálculo del voltaje de Thévenin:

La figura 8.*28b* sugiere encontrar el voltaje a circuito abierto (V_{OC}) en la red, lo que es lo mismo que el voltaje en R_2. Éste se determina por medio de un divisor de voltaje, donde la alimentación es la fuente $V_{CC.}$

$$V_{Th} = V_{R2} = \frac{(V_{CC})(R_2)}{R_1 + R_2} = \frac{(12\text{ V})(12\text{ k}\Omega)}{57.1\text{ k}\Omega + 12\text{ k}\Omega} = 2.083\text{ V}$$

La red que se obtiene es como la que muestra la figura 8.23*b*. Al sustituir estos valores, se hace el análisis de la malla equivalente de entrada. La ecuación de voltajes de ésta queda así:

$$-V_{Th} + I_B R_{Th} + V_{BE} + I_E R_E = 0$$

donde $$I_E = (\beta + 1)\, I_B$$

Al sustituir y despejar, se tiene la expresión para I_B.

$$I_B = \frac{V_{Th} - V_{BE}}{R_{Th} + (\beta + 1)R_E} = \frac{2.083\text{ V} - 0.7\text{ V}}{9916\ \Omega + (101)(1.2\text{ k}\Omega)} = 10.54\ \mu\text{A}$$

$$I_B = 10.54\ \mu\text{A}$$

De la ecuación 8.8 se obtiene la corriente de colector:

$$I_C = \beta_{cd} I_B = (100)\,(10.54\ \mu\text{A}) = 1.054\text{ mA}$$

Cálculo del voltaje colector-emisor en la malla de salida

Finalmente, se calcula el voltaje colector-emisor a partir de la ecuación de voltajes de la malla de salida:

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C - I_E R_E = V_{CC} - (\beta + 1) I_B (R_C - R_E)$$

Donde $$I_E = I_C = I_B + I_C = 10.54\ \mu\text{A} + 1.054\text{ mA} \cong 1\text{ mA}$$

$$V_{CE} = 12\text{ V} - [(1\text{ mA})(4.8\text{ k}\Omega + 1.2\text{ k}\Omega)] = 6\text{ V}$$

Tabla 8.5 Resumen del análisis para el circuito de polarización del ejemplo 8.5.

Parámetro	Valor calculado	Parámetro	Valor calculado
I_B	10.54 μA	V_{RE}	1.277 V
I_C	1.054 mA	V_{R_C}	4.723 V
I_E	1.064 mA	V_C	7.277 V
V_{R_1}	10.023 V	V_{CE}	6 V
V_{R_2}	1.977 V	V_E	1.277 V
V_{BE}	0.7 V	V_B	1.977 V

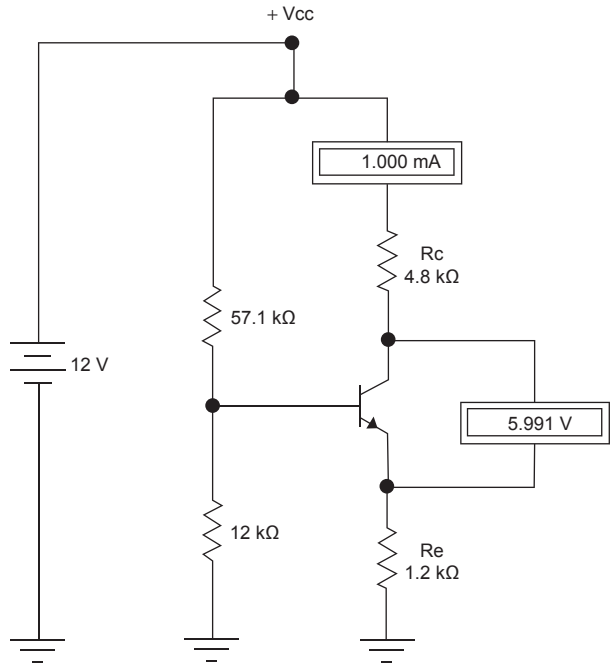


Figura 8.30 Simulación para el circuito del ejemplo 8.5.

La comprobación del análisis se lleva a cabo por medio de la simulación del circuito. El resultado de ésta se presenta en la figura 8.30.

8.7.2 Diseño de circuitos de polarización

COMPETENCIA:
Desarrollar técnicas para el diseño de circuitos de polarización de un BJT. [2]

Así como en las matemáticas existen operaciones contrarias entre sí, como la suma y la resta, o la multiplicación y la división, también se tiene la operación inversa al *análisis* de circuitos de polarización, que es la *síntesis* o mejor conocida como *diseño* de circuitos. Si el objetivo del análisis de un circuito de polarización consiste en determinar los voltajes y corrientes asociados a los *elementos dados* del circuito, el objetivo del diseño es determinar los valores de los elementos resistivos y alimentación del circuito, *dadas las características* de operación del transistor BJT; es decir, la corriente I_{CQ} y el voltaje entre colector y emisor V_{CEQ}. Se verá a continuación un método para el diseño de circuitos de polarización en configuración emisor común, el cual se basa en consideraciones, a las que llamaremos *criterios de diseño,* que se han obtenido a lo largo de la experiencia de muchos investigadores en el área de la electrónica. A su vez estos criterios se apoyan en el análisis de las características de salida del transistor en uso, mediante la llamada técnica de la recta de carga.

Etapas en el diseño de un circuito de polarización

Dado un transistor BJT, que se desea opere como un dispositivo amplificador, se debe asociar a él un circuito de polarización que le provea de los voltajes y corrientes necesarios para ubicar su punto de operación

Q en donde el experimentador lo ha determinado. Para lograr ese circuito de polarización se sigue un proceso matemático que consiste en las siguientes etapas.

1. Trazar la recta de carga del transistor, a partir de sus curvas características, determinando $I_{Cmáx}$, $V_{CEmáx}$, I_B. Las curvas de salida del transistor se obtienen mediante un *trazador de curvas* en el laboratorio.
2. Ubicar el punto de operación Q al *centro* de la región activa del transistor y sobre la recta de carga obtenida. Tomar lectura en la gráfica, de los valores de operación o coordenadas de Q, lo que nos dará V_{CEQ} e I_{CQ}.
3. A partir de las características del punto de operación (V_{CEQ} e I_{CQ}) se aplican criterios particulares de diseño para cada tipo de circuito como se verá a continuación.

COMPETENCIA:
Desarrollar la técnica de diseño de un circuito de polarización fija para un BJT con base en las leyes de voltajes y corrientes. [2]

Diseño de un circuito de polarización fija

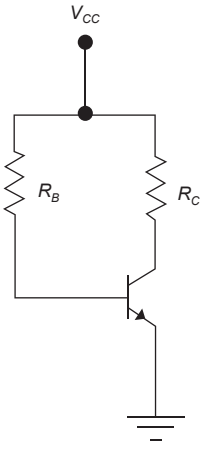


Figura 8.31 Circuito de polarización fija para un BJT tipo *npn*.

El circuito de polarización fija es el más sencillo que se utiliza para ubicar el *punto de operación Q* de un BJT en la región activa, y hacer que funcione como amplificador. Consiste en conectar el emisor directamente al común (tierra) y colocar resistencias entre las terminales de base y de colector y la fuente de alimentación, como muestra la figura 8.31, para controlar los voltajes y corrientes necesarios, según las características del punto Q. La operación de diseño tiene como propósito encontrar los valores de esas resistencias de polarización.

Primera etapa

Se obtienen las curvas características del BJT, mediante un trazador de curvas. Se dibujan en el papel para tenerlas como documento de trabajo; ahora tomemos como ejemplo las curvas presentadas en la figura 8.32. Estas curvas, también contienen información acerca de I_C y V_{CE}, como la ecuación de voltajes de la malla de salida del circuito de polarización (ecuación 8.41). Esto significa que entre las curvas y

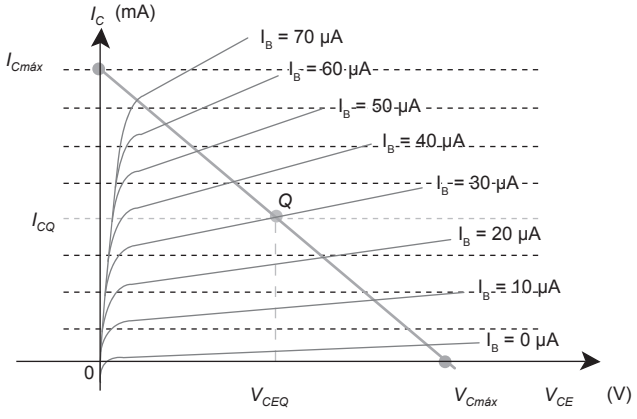


Figura 8.32 Análisis mediante la recta de carga y la ubicación de un punto de operación *Q*.

el circuito de polarización hay una estrecha relación. Para encontrar esta relación se utiliza la técnica de la *recta de carga*, que es un proceso gráfico, de la siguiente manera:

La ecuación de voltajes de la malla de salida de este circuito es:

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C \qquad \text{(ecuación 8.41)}$$

La 8.41 es una ecuación de primer grado, que corresponde al lugar geométrico de una línea recta cuyo modelo matemático es

$$y = mx + b \qquad \text{(ecuación 8.42)}$$

donde:

$y =$ variable dependiente de la función; y sus valores se grafican en el eje vertical.
$x =$ variable independiente, cuyos valores se grafican en el eje horizontal.
$m =$ pendiente (tangente del ángulo de inclinación) de la línea recta, dada por $m = \dfrac{y}{x}$
$b =$ ordenada en el origen (el punto donde la recta cruza al eje de las ordenadas).

Observa que en la ecuación 8.42, si se hace $x = 0$, se tratará de un punto de la recta, ubicado sobre el eje de las *ordenadas*, cuyas coordenadas serán $(0, y)$, resultando que $y = b$. Si por el contrario, se traza un punto con coordenadas $(x, 0)$, se trata de un punto ubicado sobre el eje de las *abscisas*, en el cual $x = \dfrac{-b}{m}$

La correspondencia de términos entre las ecuaciones 8.41 y 8.42 es:

$$V_{CE} \Rightarrow x$$

$$I_C \Rightarrow y$$

$$m = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{I_C}{V_{CE}} = \frac{1}{R}$$

De manera similar, haciendo $V_{CE} = 0$, en la ecuación 8.41, se tiene que:

$$I_{Cmáx} = \frac{V_{CC}}{R_C} \Big|_{V_{CE}} = 0 \qquad \text{(ecuación 8.43)}$$

Y haciendo $I_C = 0$:

$$V_{CEmáx} = V_{CC} \Big|_{I_C} = 0 \qquad \text{(ecuación 8.44)}$$

Estas ecuaciones nos darán dos puntos, uno sobre el eje de las *abscisas* (8.44), que corresponde a lo que será el valor máximo de V_{CE}, que se identifica $V_{CEmáx}$, con coordenadas $(V_{CEmáx}, 0)$; y otro ubicado sobre el

eje de las *ordenadas* (8.43) correspondiente a un valor máximo de la I_C, identificado por $I_{Cmáx}$ cuyas coordenadas serán (0, $I_{Cmáx}$). Al unir estos dos puntos se obtiene la *recta de carga* en cuestión. En la figura 8.32 se identifican estas coordenadas por medio de puntos en color gris oscuro, y la línea que los une es la *recta de carga*.

En la gráfica que se obtiene con las curvas características del transistor y la recta de carga, se puede observar que si varía V_{CE}, también lo hará I_C, desplazándose sobre la línea recta obtenida; para cada valor de V_{CE} corresponde uno de I_C.

En esta gráfica se puede determinar experimentalmente un valor aproximado de la β_{cd} del transistor, en punto de operación Q, ya que se tiene un valor para la corriente de colector (I_{CQ}) y uno para la corriente de base I_B.

Segunda etapa

Ubicar al punto de operación Q del transistor al centro de la región activa de sus curvas. Para esto, en la gráfica se busca el punto cuyas coordenadas sean (V_{CEQ}, I_{CQ}) que deberá estar ubicado sobre la recta de carga. Donde

$$V_{CEQ} = \tfrac{1}{2} V_{CEmáx}, \quad I_{CQ} = \tfrac{1}{2} I_{Cmáx} \qquad \text{(ecuaciones 8.45)}$$

Tercera etapa: criterios de diseño

La fuente de polarización de cd para el circuito será de un valor

$$V_{CC} = V_{CEmáx} \qquad \text{(ecuación 8.46)}$$

De la ecuación 8.41 se tiene que la resistencia de colector será:

$$R_C = \frac{V_{CC} - V_{CEQ}}{I_{CQ}} \qquad \text{(ecuación 8.47)}$$

De las curvas de la gráfica se puede obtener el valor de la corriente de base que corresponde al punto de operación Q. Como I_B es la que deberá circular por el resistor de la base R_B, al aplicar la ley de Ohm se puede encontrar el valor de esta última. De la malla de entrada del circuito se sabe que (ecuación 8.16)

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{CB}}{R_B}$$

Por tanto,

$$R_B = \frac{V_{CC} - V_{CB}}{I_B} \qquad \text{(ecuación 8.48)}$$

EJEMPLO 8.6

Diseña un circuito de polarización fija para un BJT de silicio tipo *npn* cuyas características son $V_{CEQ} = 7$ V, $I_{CQ} = 8$ mA y una $\beta = 150$. Comprueba por medio de una simulación del circuito.

Solución

Datos:

$V_{CEQ} = 7$ V
$I_{CQ} = 8$ mA
$\beta = 150$
$V_{T(Si)} = 0.7$ V
$R_B = ?$
$R_C = ?$
$V_{CC} = ?$

Planteamiento:

Puesto que se tienen como datos las características del punto de operación *Q* para el BJT, el circuito de polarización se puede obtener siguiendo el procedimiento de diseño explicado anteriormente.

Desarrollo:

a) La fuente de polarización:

El valor del voltaje de polarización se obtiene a partir de la ecuación 8.45:

$$V_{CC} = 2\ V_{CEQ} = (2)(7\text{ V}) = 14\text{ V}$$

b) Cálculo del resistor del colector R_C

Utilizando la ecuación 8.47:

$$R_C = \frac{V_{CC} - V_{CEQ}}{I_{CQ}} = \frac{14\text{ V} - 7\text{ V}}{8\text{ mA}} = 875\ \Omega.$$

c) El resistor de la base R_B.

Como se conoce la corriente de colector y el valor de β, se calcula la corriente de operación en la base:

$$I_B = \frac{I_{CQ}}{\beta} = \frac{8\text{ mA}}{150} = 53\ \mu\text{A}$$

Con este valor y utilizando la ecuación 8.16

$$R_B = \frac{V_{CC} - V_{CB}}{I_B} = \frac{14\text{ V} - 0.7\text{ V}}{53\ \mu\text{A}} \cong 251\ \text{k}\Omega$$

Con los valores de los resistores se puede construir el circuito de polarización fija, como se ve en la figura 8.33.

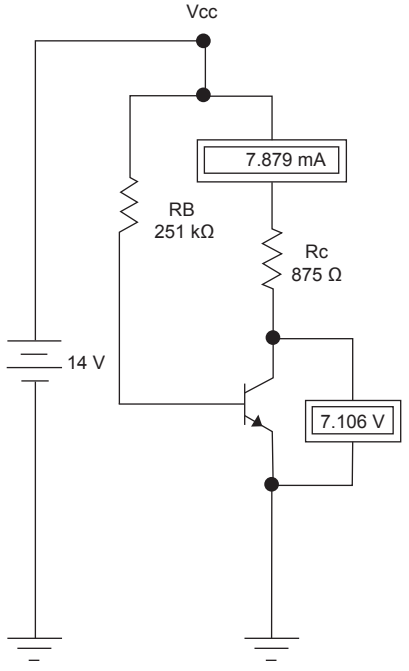


Figura 8.33 Imagen de la simulación del circuito de polarización fija para el ejemplo 8.6.

La confiabilidad del diseño presentado en el ejemplo 8.6 se puede obtener al momento de ensamblar el circuito y realizar mediciones; o bien con referencia a los datos que proporcionan los *medidores virtuales* del simulador. Para ello se determina primeramente la desviación o error relativo (%), tomando como referentes los valores esperados para I_{CQ} y V_{CEQ}.

$$E_r(\%) = \frac{|\text{Valor esperado} - \text{Valor calculado}|}{\text{Valor esperado}} \times 100 \quad \text{(ecuación 8.49)}$$

La desviación del cálculo para I_{CQ}:

$$E_r(\%) = \frac{|8\text{ mA} - 7.879\text{ mA}|}{8\text{ mA}} \times 100 = 1.51\ \%$$

La desviación del cálculo para V_{CEQ}:

$$E_r(\%) = \frac{|7\text{ mA} - 7.106\text{ mA}|}{7\text{ mA}} \times 100 = 1.51\ \%$$

Lo que da una confiabilidad de 98.49 % aproximadamente.

COMPETENCIA:
Desarrollar la técnica de diseño de un circuito de polarización con estabilización en el emisor para un BJT, con base en las leyes de voltajes y corrientes. [2]

Diseño de un circuito de polarización con estabilización en el emisor

Este tipo de circuito es como el mostrado en la figura 8.19; así que el propósito del proceso de diseño es encontrar los valores de R_E, R_C y R_B, cuando son conocidas las características del transistor I_{CQ}, V_{CEQ} y la β, y asignarle un valor a la fuente de polarización.

En este caso, el procedimiento para el diseño del circuito contiene las mismas etapas que las usadas para el caso de polarización fija; por tanto, algunos de los pasos serán ahora omitidos y referidos a las explicaciones anteriores.

Primera etapa

Se obtienen las curvas características del BJT, mediante un trazador de curvas. Se dibujan en el papel para tenerlas como documento de trabajo; tomemos como ejemplo nuevamente, las curvas presentadas en la figura 8.32.

La ecuación de voltajes de la malla de salida de este circuito es

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C - I_E R_E \quad \text{(ecuación 8.50)}$$

Donde $I_C \cong I_E$; así que, haciendo $I_C = 0$ se tiene que

$$V_{CEmáx} = V_{CC}\,|_{I_C = 0} \quad \text{(ecuación 8.51)}$$

Y haciendo $V_{CE} = 0$

$$I_{Cmáx} = \frac{V_{CC}}{R_C + R_E}\,|_{V_{CE} = 0} \quad \text{(ecuación 8.52)}$$

Estas ecuaciones nos darán dos puntos, uno sobre el eje de las *abscisas* (ecuación 8.51), que corresponde a lo que será el valor máximo de V_{CE}, que se identifica $V_{CEmáx}$, con coordenadas ($V_{CEmáx}$, 0); y otro ubicado sobre el eje de las *ordenadas* (ecuación 8.52) correspondiente a un valor máximo de I_C, identificado por $I_{Cmáx}$ cuyas coordenadas

serán (0, $I_{Cmáx}$). Uniendo estos dos puntos se obtiene la *recta de carga* en cuestión. En la figura 8.32 se identifican estas coordenadas por medio de puntos en gris oscuro, y la línea que los une es la *recta de carga*.

Segunda etapa

Ubicar al punto de operación Q del transistor al centro de la región activa de sus curvas. Para esto, en la gráfica se busca el punto cuyas coordenadas sean (V_{CEQ}, I_{CQ}) que deberá estar ubicado sobre la recta de carga. Donde

$$V_{CEQ} = \tfrac{1}{2} V_{CEmáx}, \quad I_{CQ} = \tfrac{1}{2} I_{Cmáx} \qquad \text{(ecuaciones 8.53)}$$

El punto de operación se identifica en gris claro en la gráfica.

Tercera etapa: criterios de diseño

La fuente de polarización de cd para el circuito será de un valor

$$V_{CC} = V_{CEmáx} \qquad \text{(ecuación 8.54)}$$

Criterio I, para diseño: se asigna un voltaje al emisor de un valor de:

$$V_E = \frac{1}{10} V_{CC} \qquad \text{(ecuación 8.55)}$$

Donde el valor de V_{CC} está dado por la ecuación 8.51.

Con base en este criterio se está en posibilidad de calcular R_E considerando la ley de Ohm.

$$R_E = \frac{V_E}{I_E} \qquad \text{(ecuación 8.56)}$$

De la ecuación 8.50 se tiene que la resistencia de colector será:

$$R_C = \frac{V_{CC} - V_{CE} - I_E R_E}{I_C} \qquad \text{(ecuación 8.57)}$$

De las curvas de la gráfica se puede obtener el valor de la corriente de base que corresponde al punto de operación Q. Como I_B es la que deberá circular por la resistencia de base R_B, al aplicar la ley de Ohm se puede encontrar el valor de ésta última. De la malla de entrada del circuito se sabe que (ecuación 8.23)

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{[R_B + (\beta + 1) R_E]}$$

Por tanto,

$$R_B = \frac{V_{CC} - V_{CB} - V_E}{I_B} \qquad \text{(ecuación 8.58)}$$

EJEMPLO 8.7

Diseña un circuito de polarización con estabilización en el emisor para un BJT de silicio tipo *npn* cuyas características son $V_{CEQ} = 7$ V, $I_{CQ} = 8$ mA y una $\beta = 150$. Comprueba por medio de una simulación del circuito.

Solución

Datos:

$V_{CEQ} = 7$ V
$I_{CQ} = 8$ mA
$\beta = 150$
$V_{T(Si)} = 0.7$ V
$R_B = ?$
$R_C = ?$
$R_E = ?$
$V_{CC} = ?$

Planteamiento:

Puesto que se tienen como datos las características del punto de operación *Q* para el BJT, el circuito de polarización se puede obtener siguiendo el procedimiento de diseño explicado anteriormente.

Desarrollo:

a) La fuente de polarización:

El valor del voltaje de polarización se obtiene a partir de la ecuación 8.45:

$$V_{CC} = 2\ V_{CEQ} = (2)(7\text{ V}) = 14\text{ V}$$

b) El voltaje en el emisor, de acuerdo a la ecuación 8.55, será:

$$V_E = \frac{1}{10}\ V_{CC} = (0.1)\ (14\text{ V}) = 1.4\text{ V}$$

De acuerdo a la ley de Ohm, el resistor del emisor es:

$$R_E = \frac{V_E}{I_E} = \frac{1.4\text{ V}}{8\text{ mA}} = 175\ \Omega$$

c) El resistor del colector R_C., de acuerdo con la ecuación 8.57 es:

$$R_C = \frac{V_{CC} - V_{CE} - I_E R_E}{I_C} = \frac{14\text{ V} - 7\text{ V} - (8\text{ mA})(175\ \Omega)}{8\text{ mA}} = 700\ \Omega$$

d) Cálculo del resistor de la base R_B.

Como se conoce la corriente de colector y el valor de β, se calcula la corriente de operación en la base:

$$I_B = \frac{I_{CQ}}{\beta} = \frac{8\text{ mA}}{150} = 53\ \mu\text{A}$$

El resistor de la base R_B, de acuerdo con la ecuación 8.58 es:

$$R_B = \frac{V_{CC} - V_{CB} - V_E}{I_B}$$

$$R_B = \frac{14\,\text{V} - 0.7\,\text{V} - 1.4\,\text{V}}{53\,\mu\text{A}} = 224\,528\,\text{k}\Omega$$

Con los valores de los resistores se puede construir el circuito de polarización con estabilización en el emisor, como se ve en la figura 8.34.

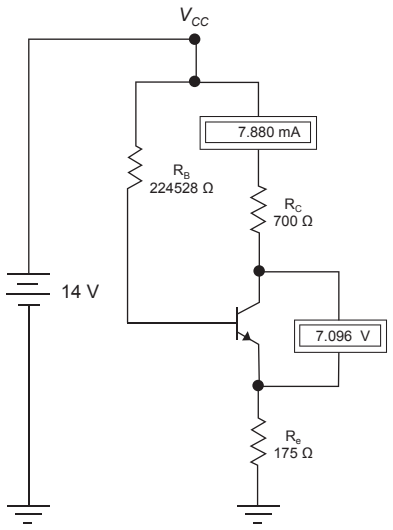


Figura 8.34 Imagen de la simulación del circuito de polarización con estabilización en el emisor, para el ejemplo 8.7.

La confiabilidad del diseño presentado en el ejemplo 8.7 se puede obtener al momento de ensamblar el circuito y realizar mediciones en el laboratorio; o bien con referencia a los datos que proporcionan los "medidores virtuales" del simulador. Para ello se determina primeramente la desviación o error relativo (%), tomando como referentes los valores esperados para I_{CQ} y V_{CEQ}.

$$E_r(\%) = \frac{|\text{Valor esperado} - \text{Valor calculado}|}{\text{Valor esperado}} \times 100$$

La desviación del cálculo para I_{CQ}:

$$E_r(\%) = \frac{|8\,\text{mA} - 7.88\,\text{mA}|}{8\,\text{mA}} \times 100 = 1.5\,\%$$

La desviación del cálculo para V_{CEQ}:

$$E_r(\%) = \frac{|7\,\text{V} - 7.096\,\text{V}|}{7\,\text{V}} \times 100 = 1.37\,\%$$

El error promedio del cálculo será el promedio de los errores en cada uno de los parámetros considerados.

$$E_{r(prom)} = \frac{Er(I_C) + Er(V_{CE})}{2} = \frac{1.5\% + 1.37\%}{2} = 1.435\,\%$$

Lo que da una confiabilidad promedio de 98.56 % aproximadamente, para la solución del problema planteado en el ejemplo 8.7.

Diseño de un circuito de polarización con realimentación colector-base (polarización semiautomática)

COMPETENCIA:
Desarrollar la técnica de un circuito de polarización con retroalimentación en el colector para un BJT aplicando las leyes de voltajes y corrientes. [2]

Este tipo de circuito es como el mostrado en la figura 8.20; así que el propósito del proceso de diseño es encontrar los valores de R_E, R_C y R_f, cuando son conocidas las características del transistor I_{CQ}, V_{CEQ} y la β, y asignarle un valor a la fuente de polarización.

En este caso, el procedimiento para el diseño del circuito contiene las mismas etapas que las usadas para los circuitos anteriores; por tanto, ahora algunos de los pasos serán omitidos y referidos a las explicaciones anteriores.

Primera etapa

Se obtienen las curvas características del BJT, mediante un trazador de curvas. Se dibujan en el papel para tenerlas como documento de trabajo; ahora tomemos como ejemplo nuevamente, las curvas presentadas en la figura 8.32.

La ecuación de voltajes de la malla de salida de este circuito es

$$V_{CE} = V_{CC} - I'_C R_C - I_E R_E \qquad \text{(ecuación 8.59)}$$

Donde $I'_C = I_E \cong I_C$; así que, al hacer $I_C = 0$ se tiene que

$$V_{CEmáx} = V_{CC}\,|_{I_C = 0} \qquad \text{(ecuación 8.60)}$$

Y haciendo $V_{CE} = 0$

$$I_{Cmáx} = \frac{V_{CC}}{R_C + R_E}\,|_{V_{CE} = 0} \qquad \text{(ecuación 8.61)}$$

Estas ecuaciones nos darán dos puntos en la gráfica, uno sobre el eje de las *abscisas* (ecuación 8.60), que corresponde a lo que será el valor máximo de V_{CE}, que se identifica $V_{CEmáx}$, con coordenadas ($V_{CEmáx}$, 0); y otro ubicado sobre el eje de las *ordenadas* (ecuación 8.61) correspondiente a un valor máximo de I_C, identificado por $I_{Cmáx}$ cuyas coordenadas serán (0, $I_{Cmáx}$). Al unir estos dos puntos se obtiene la *recta de carga* en cuestión. En la figura 8.32 se identifican estas coordenadas por medio de puntos en gris oscuro, y la línea que los une es la *recta de carga*.

Segunda etapa

Ubicar al punto de operación Q del transistor al centro de la región activa de sus curvas. Para esto, en la gráfica se busca el punto cuyas coordenadas sean (V_{CEQ}, I_{CQ}) que deberá estar ubicado sobre la recta de carga. Donde

$$V_{CEQ} = \tfrac{1}{2} V_{CEmáx}\,, \quad I_{CQ} = \tfrac{1}{2} I_{Cmáx} \qquad \text{(ecuaciones 8.62)}$$

El punto de operación se identifica en gris claro en la gráfica.

Tercera etapa: criterios de diseño

La fuente de polarización de cd para el circuito será de un valor

$$V_{CC} = V_{CEmáx} \qquad \text{(ecuación 8.63)}$$

Criterio I, para diseño: se asigna un voltaje al emisor de un valor de:

$$V_E = \frac{1}{10} V_{CC} \qquad \text{(ecuación 8.64)}$$

Donde el valor de V_{CC} está dado por la ecuación 8.63.

Con base en este criterio se está en posibilidad de calcular R_E considerando la ley de Ohm.

$$R_E = \frac{V_E}{I_E} \qquad \text{(ecuación 8.65)}$$

De la ecuación 8.59 y considerando los valores casi iguales entre I'_C, I_C e I_E, se tiene que el resistor del colector será:

$$R_C = \frac{V_{CC} - V_{CE} - I_C R_E}{I_C} \qquad \text{(ecuación 8.66)}$$

De las curvas de la gráfica se puede obtener el valor de la corriente de base que corresponde al punto de operación Q. Como I_B es la que deberá circular por el resistor de colector-base R_f, al aplicar la ley de Ohm se encuentra el valor de esta última. De la malla de entrada del circuito (ecuación 8.23) se obtiene que

$$R_f = \frac{V_{CC} - I'_C R_C - V_{CB} - V_E}{I_B} \qquad \text{(ecuación 8.67)}$$

Donde $I'_C \cong I_C$

EJEMPLO 8.8

Diseña un circuito de polarización con realimentación colector-base para un BJT de silicio tipo *npn* cuyas características son $V_{CEQ} = 7$ V, $I_{CQ} = 8$ mA y una $\beta = 150$. Comprueba por medio de una simulación del circuito.

Solución

Datos:

$V_{CEQ} = 7$ V
$I_{CQ} = 8$ mA
$\beta = 150$
$V_{T(Si)} = 0.7$ V
$R_f = ?$
$R_C = ?$
$R_E = ?$
$V_{CC} = ?$

Planteamiento:

Puesto que se tienen como datos las características del punto de operación Q para el BJT, el circuito de polarización se puede obtener siguiendo el procedimiento de diseño explicado anteriormente.

Desarrollo:

a) La fuente de polarización:

El valor del voltaje de polarización se obtiene a partir de la ecuación 8.45:

$$V_{CC} = 2\ V_{CEQ} = (2)(7\text{ V}) = 14\text{ V}$$

b) El voltaje en emisor, de acuerdo a la ecuación 8.55, será:

$$V_E = \frac{1}{10}\ V_{CC} = (0.1)\ (14\text{ V}) = 1.4\text{ V}$$

De acuerdo con la ley de Ohm, el resistor del emisor es:

$$R_E = \frac{V_E}{I_E} = \frac{1.4\ \text{V}}{8\ \text{mA}} = 175\ \Omega.$$

c) El resistor del colector R_C, de acuerdo con la ecuación 8.59 es:

Considerando que $I'_C = I_E \cong I_C$

$$R_C = \frac{V_{CC} - V_{CE} - I_E R_E}{I_C} = \frac{14\ \text{V} - 7\ \text{V} - (8\ \text{mA})(175\ \Omega)}{8\ \text{mA}} = 700\ \Omega$$

d) Cálculo del resistor de la base R_f.

Como se conoce la corriente de colector y el valor de β, se calcula la corriente de operación en la base:

$$I_B = \frac{I_{CQ}}{\beta} = \frac{8\ \text{mA}}{150} = 53\ \mu\text{A}$$

El resistor del colector-base R_f, de acuerdo con la ecuación 8.67 es:

$$R_f = \frac{V_{CC} - I'_C R_C - V_{BE} - V_E}{I_B} = \frac{14\ \text{V} - (8\ \text{mA})(700\ \Omega) - 7\ \text{V} - 1.4\ \text{V}}{53\ \mu\text{A}}$$

$$R_f = 118\ 867\ \Omega$$

Con los valores de los resistores se puede construir el circuito de polarización con estabilización en el emisor, como se ve en la figura 8.35.

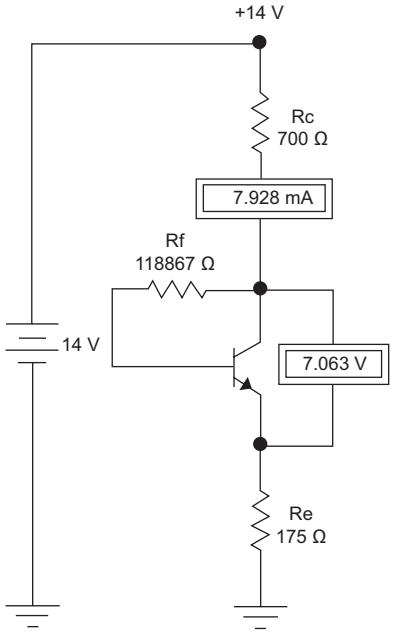


Figura 8.35 Imagen de la simulación del circuito de polarización con realimentación colector-base, para el ejemplo 8.8.

La confiabilidad del diseño presentado en el ejemplo 8.8 se puede obtener al momento de ensamblar el circuito y realizar mediciones en el laboratorio; o bien con referencia a los datos que proporcionan los "medidores virtuales" del simulador. Para ello se determina primeramente la desviación o error relativo (%), tomando como referentes los valores esperados para I_{CQ} y V_{CEQ}.

$$E_r(\%) = \frac{|\text{Valor esperado} - \text{Valor calculado}|}{\text{Valor esperado}} \times 100$$

La desviación del cálculo para I_{CQ}:

$$E_r(\%) = \frac{|8\ \text{mA} - 7.928\ \text{mA}|}{8\ \text{mA}} \times 100 = 0.9\ \%$$

La desviación del cálculo para V_{CEQ}:

$$E_r(\%) = \frac{|7\ \text{V} - 7.063\ \text{V}|}{7\ \text{V}} \times 100 = 0.9\ \%$$

El error promedio del cálculo será el promedio de los errores en cada uno de los parámetros considerados.

$$E_{r(prom)} = \frac{Er(I_C) + Er(V_{CE})}{2} = \frac{0.9\% + 0.9\%}{2} = 0.9\ \%$$

Lo que da una confiabilidad promedio de 99.1 % aproximadamente, para la solución del problema planteado en el ejemplo 8.8.

Diseño de un circuito de polarización con divisor de voltaje en la base (polarización automática)

COMPETENCIA:
Desarrollar la técnica de diseño de un circuito de polarización con divisor de voltaje para un BJT aplicando las leyes de voltajes y corrientes. [2]

Este tipo de circuito es como el mostrado en la figura 8.20; el que proporciona mayor estabilidad al transistor ante los cambios eventuales de β o de temperatura. El propósito del proceso de diseño es encontrar los valores de R_E, R_C y R_1 y R_2, cuando son conocidas las características del transistor I_{CQ}, V_{CEQ} y la β, y asignarle un valor a la fuente de polarización.

En este caso el procedimiento para el diseño del circuito contiene las mismas etapas que las usadas para los circuitos anteriores; por tanto, algunos de los pasos serán ahora omitidos y referidos a las explicaciones anteriores.

Primera etapa

Se obtienen las curvas características del BJT, mediante un trazador de curvas. Se dibujan en el papel para tenerlas como documento de trabajo; tomemos como ejemplo nuevamente, las curvas presentadas en la figura 8.32.

La ecuación de voltajes de la malla de salida de este circuito es

$$V_{CE} = V_{CC} - I_C R_C - I_E R_E \qquad \text{(ecuación 8.68)}$$

Donde $I_E \cong I_C$; así que, al hacer $I_C = 0$ se tiene que

$$V_{CEmáx} = V_{CC}\,|_{I_C = 0} \qquad \text{(ecuación 8.69)}$$

Y haciendo $V_{CE} = 0$

$$I_{Cmáx} = \frac{V_{CC}}{R_C + R_E}\,|_{V_{CE} = 0} \qquad \text{(ecuación 8.70)}$$

Estas ecuaciones nos darán dos puntos en la gráfica, uno sobre el eje de las *abscisas* (ecuación 8.69), que corresponde a lo que será el valor máximo de V_{CE}, que se identifica $V_{CEmáx}$, con coordenadas ($V_{CEmáx}$, 0); y otro ubicado sobre el eje de las *ordenadas* (ecuación 8.70) correspondiente a un valor máximo de I_C, identificado por $I_{Cmáx}$ cuyas coordenadas serán (0, $I_{Cmáx}$). Al unir estos dos puntos se obtiene la *recta de carga* en cuestión. En la figura 8.32 se identifican estas coordenadas por medio de puntos gris oscuro, y la línea que los une es la *recta de carga*.

Segunda etapa

Ubicar al punto de operación Q del transistor al centro de la región activa de sus curvas. Para esto, en la gráfica se busca el punto cuyas coordenadas sean (V_{CEQ}, I_{CQ}) que deberá estar ubicado sobre la recta de carga. Donde

$$V_{CEQ} = \tfrac{1}{2} V_{CEmáx}, \quad I_{CQ} = \tfrac{1}{2} I_{Cmáx} \quad \text{(ecuaciones 8.71)}$$

El punto de operación se identifica en gris claro en la gráfica.

Tercera etapa: criterios de diseño

La fuente de polarización de cd para el circuito será de un valor

$$V_{CC} = V_{CEmáx} \quad \text{(ecuación 8.72)}$$

Criterio I para diseño:

Se asigna un voltaje al emisor de un valor de:

$$V_E = \frac{1}{10} V_{CC} \quad \text{(ecuación 8.73)}$$

Donde el valor de V_{CC} está dado por la ecuación 8.63.

Con base en este criterio se está en posibilidad de calcular R_E considerando la ley de Ohm.

$$R_E = \frac{V_E}{I_E} \quad \text{(ecuación 8.74)}$$

De la ecuación 8.68 y considerando los valores casi iguales entre, I_C e I_E, se tiene que el resistor del colector será:

$$R_C = \frac{V_{CC} - V_{CE} - I_C R_E}{I_C} \quad \text{(ecuación 8.75)}$$

Criterio II para diseño:

Cuando se hizo el análisis de este circuito se utilizó el teorema de Thévenin; para el diseño se aplicará también, con base en un criterio inicial para la resistencia equivalente de Thévenin:

$$R_{Th} \cong \frac{1}{10} (\beta + 1)\, R_E \quad \text{(ecuación 8.76)}$$

Si la expresión 8.76 se toma como una igualdad se tiene un alto grado de confiabilidad en el diseño.

Como

$$V_{Th} = \frac{V_{CC} R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{(ecuación 8.77)}$$

y además

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{(ecuación 8.78)}$$

Al combinar las ecuaciones 8.77 y 8.78 se obtiene la doble igualdad:

$$\frac{V_{Th}}{V_{CC}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_{Th}}{R_1} \qquad \text{(ecuación 8.79)}$$

La ecuación 8.79 deja ver que será necesario calcular V_{Th} y R_{Th} y el resto es manejo algebraico, como se verá en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8.9

Diseñar un circuito de polarización automática (independiente de β) para un BJT de silicio tipo *npn* cuyas características son $V_{CEQ} = 7$ V, $I_{CQ} = 8$ mA y una $\beta = 150$. Comprueba con una simulación del circuito.

Solución

Datos:

$V_{CEQ} = 7$ V
$I_{CQ} = 8$ mA
$\beta = 150$
$V_{T(Si)} = 0.7$ V
$R_1 = ?$
$R_2 = ?$
$R_C = ?$
$R_E = ?$
$V_{CC} = ?$

Planteamiento:

Puesto que se tienen como datos las características del punto de operación *Q* para el BJT, el circuito de polarización se puede obtener siguiendo el procedimiento de diseño explicado anteriormente.

Desarrollo:

a) La fuente de polarización:

El valor del voltaje de polarización se obtiene a partir de la ecuación 8.45:

$$V_{CC} = 2\ V_{CEQ} = (2)(7\text{ V}) = 14\text{ V}$$

b) El voltaje en emisor, de acuerdo a la ecuación 8.73, será:

$$V_E = \frac{1}{10}\ V_{CC} = (0.1)\ (14\text{ V}) = 1.4\text{ V}$$

De acuerdo con la ley de Ohm, el resistor del emisor es:

$$R_E = \frac{V_E}{I_E} = \frac{1.4\text{ V}}{8\text{ mA}} = 175\ \Omega$$

c) El resistor del colector R_C, de acuerdo con la ecuación 8.75 es:

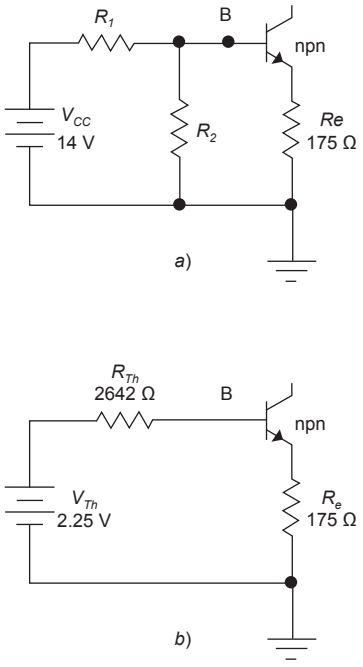


Figura 8.36 *a*) Red de entrada para un circuito de polarización automática. *b*) Circuito equivalente de Thévenin de la red de entrada.

Considerando que $I_E \cong I_C$

$$R_C = \frac{V_{CC} - V_{CE} - I_E R_E}{I_C} = \frac{14\,\text{V} - 7\,\text{V} - (8\,\text{mA})(175\,\Omega)}{8\,\text{mA}} = 700\,\Omega$$

d) Cálculo de la resistencia de Thévenin R_{Th}

En la figura 8.36 se muestra la red de entrada del circuito, el cual será transformado a su equivalente de Thévenin.

Al aplicar el criterio II para diseño, considerando la expresión 8.76 como una igualdad:

$$R_{Th} \cong \frac{1}{10}(\beta + 1)R_E = \frac{1}{10}(151)(175\,\Omega) = 2642\,\Omega$$

e) Cálculo del voltaje de Thévenin

Un circuito equivalente de Thévenin para la red de entrada que está conectada en la base del transistor se muestra en la figura 8.36*b*, cuya ecuación de voltajes es:

$$-V_{Th} + I_B R_{Th} + V_{BE} + (\beta+1)\, I_B R_E = 0$$

$$\text{donde } I_B = \frac{I_C}{\beta} = \frac{8\,\text{mA}}{150} = 53.33\,\mu\text{A}$$

A partir de la cual se puede calcular el valor de V_{Th}

$$V_{Th} = (53.33\,\mu\text{A})(2642\,\Omega) + 0.7\,\text{V} + (151)(53.33\,\mu\text{A})(175\,\Omega) = 2.25\,\text{V}$$

f) Cálculo del resistor de la base R_1

De acuerdo con la ecuación 8.79 se puede calcular R_1

$$\frac{V_{Th}}{V_{CC}} = \frac{R_{Th}}{R_1} \Rightarrow \frac{2.25\,\text{V}}{14\,\text{V}} = \frac{2642\,\Omega}{R_1}$$

por tanto, al despejar R_1, se tiene

$$R_1 = \frac{(2642\,\Omega)(14\,\text{V})}{2.25\,\text{V}} = 16439\,\Omega$$

g) Cálculo de R_2

Considerando la ecuación 8.79 se tiene una expresión para calcular R_2.

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_{Th}}{R_1} \Rightarrow \frac{2642\,\Omega}{16439\,\Omega} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.16$$

$$R_2 = 3131\,\Omega$$

Con los valores de los resistores se puede construir el circuito de polarización con estabilización en el emisor, como se ve en la figura 8.37.

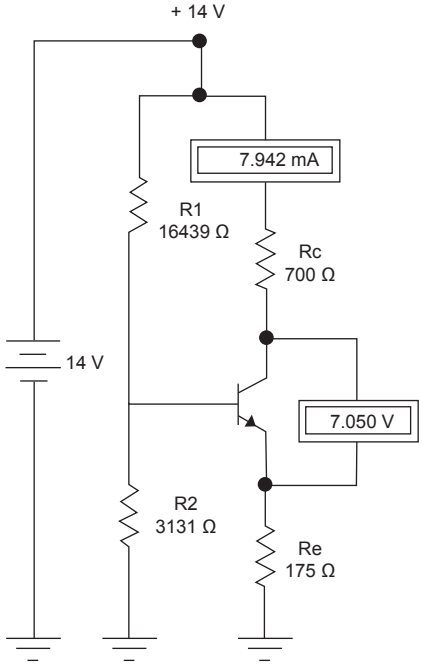


Figura 8.37 Simulación del circuito de polarización automática, para el ejemplo 8.9.

La confiabilidad del diseño presentado en el ejemplo 8.8 se puede obtener al momento de ensamblar el circuito y realizar mediciones en el laboratorio; o bien con referencia a los datos que proporcionan los "medidores virtuales" del simulador. Para ello se determina primeramente la desviación o error relativo (%), tomando como referentes los valores esperados para I_{CQ} y V_{CEQ}.

$$E_r(\%) = \frac{|\text{Valor esperado} - \text{Valor calculado}|}{\text{Valor esperado}} \times 100$$

La desviación del cálculo para I_{CQ}:

$$E_r(\%) = \frac{|8\,\text{mA} - 7.942\,\text{mA}|}{8\,\text{mA}} \times 100 = 0.72\,\%$$

La desviación del cálculo para V_{CEQ}:

$$E_r(\%) = \frac{|7\,\text{V} - 7.05\,\text{V}|}{7\,\text{V}} \times 100 = 0.71\,\%$$

El error promedio del cálculo será el promedio de los errores en cada uno de los parámetros considerados.

$$E_{r(prom)} = \frac{E_r(I_C) + E_r(V_{CE})}{2} = \frac{0.72\% + 0.71\%}{2}$$

$$E_{r(prom)} = 0.715\,\%$$

Lo que da una confiabilidad promedio de 99.28 % aproximadamente, para la solución del problema planteado en el ejemplo 8.9.

Actividades para la evaluación de competencias

Construcción de un transistor bipolar de unión

8.1 Explica qué es un transistor bipolar de unión. [1]
8.2 Explica en qué consisten los tipos *pnp* y *npn* de un BJT. Dibuja un esquema ilustrativo para cada caso y anota sus características relevantes. [2]

Operación de un transistor bipolar de unión

8.3 Describe, breve pero claramente, qué se entiende por *saturación* y por *corte* en la operación de un BJT. [1]
8.4 Explica cómo se forma la corriente electrónica a través de un diodo bipolar de unión. [2]
8.5 ¿En qué consiste polarizar a un BJT? [1]
8.6 Describe los tres tipos de configuración para polarizar a un BJT. [2]

Configuración base común

8.7 ¿A qué se le llama la región activa en un BJT? [1]
8.8 ¿A qué se le llama la alfa de un BJT? [1]
8.9 ¿Qué es la beta de un BJT? [1]

El transistor como amplificador

8.10 ¿En qué consiste la acción amplificadora de un BJT en configuración base común? [1]
8.11 ¿A qué se le llama amplificación de voltaje en un BJT? [1]
8.12 ¿Por qué se dice que un BJT es una fuente de corriente? [3]
8.13 ¿En que consiste la amplificación de corriente en un BJT en configuración base común? [2]

Configuración emisor común

8.14 ¿En qué consiste la configuración emisor común? [2]
8.15 ¿Qué se entiende por punto de operación Q en un BJT? [1]
8.16 ¿Qué relación existe entre la alfa y la beta de un BJT? Explica y justifica. [3]
8.17 ¿En qué consiste la configuración llamada de colector común? [2]

Polarización de un BJT

8.18 ¿En qué consiste la polarización de un BJT en configuración emisor común? [2]
8.19 ¿En qué consiste un circuito de polarización de un BJT? [2]

Circuitos de polarización

8.20 Explica cómo afecta a la corriente en la base del BJT un aumento del 80% en el valor de beta del transistor de la figura 8.17. [2]
8.21 Calcula el voltaje entre colector y emisor para el circuito de la figura 8.17 si la beta del transistor vale 180. [2]
8.22 ¿Cuál será el valor de la corriente máxima posible en el colector del BJT de la figura 8.17? [2]
8.23 ¿Qué efecto se tendrá en la corriente de base para el BJT de la figura 8.17 si la resistencia de colector se aumenta en 60% su valor actual? [2]
8.24 ¿Qué efecto se producirá en la corriente de base del BJT de la figura 8.21 si se hace un cortocircuito entre colector y emisor? [2]
8.25 ¿Cuál será el valor de la corriente máxima posible en el colector del BJT de la figura 8.21? [2]
8.26 ¿Qué efecto se producirá en el voltaje de la base del BJT de la figura 8.21 si se incrementa su beta actual en 50%? (Ejemplo 8.3.) [2]
8.27 Realiza el análisis del circuito de polarización de la figura 8.21 si se cambia el valor de la resistencia de base por una $R_B = 800\ \text{k}\Omega$. Comenta los efectos producidos en relación con los resultados del ejemplo 8.3. [3]
8.28 ¿Cuál será el valor de la corriente máxima de colector posible en el BJT de la figura 8.24? [2]

8.29. Con base en los resultados obtenidos en el ejemplo 8.4 haz un esbozo de las curvas características de salida del BJT de la figura 8.24. [2]
8.30. Realiza un nuevo análisis para el ejemplo 8.4 suponiendo que cambió la beta del transistor en 45%, por efectos del calor. [2]
8.31. ¿Cuál será la corriente máxima posible en el colector del transistor de la figura 8.29? [2]
8.32. Realiza un nuevo análisis para el circuito de la figura 8.29, suponiendo que la beta del transistor se incrementara en 100%. [2]
8.33. ¿De qué manera afecta a la corriente de la base del BJT de la figura 8.29 cuando se incrementa su beta en 100%? [2]
8.34. Explica las ventajas o desventajas que pueden existir entre un circuito de polarización fija y uno con realimentación de colector a base. [3]

Notas:

[1] Competencias de la dimensión Instrumental.
[2] Competencias de la dimensión Sistémica.
[3] Competencias de la dimensión Interpersonal.

Capítulo 9

Amplificadores operacionales

		Estructura
Temas	**Conceptuales**	
9.1 Principios básicos de los amplificadores operacionales 9.1.1 Amplificador operacional ideal.	• Qué es el amplificador operacional. • Identificación de entradas inversora y no inversora. • Modos de operación. • Qué es el modo diferencial. • Qué se entiende por ganancia de voltaje de lazo abierto. • Qué es el modo común. • Qué es el rechazo en modo común.	
9.2 Configuraciones básicas del amplificador operacional 9.2.1 Amplificador operacional inversor. 9.2.2 Amplificador operacional no inversor. 9.2.3 Amplificador operacional como seguidor unitario.	• Qué es un amplificador operacional inversor. • Qué es un amplificador operacional no inversor. • Qué es un amplificador operacional seguidor unitario.	
9.3 Configuraciones basadas en los circuitos inversor y no inversor 9.3.1 Amplificador sumador. 9.3.2 Amplificador integrador. 9.3.3 Amplificador diferenciador.	• Qué es un amplificador operacional sumador. • Qué es un amplificador operacional integrador. • Qué es un amplificador operacional diferenciador.	
9.4 Amplificador de más de una etapa	• Concepto de amplificación por etapas.	
Actividades para la evaluación de competencias		

temática

	CONTENIDOS	
	Procedimentales	**Actitudinales**
	• Formas de aplicar una señal de entrada a un amplificador operacional. • Comparación señal de salida con respecto a la de entrada. • Proceso de operación en modo diferencial. • Proceso de operación en modo común. • Proceso de operación en modo diferencial y en modo común. • Proceso de operación en rechazo en modo común. • Cálculo de la señal de salida en diferentes modos de operación.	• Elementos para apreciar el valor que representa la aplicación de las tecnologías del estado sólido en amplificadores electrónicos y su aporte al desarrollo de la ciencia. • Elementos para autoevaluar el trabajo personal y de equipo.
	• Funcionamiento del amplificador operacional inversor. • Funcionamiento del amplificador operacional no inversor. • Funcionamiento del amplificador operacional como un seguidor unitario. • Cálculo de la señal de salida.	
	• Proceso de operación de suma en un amplificador operacional. • Proceso de operación de integración en un amplificador operacional. • Proceso de operación de diferenciación en un amplificador operacional.	
	• Proceso de amplificación en etapas.	

Orientación general

Dar a conocer los fundamentos de la teoría de los amplificadores operacionales y sus aplicaciones más relevantes en los sistemas electrónicos.

Competencias

Dimensión Instrumental [1]	Dimensión Sistémica [2]	Dimensión Interpersonal [3]
Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:
1.1 Comprender el concepto de *amplificador operacional*. 1.2 Identificar las terminales inversora y no inversora de un amplificador operacional. 1.3 Conocer los principales modos de operación de un amplificador operacional. 1.4 Comprender la operación de las principales configuraciones aplicadas en los amplificadores operacionales. 1.5 Comprender la forma de operar un amplificador operacional como sumador, integrador y diferenciador. 1.6 Comprender el concepto de amplificación de varias etapas.	2.1 Calcular la señal de salida en un amplificador operacional en modo diferencial. 2.2 Calcular la señal de salida en un amplificador operacional en modo diferencial y en modo común. 2.3 Calcular la relación de rechazo en modo común (RRMC) en un amplificador operacional. 2.4 Calcular la señal de salida en las configuraciones principales aplicadas en los amplificadores operacionales. 2.5 Obtener teóricamente las variables de entrada y salida en las configuraciones básicas del amplificador operacional. 2.6 Desarrollar la simulación de circuitos básicos con amplificadores operacionales. 2.7 Comprobar cálculos teóricos por medio de mediciones de las variables implícitas en las configuraciones básicas de los amplificadores operacionales. 2.8 Diseñar circuitos básicos utilizando amplificadores operacionales. 2.9 Diseñar circuitos básicos de varias etapas utilizando amplificadores operacionales.	3.1 Valorar la importancia de los estudios de investigadores en materia de circuitos integrados básicos y sus aportaciones al desarrollo de la tecnología. 3.2 Apreciar la importancia que tienen los amplificadores operacionales integrados en sistemas electrónicos. 3.3 Evaluar su propio trabajo, mediante la comparación de resultados teóricos de cálculos, de simulación y de experimentación en el laboratorio.

Introducción

COMPETENCIAS:

- Valorar la importancia de los estudios de investigadores en materia de circuitos integrados básicos y sus aportaciones al desarrollo de la tecnología. [3]
- Apreciar la importancia que tienen los amplificadores operacionales integrados en los sistemas electrónicos. [3]
- Evaluar su propio trabajo mediante la comparación de resultados teóricos de cálculos, de simulación y de experimentación en el laboratorio. [3]

El *amplificador operacional*, cuyo nombre se abrevia *Op Amp* es un concepto tomado a partir de los circuitos amplificadores que utilizaban las computadoras analógicas de los años cuarenta, diseñadas para realizar operaciones diversas y que se estructuraban básicamente con sistemas electrónicos discretos, inclusive válvulas de vacío. Entonces, el nombre de este dispositivo relaciona el concepto de un amplificador cd (amplificador acoplado en corriente directa) con una señal de entrada diferencial y un factor de amplificación grande, cuyas características de operación están determinadas por los elementos utilizados en un esquema de realimentación. Estos elementos externos y la manera de combinar su conexión permiten que se realicen diferentes operaciones de tipo analógico. De esta forma, el mismo amplificador era capaz de realizar diversas operaciones, y a partir de esta característica es como se generó el desarrollo gradual de los amplificadores operacionales, lo que a su vez dio lugar al inicio de una nueva era en materia de diseño de circuitos analógicos y digitales.

Sin embargo, en un principio el uso de los Op Amp no fue tan generalizado; esto fue dándose a partir de los años sesenta, cuando empezaron a aplicarse las técnicas de estado sólido al diseño de los circuitos amplificadores operacionales. En un principio se fabricaron en pequeños módulos encapsulados que realizaban las mismas operaciones que aquellos cuya circuitería se estructuraba con elementos discretos del estado sólido. Así, a mediados de los sesenta, aparecieron en el mercado los primeros *amplificadores operacionales de circuito integrado* al alcance de los usuarios. En unos pocos años, y con dimensiones de espacio relativamente más pequeñas cada vez, los amplificadores operacionales (encapsulados en un circuito integrado) se convirtieron en dispositivos de uso común, cuyas aplicaciones fueron mucho más allá de lo que en un principio se contemplaron para las computadoras analógicas.

Con el desarrollo de las técnicas de fabricación de circuitos integrados y la evolución de los procesos para su producción en grandes cantidades, los amplificadores operacionales integrados rápidamente estuvieron disponibles en el mercado a bajos precios. El amplificador operacional, que en sus inicios era un sistema formado por muchos componentes discretos, ha evolucionado para convertirse en un componente discreto, una realidad que ha cambiado por completo el panorama del diseño de circuitos lineales.

En los procesos de diseño de sistemas electrónicos, y con ventajas, el Op Amp ha venido a sustituir a los circuitos con componentes discretos para la mayoría de las aplicaciones de cd y de baja frecuencia. Este concepto electrónico ha redefinido las "reglas básicas" de los circuitos electrónicos acercando el diseño de circuitos al de sistemas.

En este capítulo se presentan los principios fundamentales de los *amplificadores operacionales* (Op Amp), y los circuitos básicos de uso común en el campo de los sistemas electrónicos.

COMPETENCIAS:

- Comprender el concepto de amplificador operacional. [1]
- Identificar las terminales de un amplificador operacional. [1]
- Conocer los principales modos de operación de un amplificador operacional. [1]

9.1 Principios básicos de los amplificadores operacionales

9.1.1 Amplificador operacional ideal

Antes de ver las aplicaciones de los amplificadores operacionales en sistemas electrónicos, revisemos los fundamentos básicos del amplificador operacional *ideal,* que son fáciles de explicar. Para ello dejemos de lado, por el momento, las ideas convencionales que hasta ahora tenemos de los componentes de los amplificadores, como son transistores, resistores u otros elementos cualesquiera, y en lugar de pensar en ellos, pensemos en términos generales y consideremos al amplificador como una *caja negra* con dos terminales de entrada y una terminal de salida, recuerda que por ahora no interesa qué hay en el interior de la *caja*.

En la figura 9.1 se muestra el amplificador ideal, mediante el símbolo utilizado para su representación (un triángulo con uno de sus vértices hacia el lado derecho). Es un dispositivo de acoplamiento directo con dos terminales a la entrada, la *terminal inversora*, identificada como terminal negativa, y la terminal *no inversora* o positiva; a la salida cuenta con una terminal única. Tiene una ganancia de voltaje infinita, una impedancia de entrada también infinita y a la salida su impedancia es cero. Un amplificador operacional real; es decir, no ideal, tiende a adquirir las características descritas para el ideal.

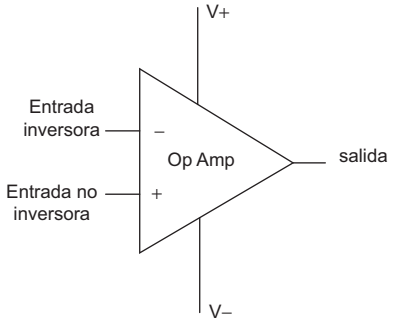


Figura 9.1 Diagrama simbólico de un amplificador operacional ideal.

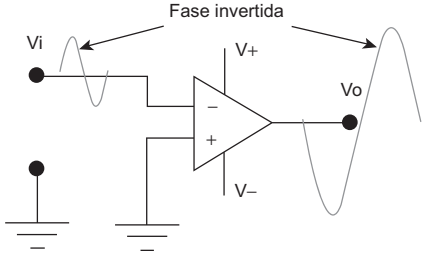


Figura 9.2 Amplificador operacional con señal de entrada en la terminal inversora. La salida es un voltaje amplificado con polaridad invertida.

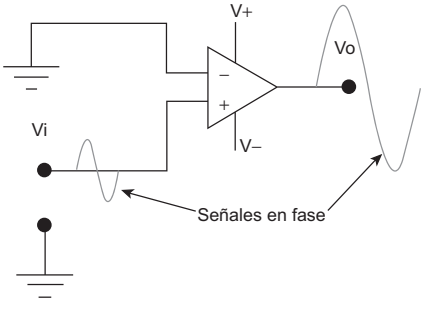


Figura 9.3 Amplificador operacional con señal de entrada en la terminal no inversora. La salida es un voltaje amplificado con la misma polaridad.

Cuando se aplican señales de entrada (V_i) al Op Amp tendremos las siguientes posibilidades: 1) aplicar señal sólo a la terminal *inversora* y conectar la terminal *no inversora* a *tierra*; 2) aplicar señal sólo a la terminal *no inversora* y conectar la terminal *inversora* a tierra, o 3) Aplicar señal de entrada a las dos terminales al mismo tiempo; que a su vez presenta dos posibilidades: aplicar señales diferentes a cada terminal de entrada o aplicar la misma señal a ambas entradas.

Una señal positiva en la entrada *inversora* (–), produce una señal negativa a la salida, figura 9.2, lo que quiere decir que a la salida se tiene una señal invertida en fase respecto de la señal de entrada; mientras que la misma señal de entrada aplicada en la terminal *no inversora* (+) produce una señal positiva en la salida; es decir, la salida está en fase respecto a la señal de entrada, figura 9.3.

Ambas terminales de entrada del amplificador se utilizarán siempre, independientemente de la aplicación que tenga el dispositivo. La señal de salida es de una sola terminal y está referida a tierra; por consiguiente, se utilizan voltajes de alimentación bipolares (de ± 5 V a ± 15 V). La alimentación va de + 5 V a 15 V respecto de tierra y otra alimentación que puede ser de –5V a –15V de respecto a tierra.

Un amplificador operacional puede realizar sus funciones de diferentes maneras, en lo que se llama modos de operación. Veamos los fundamentos de cada uno de ellos.

Amplificador operacional en modo diferencial

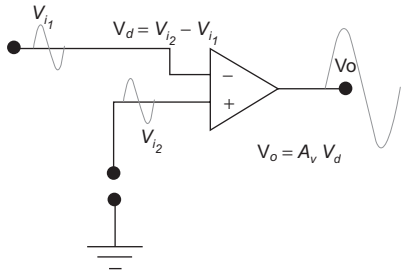


Figura 9.4 Amplificador operacional con señal de entrada en las dos terminales (modo diferencial).

Cuando se aplican dos señales separadas V_{i1} y V_{i2} a las terminales de entrada al mismo tiempo, figura 9.4, el amplificador sólo responde a la diferencia de voltaje entre las dos terminales de entrada, no a su potencial común

$$V_{\mathrm{d}} = V_{\mathrm{i2}} - V_{i1} \qquad \text{(ecuación 9.1)}$$

lo que dará por resultado que a la salida se tenga la magnitud de este voltaje diferencial, que llamaremos V_d, amplificado tantas veces como sea el valor de su ganancia o factor de amplificación A_v. El voltaje de salida V_o, será entonces igual a

$$V_o = A_v\, V_d \qquad \text{(ecuación 9.2)}$$

Donde A_v es la ganancia del amplificador, figura 9.4.

La ganancia de un amplificador operacional cuando sus terminales están libres de alguna carga recibe el nombre de *ganancia de voltaje de lazo abierto*, se representa por A_{VOL}; algunas veces se le llama simplemente ganancia.

Las características relevantes del amplificador operacional ideal son las siguientes:

- La ganancia de voltaje es infinita:

$$A_v = \infty$$

- La impedancia de entrada es infinita:

$$Z_i = \infty$$

- La resistencia de salida es cero:

$$Z_o = 0$$

- El ancho de banda es infinito (*Bandwidth*):

$$Bw = \infty$$

- El voltaje *offset* de entrada es cero:

Esto significa que sí:

$$V_d = 0 \text{ Volts, entonces } V_o = 0 \text{ Volts}$$

En la figura 9.5 se muestran estas características, de las cuales se puede comentar que:

- Puesto que la ganancia de voltaje es infinita, cualquier señal de salida que se desarrolle será el resultado de una señal de entrada pequeña.
- El voltaje de entrada diferencial es nulo.
- Si la resistencia de entrada es infinita significa que no existe flujo de corriente en ninguna de las terminales de entrada.

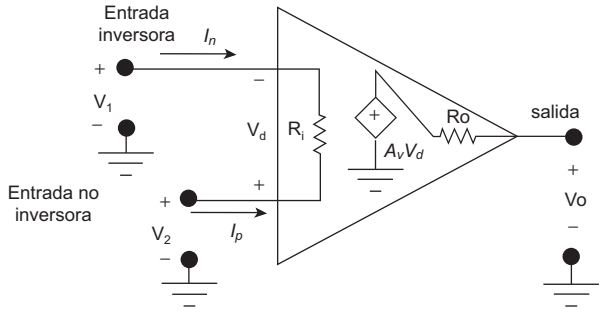


Figura 9.5 Características relevantes de un amplificador operacional ideal.

COMPETENCIAS:

- Calcular la señal de salida en un amplificador operacional en modo diferencial. [2]
- Calcular la señal de salida en un amplificador operacional en modo diferencial y en modo común. [2]
- Calcular la relación de rechazo en modo común (RRMC) en un amplificador operacional. [2]

Estas dos operaciones se consideran axiomas, y se emplean repetidamente en la operación y diseño del circuito del Op Amp. Una vez entendidas, se puede deducir el funcionamiento en general de los circuitos amplificadores operacionales.

Operación en modo común

Cuando simultáneamente se aplica *la misma señal* a las dos terminales de entrada, se dice que el amplificador opera en *modo común,* figura 9.6. Es como si fueran dos señales iguales en magnitud y en fase amplificándose al mismo tiempo, dando como resultado una sola salida con dos componentes: un voltaje *invertido* y otro *no invertido* de la misma magnitud, lo que resulta en un efecto final con un voltaje de salida *cero* ($V_o = 0$ volts). Aunque en un amplificador real, en la práctica, se tiene un voltaje de salida muy pequeño.

Operación en modo diferencial y en modo común

Una importante característica de un amplificador operacional es que tiene la capacidad para amplificar en escalas grandes señales que son opuestas en las dos entradas, mientras que sólo amplifica, muy ligeramente, las señales que son comunes a las dos entradas. Esto significa que a la salida se tiene un voltaje con dos componentes, una que es la diferencia de los voltajes de entrada y la otra que se genera debido a las señales comunes en ambas entradas.

Veamos lo anterior por partes. Si se aplican señales separadas en las terminales de entrada al Op Amp la salida en *modo diferencial* será como expresa la ecuación 9.1.

$$V_o = A_d V_d = A_d (V_{i2} - V_{i1})$$

por otro lado, si las señales de entrada se aplican en modo común se puede hablar de un elemento o voltaje en común, que puede definirse como el promedio de las dos señales de entrada.

$$V_c = ½ (V_{i2} + V_{i1}) \qquad \text{(ecuación 9.3)}$$

Por tanto, cualquier señal aplicada al amplificador operacional tiene, por lo general, componentes en fase y fuera de fase, y la salida

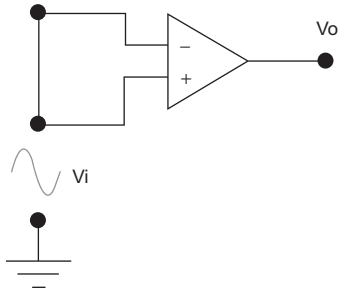


Figura 9.6 Amplificador operacional en modo común.

resultante es la suma de los voltajes en *modo diferencial* y en *modo común* amplificados:

$$V_o = A_d V_d + A_c V_c \qquad \text{(ecuación 9.4)}$$

En la expresión 9.4.
V_d = voltaje en modo diferencial.
V_c = voltaje en modo común.
A_d = amplificación o ganancia en modo diferencial.
A_c = amplificación o ganancia en modo común.

EJEMPLO 9.1

Halla una expresión general para el voltaje de salida de un Op Amp con dos señales de entrada de la misma magnitud pero de polaridad opuesta.

Solución
Datos:

$$V_{i2} = -V_{i1}$$

Planteamiento:

La expresión general del voltaje de salida está dada por la ecuación 9.4. Esto implica obtener una expresión para cada uno de sus términos por separado, para la condición dada de polaridad opuesta en las señales de entrada.

Desarrollo:

De la expresión 9.4 se tiene que el voltaje de salida es

$$V_o = A_d V_d + A_c V_c$$

Donde $V_d = V_{i2} - V_{i1,}$

Pero, dada la condición $V_{i2} = -V_{i1}$ si sustituimos en la expresión para V_d se tendrá que

$$V_d = V_{i2} - (-V_{i2}) = 2\ V_{i2}$$

O también

$$V_d = -V_{i1} - V_{i1} = -2\ V_{i1}$$

La expresión para V_c será, según la ecuación 9.3:

$$V_c = ½\ (V_{i2} + V_{i1}) = ½\ [(V_{i2} + (-V_{i2})] = 0$$

Al sustituir en la expresión para el voltaje de salida (ecuación 9.4) se obtiene:

$$V_o = A_d V_d + A_c V_c = A_d (2V_{i2}) + 0 = 2\ A_d V_{i2}$$

Del ejemplo 9.1 resulta que cuando las entradas son señales ideales opuestas, sin elemento común, la salida no tiene componente en modo común, y es el doble de la ganancia diferencial multiplicada por la señal aplicada a una de las terminales de entrada.

EJEMPLO 9.2

Encuentra una expresión general para el voltaje de salida de un Op Amp con dos señales de entrada de la misma magnitud y de la misma polaridad.

Solución
Datos:

$$V_{i2} = V_{i1}$$

Planteamiento:

La expresión general del voltaje de salida está dada por la ecuación 9.4. Como en el ejemplo 9.1, se debe obtener una expresión para cada uno de sus términos por separado, para la condición dada de polaridades iguales en las señales de entrada.

Desarrollo:

De la expresión 9.4 se tiene que el voltaje de salida es

$$V_o = A_d V_d + A_c V_c$$

Donde $V_d = V_{i2} - V_{i1,}$

Dada la condición $V_{i2} = V_{i1}$ si sustituimos en la expresión para V_d se tendrá que

$$V_d = V_{i2} - (V_{i2,}) = 0$$

O también

$$V_d = (V_{i1}) - V_{i1,} = 0$$

La expresión para V_c será, según la ecuación 9.3:

$$V_c = ½ (V_{i2} + V_{i2}) = ½ [2V_{i2}] = V_{i2}$$

Al sustituir en la expresión para el voltaje de salida (ecuación 9.4) se obtiene:

$$V_o = A_d V_d + A_c V_c = A_d (0) + A_c V_{i2} = A_c V_{i2}$$

El ejemplo 9.2 muestra que cuando las entradas son señales en fase ideales, la salida no tiene componente diferencial, sino solamente el pro-

ducto de la ganancia en modo común, por el valor de alguna de las señales de entrada. Se tiene en este caso solamente operación en *modo común*.

Rechazo en modo común

A partir de los ejemplos 9.1 y 9.2 se puede obtener un método para medir en el laboratorio las ganancias A_d y A_c de un circuito con amplificador operacional.

Una técnica para medir $\boldsymbol{A_d}$ en el laboratorio:

1. Hacer $V_{i2} = -V_{i1} = V_s = 0.5$ V.
   Esto hace que la ecuación 9.1 dé
   $$V_d = V_{i2} - V_{i1} = [0.5 \text{ V} - (-0.5 \text{ V})] = 1 \text{ V}$$
   y la ecuación 9.3:
   $$V_c = ½ (V_{i2} + V_{i1}) = ½ [(0.5 \text{ V} + (-0.5 \text{ V})] = 0 \text{ V}.$$
   El voltaje de salida, según la ecuación 9.4 será:
   $$V_o = A_d V_d + A_c V_c = A_d (1 \text{ V}) + A_c (0) = A_d$$
2. Medir el voltaje de salida y éste será el valor de la ganancia en modo diferencial A_d.

Una técnica para medir A_c en el laboratorio:

1. Hacer $V_{i2} = V_{i1} = V_s = 1$ V. Esto hace que la ecuación 9.1 dé
   $$V_d = V_{i2} - V_{i1} = [1 \text{ V} - 1 \text{ V}] = 0 \text{ V}$$
   y la ecuación 9.3:
   $$V_c = ½ (V_{i2} + V_{i1}) = ½ [1 \text{ V} + 1 \text{ V})] = 1 \text{ V}.$$
   El voltaje de salida, según la ecuación 9.4 será:
   $$V_o = A_d V_d + A_c V_c = A_d (0\text{V}) + A_c (1 \text{ V}) = A_c$$
3. Medir el voltaje de salida y éste será el valor de la ganancia en modo común A_c.

La relación que existe entre A_d y A_c se denomina *relación de rechazo en modo común* (RRMC) que se expresa con la siguiente ecuación:

$$\text{RRMC} = \frac{A_d}{A_c} \qquad \text{(ecuación 9.5)}$$

Puesto que $A_d >> A_c$, la ecuación 9.5 entregará una cantidad muy grande y adimensional. Una forma de evitar trabajar con esas grandes cantidades es expresar al RRMC en forma logarítmica como

$$\text{RRMC (log)} = 20 \log_{10} \frac{A_d}{A_c} \qquad \text{(ecuación 9.6)}$$

La ecuación 9.6 entrega un resultado expresado en decibeles (dB).

EJEMPLO 9.3

Calcula la RRMC para un amplificador operacional cuyos valores medidos se muestran en la figura 9.7.

Solución
Datos:

$$V_{i1} = -1\ \text{mV}_{rms}$$
$$V_{i2} = 1\ \text{mV}_{rms}$$
$$V_C = 1\ \text{mV}_{rms}$$
$$V_{od} = 5\ \text{V}_{rms}$$
$$V_{oc} = 5\ \text{mV}_{rms}$$

Planteamiento:

Los datos proporcionados en la figura 9.7 hacen ver un voltaje de salida V_{od} cuando se le aplican dos señales de entrada al amplificador operacional, haciendo que opere en modo diferencial y una señal en modo común, con salida V_{oc}. Esto permite iniciar con el cálculo de la ganancia del Op Amp en cada modo, para relacionarlas y obtener la RRMC.

Desarrollo:

Operación en modo diferencial:

El voltaje diferencial de entrada será:

$$V_d = V_{i2} - V_{i1} = 1\ \text{mV}_{rms} - (-1\ \text{mV}_{rms}) = 2\ \text{mV}_{rms}.$$

Se sabe que este voltaje diferencial es amplificado por el Op Amp para dar a la salida en voltaje de $V_{od} = 5\ \text{V}_{rms}$, por tanto, la ganancia en modo diferencial es:

$$A_d = \frac{V_{od}}{V_d} = \frac{5 V_{\text{rms}}}{0.002\ V_{\text{rms}}} = 2500$$

Operación en modo común:

El voltaje común de entrada es: $V_c = 1\ \text{mV}_{rms}$.

Se sabe que este voltaje común es amplificado por el Op Amp para dar a la salida en voltaje de $V_{oc} = 5\ \text{mV}_{rms}$, por tanto, la ganancia en modo común es:

$$A_c = \frac{V_{oc}}{V_c} = \frac{5\ \text{m}V_{\text{rms}}}{1\ V_{\text{rms}}} = 5$$

La RRMC está dada por:

$$\text{RRMC} = \frac{A_d}{R_c} = \frac{2500}{5} = 500$$

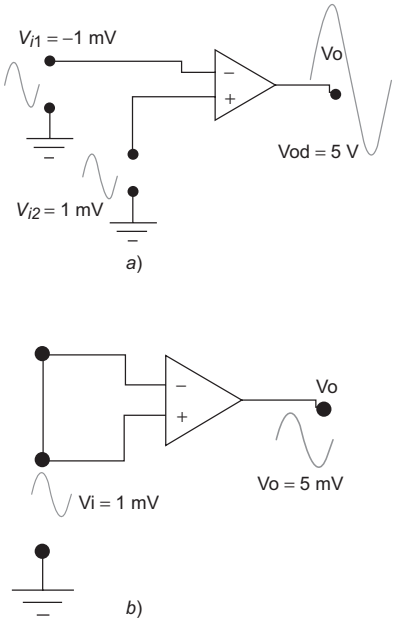


Figura 9.7 Voltajes medidos a la entrada y a la salida de un amplificador operacional. *a*) Modo diferencial. *b*) Modo común. Ejemplo 8.3.

Que puede expresarse también en forma logarítmica en decibeles (dB):

$$\text{RRMC (log)} = 20 \log_{10} \frac{A_d}{A_c} = 20 \log_{10} 500 = 53.97 \text{ dB}$$

En un amplificador operacional ideal, la ganancia en modo diferencial A_d es infinita, mientras que la ganancia en modo común A_c es cero, por lo que la RRMC es infinita. En la práctica, mientras mayor sea la RRMC, mejor será la operación del circuito.

El voltaje de salida V_o en un Op Amp está relacionado con su RRMC de la siguiente forma: si se combinan las ecuaciones 9.4 y 9.5 se obtiene:

$$V_o = A_d V_d + A_c V_c = A_d V_d \left(1 + \frac{A_c V_c}{A_d V_d}\right)$$

Y de la ecuación 9.5 se tiene que $\text{RRMC} = \dfrac{A_d}{A_c}$

O lo que es lo mismo: $\dfrac{A_c}{A_d} = \dfrac{1}{\text{RRMC}}$, entonces, el voltaje de salida en función de la RRMC será:

$$V_o = A_d V_d \left(1 + \frac{1}{\text{RRMC}} \frac{V_c}{V_d}\right) \qquad \text{(ecuación 9.7)}$$

En la ecuación 9.7 puedes observar que mientras más grande sea el valor de la RRMC, el segundo término dentro del paréntesis tiende a hacerse cero, quedando prácticamente solo el 1 como factor para $A_d V_d$. Se demuestra entonces que la salida del Op Amp se debe principalmente al voltaje diferencial V_d y al factor *ganancia en voltaje diferencial* A_d.

COMPETENCIAS:

- Comprender la operación de las principales configuraciones aplicadas en los amplificadores operacionales.
- Calcular la señal de salida en las configuraciones principales de los amplificadores operacionales. [2]

9.2 Configuraciones básicas del amplificador operacional

En la sección anterior se trataron las características relevantes de un amplificador operacional, con base en lo que sería un dispositivo *ideal*. Los amplificadores operacionales en la práctica tienen comportamientos muy semejantes a lo descrito; sólo que para operar como se ha explicado es necesario acoplar a sus terminales resistencias de valores calculados para configurar alguna de las formas de operar. Se pueden conectar según dos configuraciones básicas: *inversora* y *no inversora*; casi todos los demás circuitos con amplificadores operacionales están basados, de alguna manera, en estas dos configuraciones. Veamos en esta sección las configuraciones básicas más usuales en los sistemas electrónicos.

9.2.1 Amplificador operacional inversor

La figura 9.8 ilustra la primera configuración básica del Op Amp, el *amplificador inversor*. En este circuito la entrada no inversora (+) está

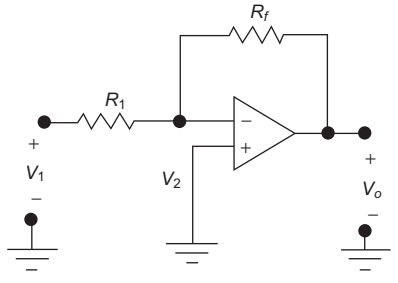


Figura 9.8 Amplificador operacional inversor.

conectada a tierra, y la señal por amplificar (llamémosle V_1) se aplica a la entrada inversora (–) a través de R_1, con realimentación desde la salida a través de R_f. Al aplicar las propiedades anteriormente establecidas del Op Amp ideal, las características distintivas de este circuito se pueden analizar como sigue.

La ganancia de este amplificador es:

$$A_v = \frac{V_o}{V_1} = -\frac{R_f}{R_1} \qquad \text{(ecuación 9.8)}$$

La ecuación 9.8 se refiere a la ganancia en lazo cerrado, también representada por A_{CL}. El signo negativo de la expresión 9.8 indica el cambio de fase entre la señal de salida y la de entrada. En esta expresión se puede ver que el voltaje de salida está en proporción directa a la relación que existe entre la resistencia de realimentación R_f y la resistencia de entrada R_1.

$$V_o = -\frac{R_f}{R_1} V_1 \qquad \text{(ecuación 9.9)}$$

Por esta razón, a este amplificador también se le conoce como *multiplicador inversor de ganancia constante*.

En un Op Amp existe también la ganancia en lazo abierto (A_{OL}), que es la razón del voltaje de salida entre el voltaje de entrada sin realimentación externa.

A la razón de la ganancia en lazo abierto entre la ganancia en lazo cerrado se le conoce como ganancia de lazo (A_L)

$$A_L = \frac{A_{OL}}{A_{CL}} \qquad \text{(ecuación 9.10)}$$

EJEMPLO 9.4

Calcula el voltaje de salida del circuito amplificador mostrado en la figura 9.9, si el voltaje de entrada es de 1.5 V.

Solución

Datos:

$V_i = 1.5$ V
$R_1 = 100\ \Omega$
$R_f = 400\ \Omega$
$V_o = ?$

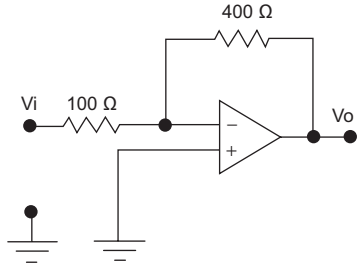


Figura 9.9 Amplificador operacional inversor. Ejemplo 9.4.

Planteamiento:

Se trata de un amplificador inversor cuyo voltaje de salida se calcular directamente con la ecuación 9.9.

Desarrollo:

Al aplicar la ecuación 9.9 se tiene:

$$V_o = -\frac{R_f}{R_1} V_1 = -\frac{400\ \Omega}{100\ \Omega}(1.5\ \text{V})$$

$$V_o = -6\ \text{V}$$

El amplificador inversor *real* tiene propiedades adicionales con relación al amplificador inversor *ideal*. La ganancia se puede variar ajustando el valor de R_1, o bien el de R_2. Si R_f varía desde cero hasta infinito, la ganancia variará también desde cero hasta infinito, puesto que es directamente proporcional a R_f.

- La impedancia de entrada es igual a R_I, entonces V_i y R_I únicamente determinan la corriente I_i, por lo que la corriente que circula por R_f es siempre I_i, para cualquier valor de dicha R_f.

9.2.2 Amplificador operacional no inversor

La segunda configuración básica del Op Amp es el *amplificador no inversor* o *multiplicador*, mostrado en la figura 9.10. En este circuito, el voltaje V_i se aplica a la entrada *no inversora* (+), y una fracción de la señal de salida, V_o, se aplica a la entrada (–) a través del divisor de voltaje formado por R_I y R_f.

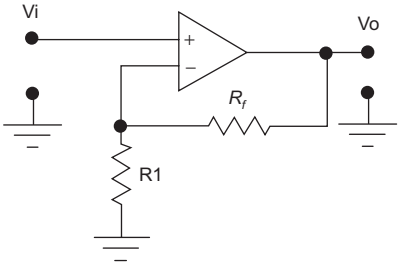


Figura 9.10 Amplificador operacional no inversor.

$$V_1 = V_o \frac{R_1}{R_1 + R_f} \qquad \text{(ecuación 9.11)}$$

Por tanto, el voltaje de salida es:

$$V_o = \frac{R_1 + R_f}{R_i} V_1 \qquad \text{(ecuación 9.12)}$$

A partir de la ecuación 9.12 se puede obtener la relación de voltaje de salida respecto del voltaje de entrada, lo que nos da la ganancia en voltaje

$$A_v = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R_1 + R_f}{R_i} = 1 + \frac{R_f}{R_1} \qquad \text{(ecuación 9.13)}$$

EJEMPLO 9.5

Calcula el voltaje de salida del circuito amplificador mostrado en la figura 9.11, si el voltaje de entrada es de 1.5 V.

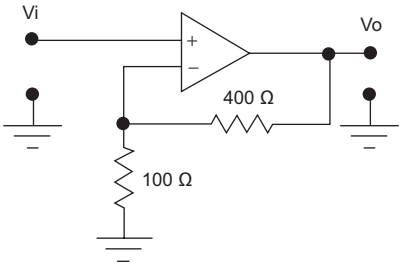


Figura 9.11 Amplificador operacional no inversor. Ejemplo 9.5.

COMPETENCIAS:
- Comprender la forma de operar de un amplificador operacional como sumador, integrador y diferenciador. [1]
- Obtener teóricamente las variables de salida y entrada en las configuraciones básicas del amplificador operacional. [2]
- Desarrollar la simulación de circuitos básicos con amplificadores operacionales. [1]

Solución
Datos:

$V_i = 1.5\ \text{V}$
$R_1 = 100\ \Omega$
$R_f = 400\ \Omega$
$V_o = ?$

Planteamiento:

Se trata de un amplificador no inversor cuyo voltaje de salida se calcular directamente con la ecuación 9.11.

Desarrollo:

Al aplicar la ecuación 9.12 se tiene:

$$V_o = \frac{R_1 + R_f}{R_i} V_1 = \frac{100\ \Omega + 400\ \Omega}{100\ \Omega}(1.5\ \text{V})$$

$$V_o = +7.5\ \text{V}$$

9.2.3 Amplificador operacional como seguidor unitario

Una modificación especial del amplificador no inversor es la etapa de ganancia unitaria mostrada en la figura 9.12. En este circuito la resistencia de entrada se ha incrementado hasta infinito y R_f es cero, y la realimentación es de 100%. Entonces V_0 es exactamente igual a V_i. El circuito se conoce como *seguidor de emisor* o *seguidor unitario,* puesto que la salida es una réplica en fase con ganancia unitaria del voltaje de entrada. La impedancia de entrada de esta etapa también es infinita.

$$V_o = V_i \qquad \text{(ecuación 9.14)}$$

9.3 Configuraciones basadas en los circuitos inversor y no inversor

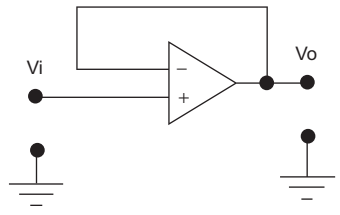


Figura 9.12 El Op Amp operando como un seguidor unitario.

A partir de las configuraciones básicas del amplificador operacional se elaboran una serie de circuitos de aplicación práctica como los que se explican a continuación.

9.3.1 Amplificador sumador

En la configuración de un amplificador sumador se establece que el voltaje de salida es la suma algebraica invertida de los voltajes de entrada

multiplicados por un factor corrector, que está dado por la relación del resistor de realimentación R_f respecto de la resistencia, en la cual se aplica la señal de entrada. Lo anterior tiene su expresión matemática siguiente:

$$V_o = -\left(V_1 \frac{R_f}{R_1} + V_2 \frac{R_f}{R_2} + V_3 \frac{R_f}{R_3} \right) \qquad \text{(ecuación 9.15)}$$

Hay una ganancia global del circuito que está dada por el valor de R_f, la cual, cuya forma de conectar es hacia la terminal de entrada, hace que el sistema se comporte como el amplificador inversor básico. A las ganancias individuales se les aplican independientemente los factores de escala dados por los valores de R_1, R_2, R_3, etcétera. Del mismo modo, R_1, R_2 y R_3 determinan las impedancias de entrada de los respectivos canales usados para aplicación de señales individuales. El circuito puede contar con cualquier número de entradas, basta añadir resistencias de entrada adicionales en el nodo suma.

EJEMPLO 9.6

Calcula el voltaje de salida del circuito amplificador sumador mostrado en la figura 9.13, si los voltajes de entrada son $V_1 = 1.5$ V, $V_2 = 0.5$ V y $V_3 = 1.8$ V, y los resistores de los canales de entrada son $R_1 = 100$ kΩ, $R_2 = 220$ kΩ y $R_3 = 450$ kΩ. El resistor de realimentación es $R_f = 1.2$ MΩ.

Solución

Datos:

$V_1 = 1.5$ V, $V_2 = 0.5$ V, $V_3 = 1.8$ V
$R_1 = 100$ kΩ, $R_2 = 220$ kΩ, $R_3 = 450$ kΩ, $R_f = 1.2$ MΩ
$V_o = ?$

Planteamiento:

Se trata de un amplificador sumador cuyo voltaje de salida se calcula directamente con la ecuación 9.15.

Desarrollo:

Al aplicar la ecuación 9.15 y sustituir los valores dados, se tiene:

$$V_o = -\left(V_1 \frac{R_f}{R_1} + V_2 \frac{R_f}{R_2} + V_3 \frac{R_f}{R_3} \right)$$

$$V_o = -\left[(1.5\,V)\frac{1.2\ \text{M}\Omega}{100\ \text{k}\Omega} + (0.5\ \text{V})\frac{1.2\ \text{M}\Omega}{220\ \text{k}\Omega} + (1.8\ \text{V})\frac{1.2\ \text{M}\Omega}{450\ \text{k}\Omega} \right]$$

$$V_o = -25.52\ \text{V}$$

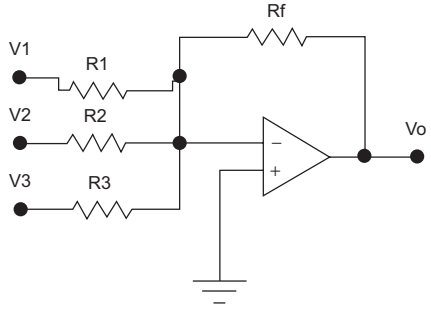


Figura 9.13 Amplificador sumador con tres canales de entrada hacia la terminal inversora.

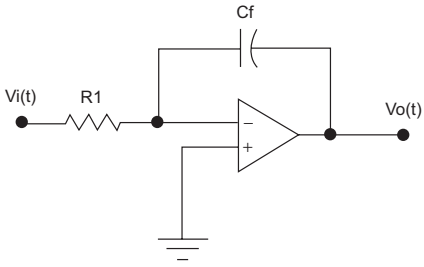


Figura 9.14 Configuración del amplificador integrador.

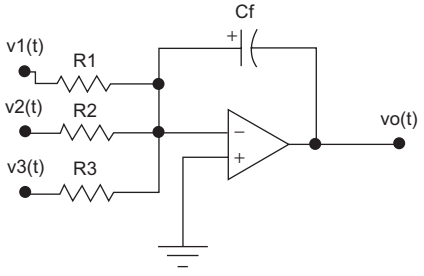


Figura 9.15 Configuración de un circuito integrador sumador.

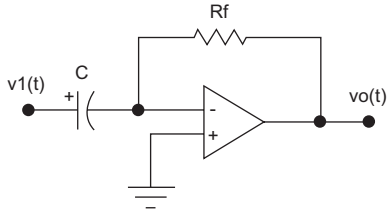


Figura 9.16 Configuración de un circuito diferenciador.

9.3.2 Amplificador integrador

Las configuraciones básicas vistas hasta ahora consisten en redes resistivas conectadas al Op Amp; sin embargo, para la realimentación de la salida hacia la entrada también se emplean capacitores. Cuando se utiliza un capacitor en tales condiciones, esta configuración constituye un amplificador integrador, como se muestra en la figura 9.14.

El capacitor realimentador en el amplificador integrador, se identifica por C_f, y se coloca en la red como muestra la figura 9.15. La función interna de este tipo de circuitos queda fuera de los propósitos de este libro; sin embargo, alguna consulta al respecto puede ser referida a la bibliografía más especializada, recomendada al final del libro. Este amplificador integrador entrega un voltaje que en función del tiempo se expresa como

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC_f}\int v_1(t)\,dt \qquad \text{(ecuación 9.16)}$$

A este amplificador integrador se le aplican varias señales de entrada, uno de los usos más frecuentes que se le da en las computadoras analógicas, convirtiendo a la ecuación 9.16 en una suma de señales de entrada, integradas cada una de ellas y afectadas por un factor modificador dado por la característica propia de cada entrada, como muestra la siguiente ecuación.

$$v_o(t) = -\left[\frac{1}{R_1C_f}\ v_1(t)\,dt + \frac{1}{R_2C_f}\ v_2(t)\,dt + \frac{1}{R_3C_f}\ v_3(t)\,dt\right]$$

(ecuación 9.17)

9.3.3 Amplificador diferenciador

Otra posible modificación del amplificador inversor, que también aprovecha la corriente en un capacitor, es el circuito diferenciador mostrado en la figura 9.16. Aunque este circuito no es tan empleado como los anteriores, también proporciona una operación sumamente útil en el procesamiento electrónico de datos. La relación resultante para el voltaje de salida es:

$$v_o(t) = -R_fC\frac{dv_i(t)}{dt} \qquad \text{(ecuación 9.18)}$$

Existen en el mercado diversas presentaciones para los amplificadores operacionales. Una de las más usadas es la que presenta la figura 9.17*a*, que consiste en un encapsulado tipo DIP en cuyo interior se tienen dos amplificadores, como ilustra la figura 9.17*b*, se trata de un circuito integrado de 8 terminales, de fácil manejo y montaje muy práctico en placas de circuito impreso o bien en un *protoboard*.

En la hoja de datos del dispositivo, el fabricante específica para cada caso las características físicas, eléctricas y de operación, así como la forma de conexión, identificando sus terminales, como se observa en la figura 9.17*b*.

COMPETENCIAS:
- Comprender el concepto de amplificación multietapas. [2]
- Diseñar circuitos multietapas básicos usando amplificadores operacionales. [2]

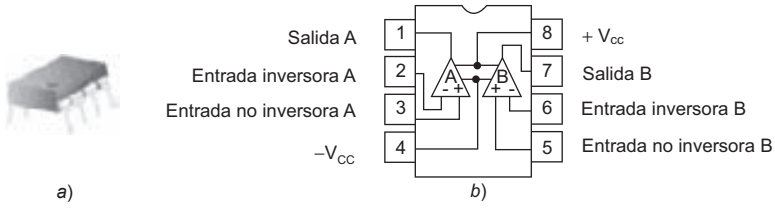


Figura 9.17 Amplificador operacional de circuito integrado. *a*) Presentación física *b*) Diagrama de estructura interna del dispositivo.

9.4 Amplificador de más de una etapa

Se dijo que la ganancia de voltaje de un amplificador se determina al comparar el voltaje de salida V_o con el voltaje de entrada V_i. Pero aún más, si el voltaje de salida de un amplificador se aplica a la entrada de un segundo amplificador se tendrá una segunda etapa de amplificación. De ahí que se habla de amplificadores multietapas, en los que cada una de las etapas tiene su propia ganancia de voltaje A_{vi}, donde *i* nos indica el número de la etapa correspondiente. Esto es, si se tiene un amplificador con tres etapas que se pueden identificar como 1, 2 y 3, la ganancia total de este sistema será:

$$A_v = A_{v1}\, A_{v2}\, A_{v3} \qquad \text{(ecuación 9.19)}$$

$$\text{y} \quad A_{v1} = \frac{V_{o1}}{V_{i1}}, \quad A_{v2} = \frac{V_{o2}}{V_{i2}}, \quad A_{v3} = \frac{V_{o3}}{V_{i3}}$$

EJEMPLO 9.7

Calcula el voltaje de salida V_o para el amplificador de la figura 9.18 si $Vi = 10\ \mu\text{V}$.

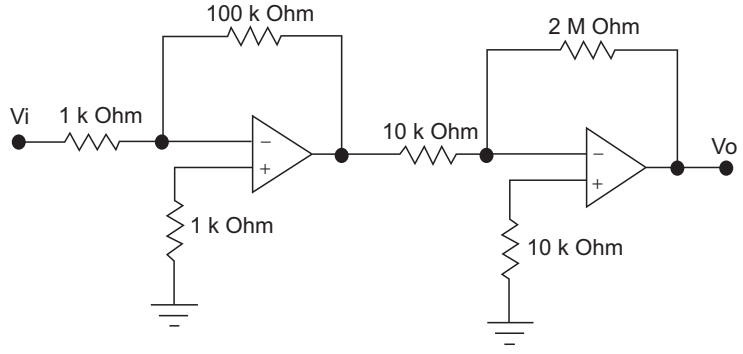


Figura 9.18 Ejemplo 9.7

Solución
Datos:

$$V_i = 10\ \mu\text{V}$$

Desarrollo:

Según la ecuación 9.19, la ganancia total de este circuito de dos etapas está dada por

$$A_v = A_{v1}\, A_{v2}.$$

Donde de acuerdo con la ecuación 9.9 $V_o = -\dfrac{R_f}{R_1} V_1$

Para la primera etapa se tiene:

$$V_{o1} = -\frac{100\,\text{k}\Omega}{1\,\text{k}\Omega} 10\,\mu V = 1\,\text{m}V$$

$$V_{o2} = -\frac{2\,\text{M}\Omega}{10\,\text{k}\Omega} 1\,\text{m}V = 200\,\text{m}V$$

Resultado: $V_O = 200\,\text{mV}$

Actividades para la evaluación de competencias

Principios básicos de los amplificadores operacionales

9.1 Explica brevemente el concepto *ganancia en lazo abierto* para un Op Amp. [1]
9.2 ¿A qué se le llama *ganancia en lazo cerrado* en un Op Amp? [1]
9.3 Describe el concepto de *operación en modo común* para un Op Amp. [1]

Configuraciones básicas del amplificador operacional

9.4 Calcula la ganancia en lazo cerrado para el amplificador operacional de la figura 9.9, asumiendo que $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$ y $R_f = 100\,\text{k}\Omega$. [2]
9.5 Calcula el voltaje de salida V_o para el amplificador operacional del ejercicio 9.4 si a la entrada se aplica un voltaje $V_i = 12\,\text{mV}_{\text{pp.}}$ [2]
9.6 Dibuja las señales para V_i y V_o para el ejercicio 9.5. [2]
9.7 Calcula el voltaje de salida en lazo cerrado para el circuito de la figura 9.10 si $R_1 = 47\,\text{k}\Omega$ y $R_f = 470\,\text{k}\Omega$ y se aplica un voltaje de entrada $V_i = 5\,\text{mV}_{\text{pp.}}$ [3]
9.8 Explica el concepto de *circuito seguidor unitario* para un Op Amp.

Configuraciones basadas en los circuitos inversor y no inversor

9.9 ¿Qué valor de *Vo* se espera para el circuito de la figura 9.13, asumiendo que $R_1 = 10\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 10\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 20\,\text{k}\Omega$ y $R_f = 20\,\text{k}\Omega$ y se aplican los voltajes $V_1 = +200\,\text{mV}_{\text{pp.}}$, $V_2 = +300\,\text{mV}_{\text{pp.}}$, $V_3 = +300\,\text{mV}_{\text{pp}}$ a la entrada? [2]
9.10 Calcula el valor del voltaje de salida para el circuito de la figura 9.13, si $R_1 = 20\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 20\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 10\,\text{k}\Omega$ y $R_f = 10\,\text{k}\Omega$ y se aplican los voltajes $V_1 = +200\,\text{mV}_{\text{pp.}}$, $V_2 = +300\,\text{mV}_{\text{pp.}}$, $V_3 = +300\,\text{mV}_{\text{pp}}$ a la entrada. [3]

Amplificador de más de una etapa

9.11 Calcula el voltaje de salida V_0 para el circuito de la figura 9.19 si $Vi = 10\,\mu V$. Comprueba el resultado con el simulador de circuitos. [3]

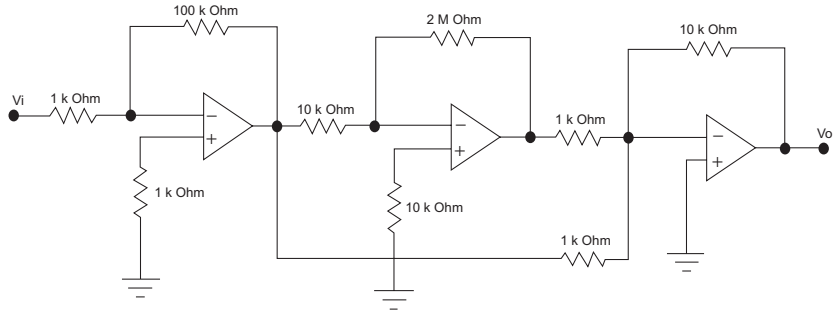


Figura 9.19 Ejercicio 9.11

Notas:

[1] Competencias de la dimensión Instrumental.
[2] Competencias de la dimensión Sistémica.
[3] Competencias de la dimensión Interpersonal.

Tercera Parte

Electrónica digital básica

Capítulo 10 Sistemas numéricos

Capítulo 11 Álgebra booleana y compuertas lógicas

Capítulo 12 Circuitos lógicos combinacionales y secuenciales

Capítulo 10

Sistemas numéricos

Temas	Estructura: Conceptuales
10.1 Sistemas numéricos 10.1.1 ¿Qué son los sistemas digitales? 10.1.2 Sistema numérico decimal. 10.1.3 Conteo en sistema numérico decimal. 10.1.4 Sistema numérico binario. 10.1.5 Conversión de un número binario a decimal. 10.1.6 Conversión de un número decimal a binario. 10.1.7 Conteo en sistema numérico binario. 10.1.8 Sistema numérico octal. 10.1.9 Conversiones del sistema octal a binario. 10.1.10 Conversiones del sistema binario a octal. 10.1.11 Conversiones del sistema decimal a octal. 10.1.12 Conversión de un número octal a decimal. 10.1.13 Sistema numérico hexadecimal. 10.1.14 Conversión de sistema decimal a hexadecimal. 10.1.15 Conversión de un número hexadecimal a decimal. 10.1.16 Conversión de hexadecimal a binario. 10.1.17 Conteo en sistema hexadecimal.	• Concepto de sistema numérico digital. • Cantidades expresadas en sistema numérico decimal. • Descripción del sistema numérico binario. • Descripción del sistema numérico octal. • Descripción del sistema numérico hexadecimal.
10.2 Código BCD	• Descripción del código decimal llevado a binario (BCD).
10.3 Operaciones básicas en aritmética binaria 10.3.1 Suma binaria. 10.3.2 Reta binaria. 10.3.3 Multiplicación binaria. 10.3.4 División binaria.	• Descripción de las operaciones básicas en aritmética binaria.
10.4 Formas de notación binaria 10.4.1 Notación con signo (negativos). 10.4.2 Notación de binario en complemento a uno. 10.4.3 Notación de binario en complemento a dos. 10.4.4 Aplicaciones de las formas de complementos a unos y a dos.	• Formas para representar las cantidades binarias y algunas aplicaciones.
Actividades para la evaluación de competencias	

	temática
	CONTENIDOS

	Procedimentales	Actitudinales
	• Proceso para contar en sistema numérico decimal. • Procesos para conversión de cantidades entre los sistemas binario y decimal. • Proceso para contar en sistema numérico binario. • Procesos para conversión de cantidades entre sistemas octal y binario. • Procesos para conversión de cantidades entre sistemas decimal y octal. • Procesos para conversión de cantidades entre sistemas decimal y hexadecimal. • Procesos para conversión de cantidades entre sistemas hexadecimal y binario. • Proceso de conteo en sistema hexadecimal.	• Elementos para apreciar el valor que representa la utilización de sistemas numéricos diversos y sus relaciones, para la solución de problemas matemáticos. • Elementos para autoevaluar el trabajo personal y de equipo. • Fundamentos estructurados para tomar decisiones.
	• Aplicación del BCD en aritmética binaria.	
	• Procesos para realizar operaciones de suma, resta, multiplicación y división con cantidades binarias.	
	• Operaciones básicas binarias con aplicación de notaciones complemento a unos y complemento a dos.	

Orientación general		
Analizar los sistemas numéricos básicos utilizados para el procesamiento de datos en los sistemas electrónicos digitales.		
Competencias		
Dimensión Instrumental [1]	**Dimensión Sistémica [2]**	**Dimensión Interpersonal [3]**
Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:
1.1 Comprender el concepto *base* de un sistema numérico. 1.2 Comprender la estructuración de un sistema numérico según su base. 1.3 Comprender los conceptos *dígito con mayor significatividad y dígito con menor significatividad*. 1.4 Comprender los fundamentos de los sistemas numéricos básicos aplicados en los sistemas electrónicos digitales. 1.5 Comprender los algoritmos para conversión de cantidades de un sistema numérico a otro. 1.6 Comprender el concepto de *código* empleado en sistemas numéricos. 1.7 Comprender y aplicar sistemas digitales en operaciones básicas en aritmética binaria. 1.8 Conocer las formas de notación binaria y su aplicación en la aritmética básica.	2.1 Interpretar cantidades expresadas en sistema numérico decimal. 2.2 Desarrollar el proceso de conteo en sistema numérico decimal. 2.3 Interpretar cantidades expresadas en sistema numérico binario. 2.4 Convertir cantidades expresadas en sistema binario a sistema decimal, y viceversa. 2.5 Desarrollar el proceso de conteo en sistema numérico binario. 2.6 Interpretar cantidades expresadas en sistema numérico octal. 2.7 Convertir cantidades en sistema octal a sistema binario, y viceversa. 2.8 Convertir cantidades expresadas en sistema decimal a octal, y viceversa. 2.9 Convertir cantidades expresadas en sistema decimal a sistema hexadecimal, y viceversa. 2.10 Convertir cantidades expresadas en sistema hexadecimal a binario. 2.11 Desarrollar el proceso de conteo en sistema hexadecimal. 2.12 Convertir cantidades expresadas en sistema de base diez a BCD. 2.13 Desarrollar operaciones fundamentales en sistema binario. 2.14 Expresar cantidades binarias mediante la notación complemento a uno. 2.15 Expresar cantidades binarias mediante la notación complemento a dos.	3.1 Valorar la importancia que tiene la aplicación de los dispositivos electrónicos en el desarrollo de operaciones numéricas básicas. 3.2 Evaluar su propio trabajo, mediante la comparación de resultados teóricos de cálculos, de simulación y de experimentación en el laboratorio.

Introducción

COMPETENCIAS:

- Valorar la importancia que tiene la aplicación de los dispositivos electrónicos en el desarrollo de las operaciones matemáticas básicas. [3]
- Evaluar su propio trabajo, mediante la comparación de resultados técnicos de cálculos, de simulación y de experimentación en el laboratorio. [3]

Se dice que el mundo es analógico, ya que lo conocemos a través de nuestros sentidos al percibir la luz, el calor, el movimiento, el sonido, los olores, las formas, que son manifestaciones de la energía y la materia que lo constituyen. Esta percepción la procesa el cerebro y los sistemas que permiten su funcionamiento, detectando y registrando cambios constantes en las cantidades de energía que llegan hasta él. En el sentido inverso, una vez que a nuestro cerebro llegan señales de manifestaciones diversas de la energía que nos rodea través de procesos complejos y, en gran medida, del razonamiento lógico, éste es capaz de hacer representaciones de esas magnitudes mediante esquemas y modelos de distintos tipos, como las imágenes, las palabras, los movimientos y, entre otras, las representaciones matemáticas, para ello utiliza los números, que representan cantidades de alguna magnitud. Así es que podemos hablar de tiempo, velocidad, longitud, temperatura, presión, potencial eléctrico y muchas otras magnitudes más, que representamos con valores numéricos comprendidos dentro de rangos determinados, pudiendo llegar a adquirir en un momento dado algún valor dentro de una infinidad de posibilidades dentro de ese rango. Estamos hablando de *variables continuas*, y esto es lo que le da la característica de *analógico* a nuestro mundo. Sin embargo, estas magnitudes tienen representaciones matemáticas en una forma *digitalizada* equivalente, a partir del empleo de variables discretas,[1] aquellas que adquieren valores definidos por medio de cantidades enteras, como 1, 2, 3, 74, etcétera.

En el contexto de los circuitos electrónicos también se utilizan los conceptos *analógico* y *digital*, en referencia a la forma en que éstos utilizan y transforman la energía para su aprovechamiento en sistemas de cualquier tipo. En los capítulos anteriores se ha hecho una revisión de los conceptos básicos de la electrónica a través de los circuitos analógicos. En este capítulo se hace una introducción a los circuitos electrónicos digitales; aquellos que podemos encontrar actualmente en todos los sistemas electrónicos como los receptores de televisión, sistemas de audio y de video, en telefonía, tanto por cable como inalámbrica, en automóviles y, desde luego, en los sistemas de computación, cuyo funcionamiento se da a partir de la utilización de cantidades discretas o digitalizadas.

Todos estos sistemas electrónicos han venido desarrollándose a través de la electrónica analógica, hasta los años setenta, del siglo xx cuando se presentó un desarrollo acelerado de la electrónica digital, cuyos sistemas funcionan mediante la utilización de cantidades de energía eléctrica que puede sistematizarse con cantidades de valores discretos.

En la actualidad la electrónica digital se desarrolla a través de la aplicación de circuitos, cuyos componentes tienen presentaciones varias; bien sea que tengan una presentación individual (se les llama circuitos discretos), o que estén integrados en una cápsula compacta que puede realizar múltiples funciones (circuitos integrados).

[1] El término *discreto* proviene del latín *discretus* cuyo significado es "separado de". Sin embargo tiene diferentes connotaciones, depende del contexto en que se aplique.

En este capítulo se hace una revisión de los fundamentos de la electrónica digital, los componentes electrónicos digitales básicos y la forma en que utilizan la energía eléctrica para realizar funciones a grandes velocidades de procesamiento y utilizando cantidades menores de energía para su alimentación. Por ejemplo, las computadoras actuales, que son completamente digitales, trabajan a elevadas velocidades, con grandes capacidades de almacenamiento de datos y consumen pequeñas cantidades de energía, pueden operar con pilas eléctricas, lo cual las convierte en computadoras portátiles que el usuario puede llevar en un maletín; en comparación con las primeras computadoras que se diseñaron, las cuales utilizaban en ocasiones cientos y hasta miles de tubos al vacío, los cuales consumían grandes cantidades de energía, ocupaban grandes espacios y con un peso que en algunos casos se medía en el orden de las toneladas.

10.1 Sistemas numéricos

10.1.1 ¿Qué son los sistemas *digitales*?

COMPETENCIAS:
- Comprender el concepto base de un sistema numérico. [1]
- Comprender la estructuración de un sistema numérico según su base. [1]

En capítulos anteriores se vio el funcionamiento de dispositivos semiconductores, como el diodo y el transistor bipolar de unión, los cuales operan al polarizarlos apropiadamente con voltajes cuyos valores pueden encontrarse dentro de un intervalo determinado. El resultado es que dichos dispositivos proporcionan a su salida voltajes de diferentes valores, por ejemplo, de 0 a 10 volts, en el cual existen teóricamente una infinidad de posibles valores como 8.33V, 9.275 V, etcétera. Sin embargo, si se desea que un BJT o un diodo semiconductor funcionen como dispositivos conmutadores, se dice que están operando en dos posibles estados: *encendido* o *apagado*, o bien *conduce* o *no conduce*, ya que *entregan voltaje* o *no entregan voltaje*, *permiten el paso de la corriente* o *no lo permiten*, sin que tengan estados intermedios de operación. Dichos estados pueden representarse matemáticamente como 1 cuando conduce o 0 cuando no conduce; pudiendo interpretarse también como 1: encendido, alto, verdadero, 0: apagado, bajo, falso. El empleo de los *dígitos* 1 y 0 es de donde deriva el término *digital* aplicado a los sistemas electrónicos.

COMPETENCIAS:
- Comprender los fundamentos de los sistemas numéricos básicos aplicados en los sistemas electrónicos digitales. [1]
- Interpretar cantidades expresadas en el sistema numérico decimal. [2]
- Desarrollar el proceso de conteo en el sistema numérico decimal. [1]

El hecho de utilizar los valores 1 y 0 para enumerar estos dos estados nos lleva al concepto de *sistema numérico binario* con aplicación en sistemas electrónicos. En consecuencia, el primer paso para incursionar en los circuitos electrónicos digitales consiste en comprender apropiadamente el sistema binario y la forma en que se puede pasar de éste a otros sistemas numéricos, y viceversa, como se verá en las siguientes secciones.

10.1.2 Sistema numérico decimal

Es el sistema numérico con el cual estamos más familiarizados, por su uso cotidiano y común. Sabemos que es el conjunto de diez números representados por los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Se dice que es un

sistema numérico de *base diez,* y cada uno de sus elementos puede tener un valor absoluto, dado por la cantidad que representan por sí mismos, y un valor relativo, que está dado por la posición que guardan dentro de una cantidad, en razón de potencias de base 10.

Para ejemplificar, tomemos el caso de la cantidad expresada como *treinta y un mil quinientos veintisiete enteros con cuarenta y ocho centésimos,* o bien, mediante una representación numérica: 31 527.48 que es una cantidad expresada a través de los dígitos del sistema numérico decimal. Cada dígito tiene su propio valor de acuerdo con lo que representa (valor absoluto), y tiene también un valor relativo, según la posición que ocupa dentro de dicha cantidad, de la siguiente manera, tabla 10.1:

Tabla 10.1 Interpretación de una cantidad expresada en sistema numérico decimal (base 10).

Potencia de 10	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	.	10^{-1}	10^{-2}
Dígito decimal	**3**	**1**	**5**	**2**	**7**	**.**	**4**	**8**
Valor adquirido	3×10^4	1×10^3	5×10^2	2×10^1	7×10^0	.	4×10^{-1}	8×10^{-2}
Equivalencia	30 000	1000	500	20	7	.	0.4	0.08

Es conveniente hacer notar que en el sistema decimal, el dígito con mayor significado es el que se coloca en la posición de la mayor potencia de diez, es decir, el que ocupa el lugar a la extrema izquierda. En el ejemplo ilustrado en la tabla 10.1, este lugar lo ocupa el 3, que está multiplicado por la mayor potencia de diez (10^4); es el lugar de las decenas de millares. Mientras que el dígito con menor significado es el de la extrema derecha, el que se multiplica por la menor potencia de diez. En el ejemplo, este lugar lo ocupa el 8 (10^{-2}), que es el lugar de los centésimos. También observa que el punto *decimal* separa la parte entera de la cantidad (potencias de diez positivas) de la parte fraccionaria (potencias de diez negativas).

De lo anterior se observa que cualquier cantidad expresada en el sistema numérico decimal es la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada dígito por la potencia de diez que le corresponde.

10.1.3 Conteo en sistema numérico decimal

Una de las aplicaciones primarias que tiene un sistema numérico es la operación de contar, que consiste en considerar una a una las unidades de un conjunto o colección (de cualquier especie) para conocer el total de ellas.

El conteo inicia con el 0 en posición de las unidades y se toma en ese lugar a cada uno de los diez dígitos en forma progresiva. Del 0 tomamos luego el 1, enseguida el 2, y así con los sucesivos. Al llegar al último dígito, el 9, se vuelve a iniciar con el 0 en la posición de las unidades, pero

como ya se ha acumulado un total de diez unidades, se colocará un 1 en la posición de las decenas (10^1); se continúa con el 1 nuevamente en la posición de las unidades, enseguida el 2, etcétera, y al llegar al 9, se vuelve a iniciar con el 0 en la posición de las unidades, pero en la posición de las decenas se pasará del 1 que se tenía al 2, puesto que se han acumulado ya 20 unidades.

Lo anterior se ejemplifica en la tabla 10.2.

Tabla 10.2 Conteo utilizando el sistema numérico decimal.

10^2	10^1	10^0		10^2	10^1	10^0
		0			**2**	1
		1			2	2
		2			…	…
		3			2	9
		4			3	0
		5			3	1
		6			3	2
		7			…	…
		8			…	…
		9			9	1
	1	0			9	2
	1	1			…	…
	1	2			9	8
	1	3			9	9
	1	4		1	0	0
	1	5		1	0	1
	1	6		1	0	2
	1	7		…	…	…
	1	8		1	9	8
	1	9		1	9	9
	2	0		2	0	0

Cuando se trabaja con más de un sistema numérico en un mismo proceso será necesario aclarar a cuál pertenece cada cantidad; para ello se puede utilizar un número subíndice a la derecha indicando la base del sistema que se emplea; como ejemplo, la cantidad que se trató anteriormente se puede escribir de la siguiente manera: $31\ 527.48_{10}$ indica que el número 31 527.48 se expresa en el sistema numérico decimal.

10.1.4 Sistema numérico binario

COMPETENCIA:
Interpretar cantidades expresadas en el sistema numérico binario. [2]

Éste es un sistema numérico que contiene dos dígitos: 0 y 1, y es el más utilizado en los circuitos digitales, ya que en sistemas físicos reales es más fácil trabajar con dos niveles de voltaje, que con diez niveles, lo que sucedería al trabajar con un sistema decimal. Se acostumbra llamar a cada uno de ellos como *bit*[2] y se utilizan para representar estados físicos de algún dispositivo o sistema, siendo el *1* la representación de un "sí" (encendido, verdadero o alto) y el *0* la representación de un "no" (apagado, falso o bajo).

Igual que en sistema decimal, cada uno de los dos dígitos del sistema binario tiene su propio valor, 0 o 1, y el valor que adquiere por la posición que guarda dentro de una cantidad, sólo que en potencias de base 2. Por ejemplo, el número

$$11001.01_2$$

Se explica en la tabla 10.3

Tabla 10.3 Interpretación de una cantidad expresada en sistema numérico binario (base 2).

Potencia de 2	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	.	2^{-1}	2^{-2}
Dígito binario	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**.**	**0**	**1**
Valor adquirido	1×2^4	1×2^3	0×2^2	0×2^1	1×2^0	.	0×2^{-1}	1×2^{-2}
Equivalencia en decimal	16	8	0	0	1	.	0.0	$1/2^2 = 0.25$

En esta cantidad, el *bit* más significativo (BMS o *MSB* en inglés) es el de la extrema izquierda, el que ocupa la posición de la potencia 4 para la base dos (2^4), y el *bit* menos significativo (bms o *LSB* en inglés) es el que se posiciona en la extrema derecha; en este ejemplo es el que ocupa el lugar de la potencia –2 de la base dos (2^{-2}). El punto que separa a la parte de los enteros de la parte fraccionaria se le llama punto binario.

[2] *bit,* término que se obtiene de la contracción de las palabras en Inglés *b*inary dig*it* (dígito binario).

COMPETENCIAS:
- Comprender los algorítmos para la conversión de cantidades de un sistema numérico a otro. [1]
- Comprender los conceptos de dígito con mayor significatividad y dígito con menor significatividad. [1]
- Convertir cantidades expresadas en sistema binario a sistema decimal y viceversa. [2]

10.1.5 Conversión de un número binario a decimal

Para conocer la cantidad decimal equivalente a una cantidad expresada en sistema numérico binario, se procede a obtener la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada *bit* por la potencia de dos que le corresponde. A este proceso se le conoce como *conversión de un número binario a decimal*. Se explica en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 10.1

¿A qué número decimal equivale la expresión binaria 11001.01_2?

Desarrollo:

$$11001.01_2 = (1\times 2^4)+(1\times 2^3)+(0\times 2^2)+(0\times 2^1)+(1\times 2^0)+(0\times 2^{-1})+(1\times 2^{-2})$$
$$11001.01_2 = (16)+(8)+(0)+(0)+(1)+(0)+(0.25) = 25.25_{10}$$
$$11001.01_2 = 25.25_{10}$$

EJEMPLO 10.2

Convertir al sistema decimal la expresión binaria 1001101101_2.

Desarrollo:

$$1001101101_2 = (1\times 2^9)+(1\times 2^6)+(1\times 2^5)+(1\times 2^3)+(1\times 2^2)+(1\times 2^0)$$
$$1001101101_2 = (512)+(64)+(32)+(8)+(4)+(1) = 621_{10}$$

10.1.6 Conversión de un número decimal a binario

La conversión de un número decimal a sistema binario requiere de un proceso un poco más elaborado, que puede ser mediante restas sucesivas o bien por medio de divisiones, también sucesivas. Se verán a continuación los dos procedimientos.

Conversión de entero decimal a binario por el método de restas sucesivas

Veamos por pasos el proceso de convertir el número 98_{10} a binario:

1. Se deben considerar los valores de todas las potencias de dos que sean menores que el número 98 para efectuar las restas sucesivas. Se observa que la potencia $2^7 = 128$, es mayor que 98, por tanto, se considerarán sólo las potencias de $2^6 = 64$ y menores.

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1

2. Se inicia restando el 64 del 98. Se anota el resultado y esta operación generará el primer bit 1, el BMS.

$$98 - 64 = 34 \rightarrow \text{se genera un bit 1 (BMS)}$$

3. Al 34, obtenido como resultado, se le resta luego la mayor de las potencias de dos contenidas en dicho resultado. Se trata de 2^5. Se tendrá un segundo resultado:

$$34 - 32 = 2 \rightarrow \text{se genera un bit 1}$$

4. El resultado obtenido ahora, 2, no permite que se le resten las potencias 2^4, 2^3, y 2^2; cada intento de resta generará un bit 0:

$$2 - 16 \text{ no se opera} \rightarrow \text{se genera un bit 0}$$
$$2 - 8 \text{ no se opera} \rightarrow \text{se genera un bit 0}$$
$$2 - 4 \text{ no se opera} \rightarrow \text{se genera un bit 0}$$

5. Sin embargo, al resultado 2 sí se le puede restar el valor de la potencia 2^1:

$$2 - 2 = 0 \rightarrow \text{se genera un bit 1}$$

6. Al resultado 0 se le resta la potencia de dos de la primera posición (2^0). Se trata de la última de las restas sucesivas y se generará el último de los dígitos del proceso, el que corresponde al binario menos significativo (bms). Termina el proceso de conversión.

$$0 - 1 = \text{no se opera} \rightarrow \text{se genera un bit 0 (bms)}$$

7. Al llegar al último resultado de las restas sucesivas posibles, se termina el proceso. Se ordenan los bits obtenidos en cada resta, siendo el BMS el que se obtuvo en la primera de las restas, y el bms el que se obtuvo en la última resta. En resumen, se tiene lo siguiente:

$$98 - 64 = 34 \rightarrow \text{se genera un bit 1 (BMS)}$$
$$34 - 32 = 2 \rightarrow \text{se genera un bit 1}$$
$$2 - 16 \text{ no se opera} \rightarrow \text{se genera un bit 0}$$
$$2 - 8 \text{ no se opera} \rightarrow \text{se genera un bit 0}$$
$$2 - 4 \text{ no se opera} \rightarrow \text{se genera un bit 0}$$
$$2 - 2 = 0 \rightarrow \text{se genera un bit 1}$$
$$0 - 1 = \text{no se opera} \rightarrow \text{se genera un bit 0 (bms)}$$

El resultado de la conversión es:

$$98_{10} = 1100010_2$$

EJEMPLO 10.3

Convierte el 48_{10} a binario.

Desarrollo:

$$48 - 32 = 16 \rightarrow \text{se genera un bit 1 (BMS)}$$
$$16 - 16 = 0 \rightarrow \text{se genera un bit 1}$$

0 – 8 no se opera → se genera un bit 0
0 – 4 no se opera → se genera un bit 0
0 – 2 no se opera → se genera un bit 0
0 – 1 no se opera → se genera un bit 0 (bms)

Resultado: $48_{10} = 110000_2$.

Conversión de entero decimal a binario por el método de divisiones sucesivas

Este método de conversión de un entero decimal a binario consiste en dividir entre 2 al número digital planteado, y el resultado volver a dividirlo entre 2, continuando así hasta que el último dividendo resulte ser un 1. Cada división arrojará un residuo, que puede ser 1 o 0. Dicho residuo se toma para generar un *bit* por cada una de las divisiones sucesivas.

El conjunto de *bits* generados por los residuos formará la cantidad expresada en sistema binario, siendo el residuo de la primera división el *binario menos significativo* (*bms*), y el residuo de la última división será el binario más significativo (BMS)

EJEMPLO 10.4

Resuelve el caso del ejemplo 10.3 aplicando el método de conversión de decimal a binario por divisiones sucesivas.

Desarrollo:

División	Residuo	Bit generado
48 ÷ 2 = 24	0 →	0 (bms)
24 ÷ 2 = 12	0 →	0
12 ÷ 2 = 6	0 →	0
6 ÷ 2 = 3	0 →	0
3 ÷ 2 = 1	1 →	1
1 ÷ 2 = 0	1 →	1 (BMS)

Conversión de fracción decimal a número binario

Este método para convertir una fracción decimal a fracción binaria consiste en la sucesión de multiplicaciones por 2 hasta obtener como resultado 1, sin fracción decimal. Cada multiplicación que se realice generará un *bit* 0 si el resultado es menor que 1, o un *bit* 1 cuando el producto es igual o mayor que 1. Cuando el producto resulta ser mayor que 1, se debe realizar la siguiente multiplicación tomando sólo la parte fraccionaria de este último.

La primera multiplicación por 2 genera el *bit más significativo* (BMS) y el bit generado por la última multiplicación será el *bit menos significativo* (bms).

El proceso continúa hasta que el último producto sea 1.0000, o bien hasta que se tenga el número suficiente de bits para considerar apropiada la conversión

Veamos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 10.5

Convierte a fracción binaria la fracción decimal 0.8125_{10}

Desarrollo:

Multiplicación	Producto	Bit generado
$0.8125 \times 2 =$	$1.625 \rightarrow$	1 (BMS)
$0.625 \times 2 =$	$1.250 \rightarrow$	1
$0.25 \times 2 =$	$0.500 \rightarrow$	0
$0.5 \times 2 =$	$1.000 \rightarrow$	1 (bms)

Resultado: $0.8125_{10} = 0.1101_{2}$

El ejemplo 10.5 es el caso de una fracción decimal cuya conversión lleva a un resultado exacto en la equivalencia con sólo cuatro multiplicaciones sucesivas, ya que la última de ellas dio como resultado 1, sin fracción significativa. Sin embargo, no todas las cantidades decimales presentan esa propiedad, y requerirán de una sucesión de multiplicaciones más larga, que tal vez no lleve al resultado de 1.0000. En este caso, el proceso de conversión podrá terminar cuando se considere que el equivalente binario cuenta con número suficiente de *bits*, dependiendo del propósito de la conversión. Veamos el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 10.6

Convierte a fracción binaria la fracción decimal 0.734_{10}

Desarrollo:

Multiplicación	Producto	Bit generado
$0.734 \times 2 =$	$1.464 \rightarrow$	1 (BMS)
$0.464 \times 2 =$	$0.928 \rightarrow$	0
$0.928 \times 2 =$	$1.856 \rightarrow$	1
$0.856 \times 2 =$	$1.712 \rightarrow$	1
$0.712 \times 2 =$	$1.424 \rightarrow$	1
$0.424 \times 2 =$	$0.848 \rightarrow$	0
$0.848 \times 2 =$	$1.696 \rightarrow$	1 (bms)
…	…	…

Resultado: $0.734 \times 2 = 1011101\ldots_{2}$

En el ejemplo 10.6 se ha decidido terminar el proceso después de siete multiplicaciones sucesivas, aunque aún se tiene una fracción decimal (.696) para continuar con la sucesión de multiplicaciones. Esto

significa que la fracción binaria obtenida de la conversión no es de un valor exactamente equivalente a la fracción decimal dada.

10.1.7 Conteo en sistema numérico binario

COMPETENCIA:
Desarrollar el proceso de conteo en el sistema numérico binario. [2]

El proceso para contar en sistema binario es el mismo que en el conteo decimal: se inicia con el 0 en la posición del binario menos significativo (bms),[3] la de 2^0 (conteo cero). Se toma enseguida el 1 en la misma posición. Después del 1 en la primera posición, se toma de nuevo el 0, agregando ahora un 1 en la segunda posición, la de potencia 2^1, seguirá el 1 en la primera y estará acompañado por el 1 de la segunda posición y luego de nuevo el 0 en la primera posición, para aparecer ahora un 0 en la segunda posición y un 1 en la tercera posición. Este proceso se representa en la tabla 10.4.

Tabla 10.4 Conteo utilizando el sistema numérico binario.

2^2	2^1	2^0		Decimal
		0	=	**0**
		1	=	1
	1	0	=	2
	1	1	=	3
1	0	0	=	4
1	0	1	=	5
1	1	0	=	6
1	1	1	=	7
BMS		bms		

A partir del criterio que se sigue en la tabla 10.4, para el conteo en sistema binario se puede formar una tabla con los primeros 16 binarios en secuencia, con su equivalencia en decimal, tabla 10.5.

Se puede observar en la tabla 10.5 que el conteo en sistema binario presenta un patrón en la alternancia de los binarios 0 y 1. Inicia con las cuatro posiciones en 0 (conteo cero); enseguida se alternan los bits de 0 a 1 en la posición de la potencia cero cada (2^0) veces, mientras que en la posición de potencia 1, los bits se alternan cada (2^1) veces; en la tercera posición el 0 y el 1 se alternan cada (2^2) veces, y para la cuarta posición, los bits 0 y 1 se alternan cada (2^3) veces. Si el conteo tuviera una quinta columna, la alternancia entre bits se daría cada (2^4) veces, la sexta columna tendrá una alternancia entre 0 y 1 cada (2^5) veces.

[3] En este libro se utilizan las iniciales *bms* para abreviar el concepto *binario menos significativo*, y las iniciales BMS para abreviar el concepto *binario más significativo* en una cantidad en sistema binario. Algunos textos utilizan las abreviaturas equivalentes en idioma Inglés *LSB* y *MSB*, respectivamente.

Tabla 10.5 Conteo de los primeros 16 binarios y su equivalente en decimal.

Binario					Decimal
2^3	2^2	2^1	2^0		
0	0	0	0	=	0
0	0	0	1	=	1
0	0	1	0	=	2
0	0	1	1	=	3
0	1	0	0	=	4
0	1	0	1	=	5
0	1	1	0	=	6
0	1	1	1	=	7
1	0	0	0	=	8
1	0	0	1	=	9
1	0	1	0	=	10
1	0	1	1	=	11
1	1	0	0	=	12
1	1	0	1	=	13
1	1	1	0	=	14
1	1	1	1	=	15
BMS			bms		

10.1.8 Sistema numérico octal

COMPETENCIA:
Interpretar cantidades expresadas en el sistema numérico octal. [2]

El sistema numérico octal tiene como base el 8, lo que significa que se compone de ocho dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. De manera semejante al sistema binario, cada dígito tiene su valor propio y el valor relativo que adquieren según la posición que ocupan en una cantidad. Cada posición se desarrolla en función de las potencias de 8. En la tabla 10.6 se muestran los valores equivalentes en sistema numérico decimal, para las primeras 7 potencias:

Tabla 10.6 Primeras 7 potencias con base ocho.

		Decimal
8^0	=	1
8^1	=	8
8^2	=	64
8^3	=	512
8^4	=	4096
8^5	=	32 768
8^6	=	262 144

El sistema octal se ha desarrollado con la misma lógica que se aplica a otros sistemas numéricos, y con frecuencia se utiliza en circuitos digitales, porque cualquier cantidad en sistema octal puede ser convertida fácilmente al sistema binario o viceversa. Su manejo es más fácil, ya que cualquier cantidad expresada en sistema octal opera siempre con menos dígitos que el sistema binario.

10.1.9 Conversiones del sistema octal a binario

COMPETENCIA:
Convertir cantidades en sistema octal al sistema binario, y viceversa. [2]

La conversión de cantidades entre estos dos sistemas numéricos es simple, ya que guardan una relación muy particular, puesto que ocho es la tercera potencia de dos. Esto da por resultado que cada número del sistema octal tiene un equivalente expresado en un grupo de tres bits, como se muestra en la tabla 10.7.

Tabla 10.7 Equivalencia entre sistema octal y binario.

Dígito octal		Dígitos binario
0	=	000
1	=	001
2	=	010
3	=	011
4	=	100
5	=	101
6	=	110
7	=	111

La tabla 10.7 nos ilustra también cómo los primeros ocho grupos de tres bits de sistema binario, tiene cada uno un equivalente con los dígitos del sistema octal.

EJEMPLO 10.7

Convierte el número octal 642_8 a sistema binario.

Desarrollo:

Con base en las equivalencias mostradas en la tabla 10.7 se tiene lo siguiente:

Dígito octal	6	4	2
Equivalente binario	110	100	010

El resultado es: 642_8 equivalente a 110100010_2

10.1.10 Conversiones del sistema binario a octal

La conversión de sistema binario a octal representa un proceso inverso al que se utiliza para la conversión octal a binario. La cantidad dada en sistema binario se organiza en grupos de tres bits, y cada uno de estos grupos tiene su equivalente en sistema octal, como se muestra en la tabla 10.7. El agrupamiento de tres bits del extremo de la derecha generará el octal menos significativo, mientras que el agrupamiento del extremo izquierdo generará el octal más significativo.

EJEMPLO 10.8

Convierte a sistema numérico octal las siguientes cantidades binarias:

a) 101110_2 *b*) 111100_2 *c*) 100010_2

Desarrollo:

Al organizar los bits en grupos de tres se tiene:

Binario	101	110		111	100		100	010
Equivalencia octal	5	6		7	4		4	2

a) $101110_2 = 56_8$ *b*) $111100_2 = 74_8$ *c*) $100010_2 = 42_8$

10.1.11 Conversiones del sistema decimal a octal

COMPETENCIA:
Convertir cantidades expresadas en el sistema decimal a octal, y viceversa. [2]

El método más sencillo para la conversión de sistema decimal a octal es el de divisiones sucesivas entre 8, semejante al empleado para la conversión decimal a binario. En este caso se inicia dividiendo entre 8 la cantidad decimal dada; el residuo de esta primera división genera el dígito menos significativo de la cantidad octal. Se continúa con una nueva división del resultado anterior entre 8 cada vez, hasta que se genere una división cuyo resultado sea igual a cero. El residuo que arroje cada división generará un dígito octal. La última división, la que entrega un cociente igual a cero, genera el dígito octal más significativo.

EJEMPLO 10.9

Convierte a sistema octal la cantidad decimal 127_{10}.

Desarrollo por medio de divisiones sucesivas entre 8:

División	Residuo
$127 \div 8 = 15$	7 (dígito menos significativo)
$15 \div 8 = 1$	7
$1 \div 8 = 0$	1 (dígito más significativo)

Resultado: $127_{10} = 177_8$

10.1.12 Conversión de un número octal a decimal

El procedimiento para conocer la cantidad decimal equivalente a una cantidad expresada en sistema numérico octal, consiste en obtener la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada dígito octal por la potencia de 8 que le corresponde. Por ejemplo, para reconvertir la cantidad octal 771_8 a decimal, del ejemplo 10.4 se procede como sigue:

EJEMPLO 10.10

Convierte la cantidad octal 771_8 a sistema numérico decimal.

Potencia de 8	8^2	8^1	8^0
Dígito octal	**1**	**7**	**7**
Valor adquirido	1×8^2	7×8^1	7×8^0
Equivalencia en decimal	64	56	7

$$771_8 = (1 \times 8^2) + (7 \times 8^1) + (7 \times 8^0)$$
$$771_8 = (64) + (56) + (7) = 127_{10}$$

10.1.13 Sistema numérico hexadecimal

El sistema numérico hexadecimal contiene 16 símbolos, dados por los dígitos del 0 al 9 más las letras A, B, C, D, E y F, las cuales tienen su equivalencia en los valores del 10 al 15 del sistema numérico decimal. Opera sobre la base 16 y se ha ideado con el propósito de expresar de manera más breve las largas cantidades que se dan en sistema binario. Entonces, una cantidad en sistema hexadecimal queda expresada en términos de los 10 dígitos y las 6 primeras letras del abecedario. Ejemplo: $17A_{16}$, $DB6_{16}$, etcétera.

Entre las aplicaciones de este sistema numérico está representar cadenas binarias que no siempre se refieren a valores numéricos, sino que pueden ser expresiones con información no numérica, dada en algún tipo de código.

Tabla 10.8 Equivalencia entre sistema hexadecimal y decimal.

Hexadecimal	Decimal
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
A	10
B	11
C	12
D	13
E	14
F	15

10.1.14 Conversión de sistema decimal a hexadecimal

COMPETENCIA:
Convertir cantidades expresadas en el sistema decimal a sistema hexadecimal y viceversa. [2]

Para la conversión de una cantidad expresada en sistema decimal a hexadecimal se procede de manera similar a como se hizo en la conversión de sistema decimal a binario o a octal, utilizando divisiones sucesivas; en este caso entre 16. Veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10.11

Convierte a sistema hexadecimal las cantidades decimales *a*) 427_{10} *b*) 1085_{10}

Solución

a) Desarrollo por medio de divisiones sucesivas entre 16:

División	Residuo
$427 \div 16 = 26$	$11 \rightarrow$ B (posición menos significativa)
$26 \div 16 = 1$	$10 \rightarrow$ A
$1 \div 16 = 0$	1 (posición más significativa)

Resultado: $427_{10} = 1AB_{16}$

b) Por medio de divisiones sucesivas entre 16:

División	Residuo
$1085 \div 16 = 67$	$13 \rightarrow$ D (posición menos significativa)
$67 \div 16 = 4$	3
$4 \div 16 = 0$	4 (posición más significativa)

Resultado: $1085_{10} = 43D_{16}$

10.1.15 Conversión de un número hexadecimal a decimal

El procedimiento para conocer la cantidad decimal equivalente a una cantidad expresada en sistema numérico hexadecimal, consiste en obtener la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada cifra hexadecimal por la potencia de 16 que le corresponde. Por ejemplo, para reconvertir las cantidades hexadecimales del ejemplo 10.6 a sistema decimal se procede como sigue:

EJEMPLO 10.12

Convierte a decimal las cantidades hexadecimales *a*) $1AB_{16}$ y *b*) $43D_{16}$.

Solución

a) De hexadecimal $1AB_{16}$ a decimal:

Potencia de 16	16^2	16^1	16^0
Hexadecimal	**1**	**A**	**B**
Valor adquirido	1×16^2	10×16^1	11×16^0
Equivalencia en decimal	256	160	11

$$1AB_{16} = (1 \times 16^2) + (10 \times 16^1) + (11 \times 16^0)$$
$$771_8 = (256) + (160) + (11) = 427_{10}$$

b) De hexadecimal $43D_{16}$ a decimal:

Potencia de 16	16^2	16^1	16^0
Hexadecimal	**4**	**3**	**D**
Valor adquirido	4×16^2	3×16^1	13×16^0
Equivalencia en decimal	1024	48	13

$$43D_{16} = (4 \times 16^2) + (3 \times 16^1) + (13 \times 16^0)$$
$$771_8 = (1024) + (48) + (13) = 1085_{10}$$

10.1.16 Conversión de hexadecimal a binario

COMPETENCIA:
Convertir cantidades expresadas en el sistema hexadecimal a binario. [2]

La conversión de cantidades expresadas en sistema hexadecimal a binario es también simple, ya que guardan una relación muy particular, puesto que 16 es la cuarta potencia de dos. Esto da por resultado que cada cantidad del sistema hexadecimal tiene un equivalente expresado en un grupo de cuatro bits, como se muestra en la tabla 10.9.

Tabla 10.9 Equivalencias entre sistemas hexadecimal, decimal y binario.

Hexadecimal	Decimal	Binario
0	0	000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

EJEMPLO 10.13

Convierte a sistema binario las cantidades hexadecimales *a*) $1AB_{16}$ y *b*) $43D_{16}$.

Solución

Para la cantidad $1AB_{16}$ y con apoyo de los datos de la tabla 10.9 se tiene que

Hexadecimal	1	A	B
Equivalencia en binario	0001	1010	1011

$$1AB_{16} = 000110101011_2$$

Para la cantidad $43D_{16}$ se tiene que

Hexadecimal	4	3	D
Equivalencia en binario	0100	0011	1101

$$43D_{16} = 010000111101_2$$

10.1.17 Conteo en sistema hexadecimal

COMPETENCIA:
Desarrollar el proceso de conteo en el sistema hexadecimal. [2]

El conteo en el sistema hexadecimal lleva el mismo procedimiento que en otros sistemas numéricos, se inicia con el 0 en la primera posición hasta llegar a la F; la primera posición se reinicia en 0, incrementando a 1 la segunda posición hasta que ésta llega a F. Luego se reinicia a 0 la segunda posición y se incrementa en 1 la tercera posición, etc. Por ejemplo:

a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, 10, 11, 12,…
b) 48, 49, 4A, 4B, 4C, 4D, 4E, 4F, 50, 51, 52…
c) 3F7, 3F8, 3F9, 3FA, 3FB, 3FC, 3FD, 3FE, 3FF, 400, 401…

Al observar los ejemplos anteriores puedes notar que cuando en una posición se tiene un 9, al incrementar en 1, la siguiente cifra se convierte en A. Esto significa que con 2 posiciones en sistema hexadecimal se puede contar desde 00_{16} hasta FF_{16}, lo que equivale a tener 16^2 valores distintos. Para 3 posiciones en sistema hexadecimal se puede contar desde 000_{16} hasta FFF_{16}, lo que equivale a tener 16^3 valores distintos. Se puede deducir que para N posiciones se tendrán 16^N valores distintos, lo que equivale a contar desde el 0 decimal hasta $16^N - 1$ decimal.

10.2 Código BCD

COMPETENCIAS:
- Comprender el concepto de código empleado en los sistemas numéricos. [1]
- Convertir cantidades expresadas en sistema de base diez a BCD. [2]

Es una costumbre trabajar con el sistema numérico decimal, lo utilizamos para expresar las magnitudes con las que comúnmente desarrollamos actividades de cualquier tipo; sin embargo, los circuitos electrónicos digitales están diseñados para operar con sistemas numéricos distintos al decimal, entre los que destacan los anteriores. Esto exige pensar en la manera de introducir datos e información del mundo real, que es analógico y lo hemos dimensionado en sistema numérico decimal, a un sistema binario compatible con los procesadores electrónicos.

Uno de los códigos más usuales es el *decimal codificado en binario*, conocido como BCD,[4] que se usa para representar números en sistema decimal por medio de sistema numérico binario. El código BCD utiliza cuatro bits binarios para representar a cada dígito decimal, como se describe en la tabla 10.5.

EJEMPLO 10.14

Expresa el número 475_{10} en código BCD.

Solución

A partir de los datos de la tabla 10.5 se tiene que

$$\begin{array}{ccccc} 4 & & 7 & & 5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0100 & & 0111 & & 0101 \end{array} \quad \text{(BCD)}$$

Puesto que el código BCD se utiliza para representar cantidades decimales en binario, conviene notar que en código BCD no se utilizan los números 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 y 1111 que equivalen a los números 10, 11, 12, 13, 14 y 15 decimales. Si por equivocación llegaran a utilizarse estas combinaciones para introducirlas en algún procesamiento electrónico, esta operación se identificaría como un error.

En un proceso inverso, para convertir una cantidad expresada en código BCD a cantidad decimal, se organizará la expresión dada, en grupos de cuatro bits cada uno y se convierte cada grupo en su equivalente decimal (tabla 10.5).

EJEMPLO 10.15

Convierte el número 00110101110101101101 (BCD) a su cantidad decimal equivalente.

[4] BCD abreviatura dada al código *decimal codificado en binario*, por sus siglas en Inglés *Binary-Coded Decimal*.

Solución

Al separar la cantidad codificada en BCD en grupos de cuatro bits se tiene

$$\begin{array}{ccccccc} 0011 & 0101 & 1001 & 0110 & 1000 & \text{(BCD)} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 3 & 5 & 9 & 6 & 8 & \end{array}$$

Para reafirmar la diferencia entre una cantidad decimal expresada en sistema numérico binario y en código BCD veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10.16

Expresa la cantidad 583_{10} *a*) en sistema binario y *b*) en código BCD.

Solución

a) $583_{10} = 1001000111_2$ (binario)
b) $583_{10} = 0101\ 1000\ 0011$ (BCD)

10.3 Operaciones básicas en aritmética binaria

COMPETENCIAS:
- Comprender y aplicar sistemas digitales en operaciones básicas en aritmética binaria. [2]
- Desarrollar operaciones fundamentales en el sistema binario. [2]

En aritmética binaria, como en la aritmética decimal, existen cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división, todas obedecen al mismo procedimiento que se sigue en cada una de ellas en la aritmética decimal. Sin embargo, como es sabido, la resta, la multiplicación y la división son adecuaciones de una de ellas que es la operación fundamental, la suma. Esto es, la resta es una operación contraria a la suma; en otras palabras, la resta consiste en la suma de una cantidad más el complemento de la otra; en tanto que la multiplicación es una operación de suma abreviada y la división resulta ser la operación contraria a la multiplicación.

De la misma manera, la electrónica interna de los procesadores digitales sólo tiene la capacidad para sumar. El resto de las operaciones que realizan, hasta las más complejas, son derivaciones y adecuaciones de las sumas fundamentales en procesos sumamente rápidos.

Veremos a continuación la forma básica de realizar cada una de estas operaciones básicas en la aritmética binaria.

10.3.1 Suma binaria

Para sumar dos cantidades binarias se procede de la misma manera que en una suma decimal, se asocian los dígitos menos significativos (a la derecha) de acuerdo con las siguientes reglas básicas:

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 0$ se acarrea 1

EJEMPLO 10.17

Suma las cantidades binarias 10101 + 10011.

Solución

Atendiendo a las reglas citadas para la suma binaria, se tiene:

$1 + 1 = 0$, se acarrea 1	1 de acarreo $+ 0 + 1 = 0$, se acarrea 1	1 de acarreo $+ 1 + 0 = 0$, se acarrea 1	1 de acarreo $+ 0 + 0 = 1$,	$1 + 1 = 0$, se acarrea 1	1 de acarreo = 1
$\begin{array}{r} 10101 + \\ 10011 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 10101 + \\ 10011 \\ \hline 00 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 10101 + \\ 10011 \\ \hline 000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 10101 + \\ 10011 \\ \hline 1000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10101 + \\ 10011 \\ \hline 01000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 10101 + \\ 10011 \\ \hline 101000 \end{array}$

La operación de suma decimal equivalente será:

$$\begin{array}{r} 21 + \\ \underline{19} \\ = 40 \end{array}$$

10.3.2 Resta binaria

Para restar una cantidad binaria de otra, también se procede como en una resta decimal. Se inicia con los dígitos menos significativos (a la derecha) y de acuerdo con las siguientes reglas básicas:

$0 - 0 = 0$
$0 - 1 = 1$ se presta 1
$1 - 0 = 1$
$1 - 1 = 0$

EJEMPLO 10.18

Efectúa la siguiente resta entre cantidades binarias 10101 – 10011.

Solución

Atendiendo a las reglas citadas para la resta binaria, se tiene:

$1 - 1 = 0$,	$0 - 1 = 1$ Se presta 1 al sustraendo	$1 - 1$ prestado $= 0$,	$0 - 0 = 0$	$1 - 1 = 0$
$\begin{array}{r} 10101 \\ -\ 10011 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10101 \\ -\ 10011 \\ \hline 10 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10101 \\ -\ 10011 \\ \hline 010 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 10101 \\ -\ 10011 \\ \hline 0010 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 10101 \\ -\ 10011 \\ \hline 00010 \end{array}$

La operación de resta decimal equivalente será:

$$\begin{array}{r} 21 \\ -\ 19 \\ \hline = 02 \end{array}$$

10.3.3 Multiplicación binaria

Una vez que se han comprendido las operaciones de suma y resta binarias será fácil desarrollar la multiplicación binaria, puesto que esta operación obedece al mismo procedimiento utilizado en la multiplicación decimal. Las reglas básicas para la multiplicación binaria son las siguientes:

$$0 \times 0 = 0$$
$$0 \times 1 = 0$$
$$1 \times 0 = 0$$
$$1 \times 1 = 1$$

EJEMPLO 10.19

Desarrolla la multiplicación binaria 10110×110

Solución

Siguiendo las reglas básicas dadas para la multiplicación binaria, se tiene:

$$\begin{array}{r} 10110 \\ \times\ 110 \\ \hline 00000 \\ 10110 \\ \underline{10110\ \ } \\ = 10000100 \end{array}$$

La operación de multiplicación decimal equivalente será:

$$\begin{array}{r} 22 \times \\ \underline{\ 6} \\ = 132 \end{array}$$

10.3.4 División binaria

Una vez que se han comprendido las operaciones de suma, resta y multiplicación binarias será fácil desarrollar la división binaria, puesto que esta operación incluye a las tres primeras, y obedece al mismo procedimiento utilizado en la división decimal. Las reglas básicas para la división binaria son las siguientes:

$$0 \div 0 = \text{indefinido}$$
$$0 \div 1 = 0$$
$$1 \div 0 = \text{indefinido}$$
$$1 \div 1 = 1$$

EJEMPLO 10.20

Desarrolla la división binaria $10110 \div 110$.

Solución

Siguiendo las reglas básicas dadas para la multiplicación binaria, se tiene:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 110\overline{)10110} \\ \underline{110} \\ 01010 \\ \underline{110} \\ 00100 \end{array}$$

La división decimal equivalente es: $\begin{array}{r} 3 \\ 6\overline{)22} \\ \underline{18} \\ 4 \end{array}$

10.4 Formas de notación binaria

COMPETENCIAS:
- Conocer las formas de notación binaria y su aplicación en la aritmética básica. [1]
- Expresar cantidades binarias mediante la notación complemento a uno. [2]
- Expresar cantidades binarias mediante la notación complemento a dos. [2]

De la misma manera que en la aritmética decimal existe la necesidad de operar con números positivos y negativos, en la aritmética binaria se presenta también esta necesidad, dado que, como se ha dicho, los números binarios son, a final de cuentas, representaciones en sistema binario de cantidades decimales que se dan en el mundo real. En lo que se refiere a los números enteros se utilizan principalmente cuatro formas de notación:

a) Binario sin signo (positivos).
b) Binario con signo (negativos).
c) Binario en complemento a uno.
d) Binario en complemento a dos.

Hasta ahora se ha visto la forma de representar y operar con binarios positivos (sin signos), por lo que se considera que el lector estará familiarizado con esta notación, y se verá a continuación las tres formas restantes de notación.

10.4.1 Notación con signo (negativos)

Esta forma de notación se utiliza para representar a los números binarios con signo, y consiste en utilizar la posición del bit más significativo (a la izquierda) para colocar un 0 para valores positivos, y un 1 para valores negativos. Así, por ejemplo, la representación de + 3 y –3 será:

$$+3 \rightarrow 0011$$
$$-3 \rightarrow 1011$$

Otro ejemplo es la representación de +17 y –17, la cual será:

$$+17 \rightarrow \text{utilizando octetos: } 0001\ 0001$$
$$-17 \rightarrow \text{utilizando octetos: } 1001\ 0001$$

Esta forma de notación, al que se le llama *código binario en magnitud y signo* resulta ser muy sencillo para la representación de los signos en números; sin embargo, para efectos de construir físicamente un circuito lógico que realice operaciones de números con signos, resulta complicado. De aquí que se han ideado otros códigos, como los que se explican a continuación.

10.4.2 Notación de binario en complemento a uno

La notación *complemento a uno*, es una forma de representar números binarios con signo y es usada por muchos sistemas computarizados para almacenar los binarios negativos. Consiste en cambiar todos los 0 del correspondiente binario positivo a 1, y los 1 a 0, dando por resultado que el bit más significativo, que era 0 para el número positivo, pasa a ser 1. El bit más significativo sigue reservándose para representar el signo, y éste es 1 para todo número negativo.

EJEMPLO 10.21

Encuentra el complemento a uno de los números binarios 111100001111 y 1100001011.

Solución

El proceso consiste en complementar cada binario a 1, o lo que es lo mismo, cambiar los ceros por unos y los unos por ceros.

Número binario	111100001111	1100001011
Complementos a unos	000011110000	0011110100

10.4.3 Notación de binario en complemento a dos

La notación *complemento a dos* se obtiene sumando 1 al complemento a uno. El término *complemento* implica que la suma se hace a la base.

EJEMPLO 10.22

Halla el complemento a dos de los números binarios del ejemplo 10.16.

Solución

Para obtener el complemento a dos de los binarios dados, se inicia a partir del complemento a uno de cada caso y se le suma 1.

Número binario	111100001111	1100001011
Complementos a unos	000011110000	0011110100
Complementos a dos	000011110001	0011110101

10.4.4 Aplicaciones de las formas de complementos a unos y a dos

Una de las aplicaciones más importantes de las notaciones complementos a unos y complementos a dos es en la operación de resta binaria. Revisemos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 10.23

Encuentra la diferencia X = A – B, donde A = 11010011 y B = 01110111, utiliza las notaciones complemento a unos y complemento a dos.

Solución

Primero obtén el resultado desarrollando la resta binaria ordinaria:

$$\begin{array}{rr} & \cancel{111} \\ & 11010011 \ \ \text{A} \\ - & \underline{01110111 \ \ \text{B}} \\ & 01011100 \ \ \text{X} \end{array}$$

Ahora resuelve la operación aplicando complementos a unos y dos.

Resta por complemento a uno

Se obtiene el complemento a unos de B (sustraendo) y se le suma al binario A (minuendo). Finalmente a este resultado se le suma un 1.

```
  11010011  A
+ 10001000  complemento a unos de B
(1) 01011011
+        1  se suma 1
  01011100  X
```

Resta por complemento a dos

El complemento a dos del binario B es su complemento a unos más 1. Esto es:

```
  10001000  complemento a unos de B
+        1
= 10001001  complemento a dos de B
```

Ahora se suma al binario A el complemento a dos de B.

```
  11010011  A
+ 10001001  complemento a dos de B
(1 0)1011100  X
```

Al eliminar el 1 de la izquierda, señalado con un circulo (es un desbordamiento), queda el valor de la diferencia X = A-B.

Actividades para la evaluación de competencias

Sistemas numéricos

10.1 Explica el concepto de sistemas digitales. [1]

10.2 Explica los conceptos de sistema numérico decimal, sistema numérico octal y sistema numérico binario. [1]

10.3 Expresa en sistema binario las siguientes cantidades decimales: [2]
a) $8\,901_{10}$ b) 75_{10} c) 38945.78_{10} d) 127.901_{10}

10.4 Expresa en sistema numérico decimal las siguientes cantidades binarias: [2]
a) 1110011_2 b) 101010100_2 c) 111001_2 d) 10001_2

10.5 Emplea el método de restas sucesivas y encuentra el equivalente binario de los siguientes números decimales. [2]
a) 89_{10} b) 55_{10} c) 945_{10} d) 217_{10}

10.6 Resuelve el ejercicio 10.4 aplicando el método de conversión de decimal a binario por divisiones sucesivas entre 2. [2]

10.7 Encuentra la equivalencia en sistema binario de los siguientes números:
a) 4712_8 b) 1234_8 c) 5744_8 d) 5577_8

10.8 Halla la equivalencia en sistema octal de los siguientes números: [2]
a) 10011_2 b) 111011_2 c) 100001_2 d) 110011_2

10.9 Convierte los siguientes decimales a binario, octal y hexadecimal: [2]
a) 224 b) 134 c) 2009 d) 412 e) 625

10.10 Convierte a decimal, octal y binario los siguientes números hexadecimales: [2]
a) 2332 b) C7.A9 c) 25D

Código BCD

10.11 Las siguientes cantidades están expresadas en código BCD, exprésalas en sistema decimal y luego en sistema binario. [2]
a) 10010111 b) 100100100111 c) 1000010101010001

10.12 Expresa en código BCD y en sistema binario las cantidades decimales [2]
a) 1 235 b) 3 897 c) 87 653

Operaciones básicas en aritmética binaria.

10.13 Efectúa las siguientes sumas en sistema binario y haz la comprobación con su equivalencia en sistema de base diez. [2]
a) 10100011+ 111001 =
b) 1000001+111011+10101011 =
c) 11111111+1000000+1010101 0=

10.14 Desarrolla las siguientes sustracciones binarias y realiza la comprobación con sus equivalentes en sistema de base diez. [2]
a) 101111001 – 111000 = b) 1000110101 – 100011111 =
c) 1111110000 – 10001111=

10.15 Resuelve las siguientes multiplicaciones binarias y para comprobar haz la transformación a cantidades equivalentes en sistema de base diez. [2]
a) $1111000 \times 111 =$ b) $100000111 \times 100001 =$
c) $111 \times 1001=$

10.16 Resuelve las siguientes divisiones binarias y comprueba tus resultados haciendo la transformación a las cantidades equivalentes en sistema de base diez. [2]
a) $1111000 \div 111 =$ b) $100000111 \div 1010 =$
c) $11111 \div 1001 =$

Formas de notación binaria

10.17 Explica el algoritmo de la resta en sistema binario mediante el método de complemento a unos. [2]

10.18 Explica el algoritmo de la resta en sistema binario mediante el método de complemento a dos. [2]

10.19 Comprueba las operaciones de resta del ejercicio 10.14, aplica el método de complemento a unos. [2]

10.20 Comprueba las operaciones de resta del ejercicio 10.14, aplica el método de complemento a dos. [1]

10.21 Resuelve la operación $(941)_{10} - (115)_{10}$ en sistema binario en 8 bits, por el método de complemento a 2. [2]

10.22 ¿Cuál es el mayor número positivo y el mayor número negativo que se puede representar con 16 bits empleando complemento a 2? [2]

Notas:

[1] Competencias de la dimensión Instrumental.
[2] Competencias de la dimensión Sistémica.
[3] Competencias de la dimensión Interpersonal.

Capítulo 11

Álgebra booleana y compuertas lógicas

	Estructura	
Temas		
	Conceptuales	
Introducción	• Qué es el álgebra Booleana.	
11.1 Símbolos y funciones lógicas 11.1.1 Función de igualdad lógica (A = B). 11.1.2 Función de negación lógica (NOT). 11.1.3 Función de disyunción (OR). 11.1.4 Función de conjunción (AND). 11.1.5 NOR. 11.1.6 Función NAND.	• Qué son los conectivos lógicos. • Qué son las tablas de valores de verdad. • Función de igualdad lógica. Simbología. • Función de negación lógica. Simbología. • Función de disyunción lógica. Simbología. • Función de conjunción lógica. Simbología. • Función NOR. Simbología. • Función NAND. Simbología.	
11.2 Operaciones con compuertas lógicas	• Qué es una compuerta lógica. • Qué es un circuito lógico. • Operaciones OR, AND y NOT.	
11.3 Álgebra booleana y los circuitos lógicos 11.3.1 Leyes del álgebra booleana y circuitos lógicos. 11.3.2 Reglas del álgebra booleana. 11.3.3 Teoremas de DeMorgan.	• Qué es una expresión booleana. • Relación entre valores de verdad y voltaje en un circuito lógico. • Ley conmutativa aplicada a la disyunción y a la conjunción, lógicas. • Ley asociativa aplicada a la disyunción y a la conjunción, lógicas. • Ley distributiva. • Doce reglas básicas del álgebra booleana. • Teorema de la negación de la conjunción. • Teorema de la negación de la disyunción.	

	temática
	CONTENIDOS

	Procedimentales	Actitudinales
	• Elaboración de tablas de valores de verdad para funciones lógicas básicas. • Simbología y estructura de funciones lógicas.	• Elementos para apreciar el valor que tiene el álgebra Booleana en el desarrollo de los circuitos lógicos. • Valorar la importancia de los circuitos lógicos en el desarrollo de los circuitos electrónicos digitales. • Elementos para autoevaluar el trabajo personal y de equipo. • Fundamentos estructurados para tomar decisiones.
	• Estructuración de un circuito lógico utilizando las funciones básicas.	
	• Desarrollo de una expresión booleana. • Elaboración de un circuito lógico a partir de una expresión Booleana. • Cómo se relaciona una expresión booleana con su circuito lógico y con su tabla de verdad. • Interpretación de las leyes fundamentales del álgebra booleana. • Interpretación de las doce reglas básicas del álgebra booleana. • Interpretación de los teoremas de DeMorgan.	

Estructura

Temas	Conceptuales
11.4 Simplificación de expresiones booleanas 11.4.1 Expresión booleana en forma de suma de productos. 11.4.2 Expresión booleana en forma de producto de sumas.	• Expresión Booleana en forma de suma de productos. • Expresión Booleana en forma de producto de sumas.
11.5 Mapas de Karnaugh 11.5.1 Mapa de Karnaugh para expresiones con dos variables. 11.5.2 Mapa de Karnaugh para expresiones con tres variables. 11.5.3 Mapa de Karnaugh para expresiones con cuatro variables. 11.5.4 Mapa de Karnaugh para expresiones con cinco variables. 11.5.5 Agrupamientos de unos en un mapa de Karnaugh. 11.5.6 Elaboración de un mapa *K* a partir de una expresión dada. 11.5.7 Simplificación de expresiones booleanas con el apoyo de mapas *K*.	• Concepto de *minitérmino* y su interpretación. • Concepto de Mapa de Karnaugh o mapa *K*. • Mapa *K* para expresiones con dos, tres, cuatro o cinco variables. • Simplificación de expresiones booleanas con apoyo en mapas *K*.
11.6 Circuitos lógicos con compuertas NAND	• Función de una compuerta NAND. • Relación entre funciones lógicas básicas y su equivalencia con compuertas NAND agrupadas.
11.7 Circuitos lógicos con compuertas NOR	• Función de una compuerta NOR. • Relación entre funciones lógicas básicas y su equivalencia con compuertas NOR agrupadas.
Actividades para la evaluación de competencias	

	temática
	CONTENIDOS

	Procedimentales	**Actitudinales**
	• Interpretación de una expresión en su forma de suma de productos o en forma de producto de sumas y su aplicación en circuitos lógicos. • Procedimiento para la reducción de una expresión booleana a suma de productos. • Elaboración de circuitos equivalentes mediante la reducción de expresiones. • Elaboración de tablas de verdad equivalentes para una expresión lógica dada y su expresión equivalente reducida.	
	• Elaboración de mapas K a partir de expresiones lógicas dadas. • Agrupamientos de 1s, agrupamientos por pares, agrupamientos por cuartetos y agrupamientos por octetos. • Proceso de simplificación de expresiones booleanas aplicando mapas K.	
	• Proceso para la estructuración de un circuito lógico equivalente aplicando solo compuertas NAND.	
	• Proceso para la estructuración de un circuito lógico equivalente aplicando sólo compuertas NOR.	

Orientación general		
Analizar los fundamentos, leyes y reglas del álgebra Booleana, para su aplicación en los circuitos lógicos		
Competencias		
Dimensión Instrumental [1]	**Dimensión Sistémica [2]**	**Dimensión Interpersonal [3]**
Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:
1.1 Comprender las bases del álgebra booleana aplicada al área de la lógica matemática. 1.2 Comprender la función de los conectivos y su simbología empleados en la lógica matemática. 1.3 Comprender las funciones lógicas conocidas como IGUAL, NOT, OR, AND, NOR y NAND. 1.4 Comprender cómo se genera la respuesta de un circuito lógico a partir de valores lógicos dados en su entrada. 1.5 Comprender las leyes que rigen al álgebra booleana. 1.6 Comprender las reglas básicas del álgebra booleana. 1.7 Comprender los teoremas de DeMorgan del álgebra booleana. 1.8 Comprender la importancia de las expresiones booleanas en forma de producto de sumas y en forma de suma de productos. 1.9 Comprender qué es un mapa de Karnaugh. 1.10 Comprender la función de compuertas NAND y NOR.	2.1 Desarrollar las tablas de valores de verdad de las funciones lógicas de igualdad, de negación, de disyunción, de conjunción y sus posibles combinaciones. 2.2 Obtener el resultado de un conjunto de funciones lógicas asociadas a través de un circuito lógico. 2.3 Elaborar la tabla de valores de verdad de un circuito lógico. 2.4 Simplificar expresiones lógicas con base en las leyes, reglas y teoremas principales del álgebra Booleana. 2.5 Elaborar mapas de Karnaugh a partir de expresiones booleanas dadas. 2.6 Simplificar expresiones booleanas con apoyo en mapas de Karnaugh. 2.7 Desarrollar circuitos equivalentes a circuitos lógicos dados, con base en sólo compuertas NAND o sólo compuertas NOR.	3.1 Valorar la importancia que tiene el álgebra booleana en el desarrollo de los circuitos lógicos. 3.2 Valorar la importancia de los circuitos lógicos en el desarrollo de los circuitos electrónicos digitales.

Introducción

Después de haber realizado una introducción al estudio de los sistemas numéricos y las operaciones básicas que entre ellos se pueden realizar, ahora iniciaremos el estudio del funcionamiento de los circuitos que forman a los sistemas electrónicos digitales que, como ya se mencionó, operan mediante el uso de dos valores binarios, 0 y 1. Estas operaciones se sustentan en las leyes y reglas de la lógica matemática, por lo cual se les conoce como funciones lógicas.

Las funciones lógicas que desarrollan los circuitos electrónicos digitales pueden describirse con base en los postulados del álgebra convencional aplicados a operaciones que manejan únicamente el valor 1 para la presencia de un voltaje y el valor 0 para la ausencia de éste. Asimismo, estos valores pueden interpretarse como verdadero-falso, encendido-apagado. Esta relación es conocida como *lógica positiva*, y es la que se maneja en este libro; en tanto que la situación inversa (1 para designar valores bajos y 0 para valores altos) se conoce como *lógica negativa*.

El área de la matemática que describe simbólicamente las funciones lógicas referidas es el *álgebra booleana*,[1] que al igual que el álgebra convencional, utiliza las letras del abecedario para representar variables con la particularidad de que en este caso, las variables pueden tener solamente valores de 1 o 0, figura 11.1.

COMPETENCIAS:

- Comprender las bases del álgebra booleana aplicada en el área de la lógica matemática. [1]
- Valorar la importancia del álgebra Booleana en el desarrollo de los circuitos lógicos. [3]
- Valorar la importancia de los circuitos lógicos en el desarrollo de los circuitos digitales. [3]

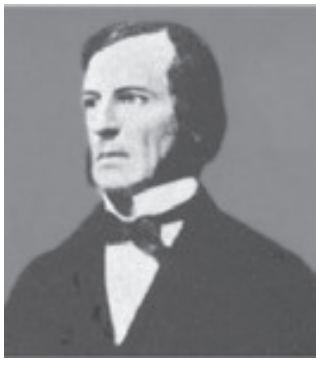


Figura 11.1 George Boole (1815–1864).

Matemático y filósofo británico, primer científico que utilizó los valores 0 y 1 para desarrollar un nuevo tipo de álgebra en su época, conocida.como *álgebra de Boole*, lo que pasó a ser la base de la aritmética computacional actual. Por este hecho se le considera como uno de los precursores del campo en las ciencias de la computación.

En 1854 publicó su obra *Una investigación sobre las leyes del pensamiento* en la que desarrolló un sistema para expresar, operar y simplificar, mediante procedimientos matemáticos aquellos problemas lógicos y filosóficos cuyos argumentos admiten dos estados: verdadero o falso.

11.1 Símbolos y funciones lógicas

El álgebra booleana utiliza tres símbolos *conectivos* que representan las posibles relaciones lógicas entre variables: el signo igual (=), el signo de suma (+) y el símbolo de multiplicación (•), además de un signo de *negación* (–) que se traza por encima de una variable o grupo de variables, para indicar una operación de negación lógica.

El uso de estos signos lógicos es esencial en el desarrollo del álgebra booleana, y ésta a su vez, es básica para el análisis y diseño de los circuitos electrónicos digitales. Estos circuitos son sistemas físicos reales que utilizan componentes electrónicos que realizan grandes cantidades de operaciones lógicas a muy altas velocidades mediante la aplicación de pequeños voltajes que se interpretan como 1, para indicar la presencia de un voltaje (+V), y 0 para la ausencia de voltaje (0V).

El resultado que pueda haber a la salida de un circuito lógico depende tanto del valor de las variables que se tiene a la entrada del circuito como de las operaciones que se realicen con ellas. El conjunto de las posibles combinaciones que se presentan en una operación lógica y sus resultados se expresa a través de una *tabla de verdad*, como veremos a continuación.

[1] *Algebra booleana*: nombre que se da a la rama de la matemática que trata de la lógica simbólica y sus relaciones algebraicas, en honor del matemático británico George Boole.

11.1.1 Función de igualdad lógica (A = B)

COMPETENCIAS:
- Comprender la función de los conectivos y su simbología, las cuales se usan en la lógica matemática. [1]
- Comprender la funciónes lógicas conocidas, igual NOT, OR, AND, OR, NOR y NAND. [2]

Es la función que representa la igualdad entre los valores de dos o más variables. Utiliza el signo igual (=), que indica, como en otras áreas de las matemáticas, una situación de igualdad entre las cantidades o variables que se encuentran del lado izquierdo y las del lado derecho del signo. Esto es, si se tiene la expresión de igualdad X = Y, significa que X y Y son de igual valor. Si X tiene el valor de 1, entonces Y será también 1; o si Y es de valor 0, entonces la variable X tendrá también valor cero. La expresión Z = 1 indica que la variable Z tiene un valor de 1; M = 0 indica que la variable M tiene un valor de cero.

Como puedes ver, esta función obedece a una lógica fundamental que puede representarse a través de la siguiente tabla 11.1 de valores de verdad:

Tabla 11.1 Tabla de valores de verdad para la igualdad lógica.

A	B		A	B
0	0	o bien	0 V	0 V
1	1		+V	+V

La igualdad lógica se representa en un diagrama mediante el símbolo que se muestra en la figura 11.2 con una entrada y una salida, que se refiere también a un amplificador no inversor o buffer.

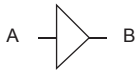


Figura 11.2 Símbolo que denota igualdad lógica.

11.1.2 Función de negación lógica (NOT)

El signo de negación lógica es una línea horizontal (¯) que al escribirlo por encima de una variable invierte el valor lógico de esta variable. La operación lógica que realiza se denomina función de *negación* o función NOT, y su expresión es $\overline{A}$, que se lee "A negada" o "negación de A", la cual indica que el valor lógico original de A cambia por el otro valor lógico. Así entonces, si A = 1 entonces $\overline{A} = 0$, o bien si A = 0 entonces $\overline{A} = 1$. Cuando se requiere de negar un agrupamiento de dos o más variables que realizan alguna función lógica entre ellas, se coloca el símbolo de negación por encima de todas las variables que deben ser afectadas. Así $\overline{A+B}$ significa la negación de la disyunción A o B.

Esta función constituye uno de los circuitos digitales más simples. La tabla 11.2 muestra los valores de verdad para la función lógica NOT y el símbolo que se usa en diagramas para representarla en la figura 11.3, que tiene una entrada del lado izquierdo y una salida del lado derecho. El círculo o burbuja que aparece en el vértice del lado derecho

del símbolo denota que la salida será el resultado de la negación de la variable que se tiene a la entrada.

Tabla 11.2 Tabla de valores de verdad para la negación lógica.

A	$\overline{A}$		A	$\overline{A}$
0	1	o bien	0 V	+V
1	0		+V	0 V

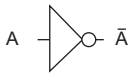


Figura 11.3 Símbolo que denota la negación lógica NOT.

11.1.3 Función de disyunción (OR)

La función de disyunción OR es la operación lógica entre dos o más variables que llevan entre sí el conectivo +. Su expresión es A + B = C, significa que la variable A es igual a la variable C, o que la variable B es igual a la variable C, o bien, que ambas variables A, B son iguales a la variable C; donde A, B y C tienen un valor lógico de 1 o 0. Los valores de verdad de esta función se representan en la tabla 11.3 y el símbolo utilizado para representarla es el de la figura 11.4.

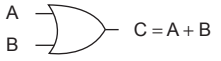


Figura 11.4 Símbolo de la función lógica OR.

Tabla 11.3 Tabla de valores de verdad para la función OR.

A	B	C = A + B		A	B	C = A + B
0	0	0		0 V	0 V	0 V
0	1	1	o bien	0 V	+V	+V
1	0	1		+V	0 V	+V
1	1	1		+V	+V	+V

11.1.4 Función de conjunción (AND)

La función de conjunción AND es la operación lógica entre dos o más variables que llevan el conectivo (·). La expresión $A \cdot B = C$, significa que ambas variables, A y B son del mismo valor lógico que la variable C. Donde A, B y C tienen un valor lógico de 1 o 0. Las posibles combinaciones de valores para A y B y su resultado lógico se representan en la tabla 11.4 y el símbolo utilizado para representar a la función es el de la figura 11.5.

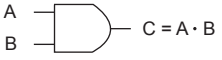


Figura 11.5 Símbolo de la función lógica AND.

Tabla 11.4 Tabla de valores de verdad para la función AND.

A	B	$C = A \cdot B$		A	B	$C = A \cdot B$
0	0	0		0 V	0 V	0 V
0	1	0	o bien	0 V	+V	0 V
1	0	0		+V	0 V	0 V
1	1	1		+V	+V	+V

11.1.5 Función NOR

El nombre NOR es una forma abreviada para ejecutar dos funciones lógicas juntas, NOT y OR, lo que da por resultado la negación de una disyunción. El uso del símbolo de la negación lógica sobre una función OR da por resultado la expresión $\overline{A + B} = C$ que se refiere a la función NOR, cuyos posibles valores de verdad se muestran en la tabla 11.5. El símbolo que representa a esta función es el de la función OR con un pequeño círculo a la salida, que indica la negación del resultado, figura 11.6.

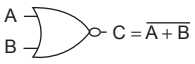


Figura 11.6 Símbolo de la función lógica NOR.

Tabla 11.5 Tabla de valores de verdad para la función NOR.

A	B	$C = \overline{A + B}$		A	B	$C = \overline{A + B}$
0	0	1		0 V	0 V	+V
0	1	0	o bien	0 V	+V	0 V
1	0	0		+V	0 V	0 V
1	1	0		+V	+V	0 V

Observa que la compuerta NOR es equivalente a una compuerta OR seguida de una NOT, como muestra la figura 11.7.

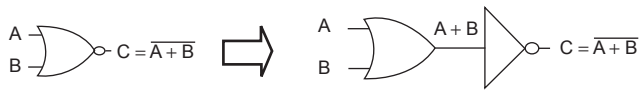


Figura 11.7 Equivalencia entre la función NOR y la OR seguida de NOT.

11.1.6 Función NAND

El nombre NAND también es una forma abreviada para ejecutar dos funciones lógicas juntas, NOT y AND, lo que da por resultado la negación de una conjunción. Al usar el símbolo de la negación lógica sobre una función AND se tiene la expresión $\overline{A \cdot B} = C$, que representa a la función NAND, cuyos posibles valores de verdad se muestran en la tabla 11.6. El símbolo que representa a esta función aparece en la figura 11.8.

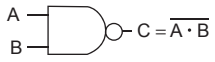


Figura 11.8 Símbolo de la función lógica NAND ($\overline{A \cdot B} = C$).

Tabla 11.6 Tabla de valores de verdad para la función NAND.

A	B	$C = \overline{A \cdot B}$		A	B	$C = \overline{A \cdot B}$
0	0	1		0 V	0 V	+V
0	1	1	o bien	0 V	+V	+V
1	0	1		+V	0 V	+V
1	1	0		+V	+V	0 V

La función NAND es equivalente a realizar la función AND seguida de una NOT como se puede ver en la figura 11.9.

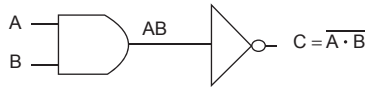


Figura 11.9 Equivalencia entre la función NAND y la AND seguida de NOT.

11.2 Operaciones con compuertas lógicas

COMPETENCIAS:
- Comprender cómo se genera la respuesta de un circuito lógico. [1]
- Obtener el resultado de un conjunto de funciones lógicas. [2]
- Elaborar la tabla de verdad de un circuito lógico. [2]

En la sección anterior se refirió al concepto de *circuito lógico* como un conjunto de elementos que realizan operaciones lógicas relacionando cantidades, que pueden ser de valor constante o variable, para proporcionar finalmente un resultado. Los circuitos electrónicos digitales se forman con componentes eléctricos y electrónicos, que reconocen en las cantidades que operan solamente los valores booleanos 1 y 0, como ya se mencionó, mediante la presencia o ausencia de un voltaje.

El valor booleano de 0 está dado por cualquier voltaje en el intervalo de 0 a 0.8 volts, en tanto que el valor booleano de 1 está dado por cualquier voltaje entre 2 y 5 volts, figura 11.10. Esto significa que cualquier voltaje 0.8 volts < V < 2 volts no debe utilizarse en un circuito puesto que sería una indefinición.

Un circuito lógico puede describirse completamente a través de las tres operaciones básicas OR, AND y NOT, utilizando para esto compuertas lógicas,[2] como se verá en el siguiente ejemplo.

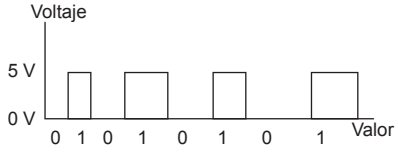


Figura 11.10 Un 0 booleano está dado por un voltaje entre 0 y 0.8 V. Un 1 booleano está dado por un voltaje entre 2 y 5 V.

[2] El concepto *compuerta lógica* es el nombre que se da en la electrónica digital a un circuito lógico cuya salida es el resultado de procesar una o más variables que recibe a la entrada, mediante la aplicación de operaciones lógicas dadas por algún criterio.

EJEMPLO 11.1

Para las variables A, B y C dadas en el circuito lógico de la figura 11.11 obtén la expresión para la salida X.

Solución

Para obtener el valor de la variable de salida X es necesario analizar la entrada y salida de cada una de las compuertas individualmente. Observa que la salida de cada compuerta pasa a ser entrada de las compuertas subsecuentes. El circuito de la figura 11.12 proporciona la respuesta buscada.

El valor lógico que tenga la variable X a la salida, dependerá de los valores lógicos que tengan las variables de entrada A, B y C. El total de combinaciones posibles de valores entre las tres variables de entrada es de $2^3 = 8$, y entonces X puede tener uno de 8 posibles resultados, que pueden ser 0 o 1, y éstos se muestran en la tabla 11.7.

Tabla 11.7 Posibles resultados para X en el ejemplo 11.1.

A	B	C	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	$B + C$	X
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0

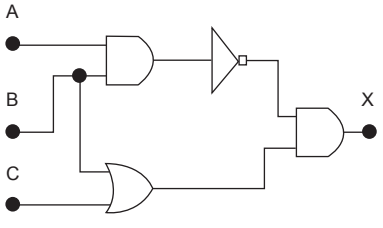


Figura 11.11 Circuito lógico para el ejemplo 11.1.

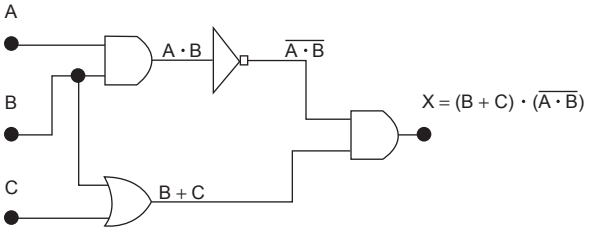


Figura 11.12 Respuesta al ejemplo 11.1.

11.3 Álgebra booleana y los circuitos lógicos

En el ejemplo 11.1 aparece el procedimiento para obtener la expresión booleana de la salida de un circuito dado, a partir de tres variables aplicadas a la entrada. En esta expresión se resume la secuencia lógica de operaciones que desarrolla el sistema completo. Sólo falta que se defina el valor actual de cada una de las variables de entrada para conocer el valor actual de la salida X.

Aunque puede darse la situación inversa, que a partir de una expresión booleana se requiera dibujar el circuito lógico correspondiente. Dicha expresión puede ser muy simple, como $A + B = X$, que relaciona dos variables por medio del conectivo OR, la cual constituye un circuito también simple que consiste en una sola compuerta OR de dos entradas para entregar la salida X, o bien una expresión de más de dos términos que requiera de más operaciones lógicas y, por tanto, más de una compuerta para su representación en diagrama.

Veamos el caso de la expresión $X = AC + \bar{A}B + A\,\overline{BC}$, a partir de la cual se desea construir el circuito correspondiente. Se trata de una expresión booleana de tres términos (AC, $\bar{A}B$, $A\,\overline{BC}$ relacionados entre sí mediante conectivos OR. Esto nos da la idea de que se debe utilizar una compuerta OR de tres entradas, como se ilustra en la figura 11.13.

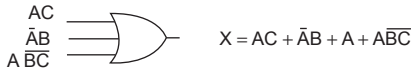


Figura 11.13 Compuerta OR con tres entradas.

Cada una de estas entradas a su vez, es la salida de una compuerta AND que opera con dos variables en los dos primeros términos, y tres variables en el último término. En los dos últimos términos existe también una función NOT afectando a alguna o algunas variables. El circuito completo se muestra en la figura 11.14.

El valor de la variable X será 1 o 0 y depende del valor que tenga cada una de las tres variables de entrada, que también deben ser de 1 o 0. Con tres variables a la entrada se tienen 8 posibles combinaciones, lo que da por resultado la tabla 11.8. En esta tabla se observa que la variable X adquiere el valor de 0 para los dos primeros casos, y el valor de 1 para los seis restantes. Se debe tener presente que en un circuito el 1 booleano significa la presencia de un voltaje entre 2 y 5 volts, y el 0 booleano un voltaje entre 0 y .8 volts.

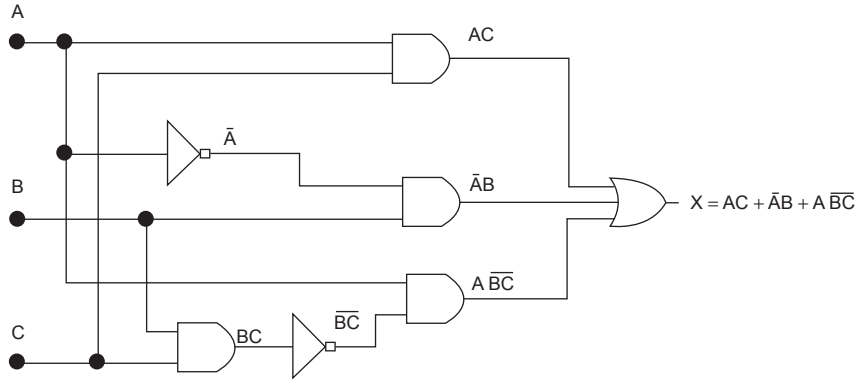


Figura 11.14 Circuito lógico para la expresión $X = AC + \bar{A}B + A\,\overline{BC}$.

Tabla 11.8 Posibles resultados para *X* de la figura 11.11.

A	B	C	AC	$\overline{A}$	$\overline{A}B$	BC	$\overline{BC}$	$A\,\overline{BC}$	$X = AC + \overline{A}B + A\,\overline{BC}$
0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	0	0	1

La figura 11.15 muestra la forma de la onda de salida del circuito de la figura 11.14, en la que puedes apreciar los cambios de valor que tienen cada una de las variables de entrada en el tiempo, y el resultado que se genera a la salida en función de dichos valores. En esta figura un valor booleano de 1 corresponde a un potencial de 5 volts y un 0 significa un potencial de cero volts. Puedes notar la correspondencia entre la lógica del circuito, la tabla de valores de verdad y las formas de onda obtenidas.

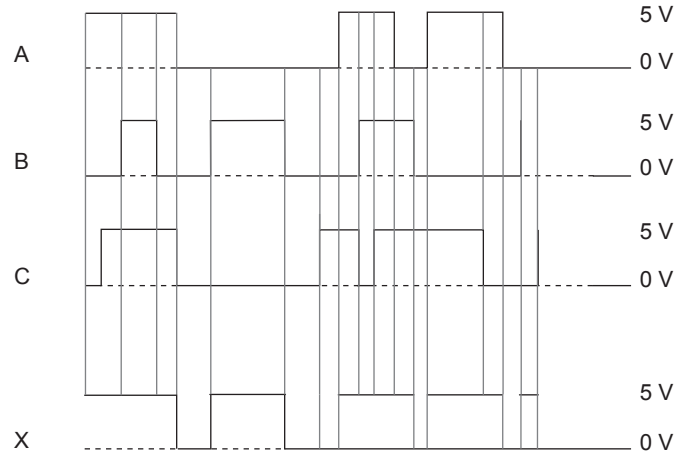


Figura 11.15 Formas de onda para el circuito de la figura 11.13.

11.3.1 Leyes del álgebra booleana y circuitos lógicos

COMPETENCIA:
Comprender las leyes que rigen al álgebra booleana. [1]

De manera semejante al álgebra convencional, en el álgebra booleana existen leyes y propiedades, así como diversos teoremas cuya aplicación facilita el análisis de expresiones booleanas, o bien de circuitos lógicos.

Ley conmutativa de la disyunción (OR)

Esta ley establece que en una función OR el orden de las variables no altera el resultado. La figura11.16 ilustra esta ley, y la expresión es:

$$A + B = B + A$$

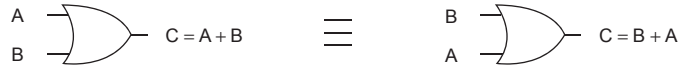


Figura 11.16 La ley conmutativa aplicada a la función OR.

Ley conmutativa de la conjunción (AND)

Establece que el orden en el que se apliquen las variables en una función de conjunción AND no altera el resultado lógico. La figura 11.17 ilustra esta ley y su expresión es:

$$AB = BA$$

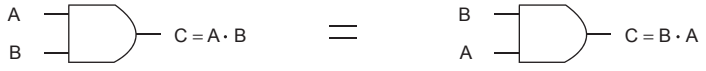


Figura 11.17 La ley conmutativa aplicada a la función AND.

Ley asociativa de la disyunción (OR)

Establece que el orden en que se agrupen o asocien las variables que intervienen en una función de disyunción no altera el resultado. Esta ley se ilustra en la figura 11.18, y su expresión algebraica es

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

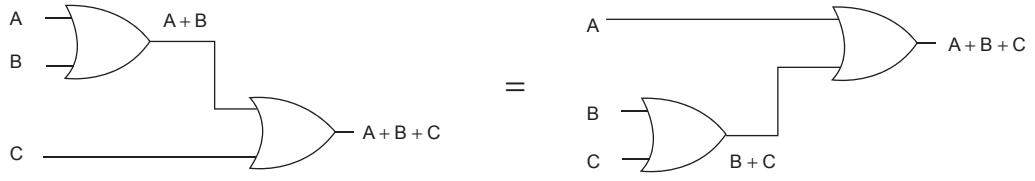


Figura 11.18 La ley asociativa aplicada a la función OR.

Ley asociativa de la conjunción (AND)

Esta ley se refiere a que el orden en que se agrupen o asocien las variables que intervienen en una función de conjunción no altera el resultado. Esta ley se ilustra en la figura 11.19, y su expresión algebraica es

$$(AB)C = A\,(BC)$$

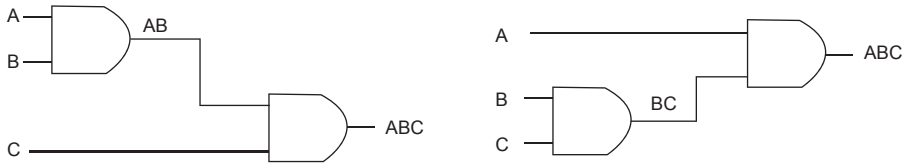


Figura 11.19 La ley asociativa aplicada a la función AND.

Ley distributiva

En álgebra booleana la ley distributiva tiene el mismo efecto que en el álgebra convencional, y establece que la conjunción AND de una variable con dos variables agrupadas en una disyunción OR es igual a la disyunción OR de dos conjunciones AND de la primera variable con cada una de las dos variables agrupadas en la disyunción original. Esta ley se ilustra en la figura 11.20 y su expresión booleana es

$$A\,(B + C) = AB + AC$$

Cabe hacer notar que cada una de las leyes citadas es aplicable cuando se tienen cualquier número de variables.

Además, y con base en las leyes citadas, el álgebra booleana tiene reglas cuya aplicación correcta ayuda a simplificar el análisis y la síntesis, tanto de expresiones, como de los circuitos lógicos correspondientes.

11.3.2 Reglas del álgebra booleana

COMPETENCIA:
Comprender las reglas básicas del álgebra. [1]

Las nueve reglas básicas del álgebra booleana se aplican en expresiones con una sola variable y se describen en la tabla 11.9, tanto desde el punto de vista de su expresión, como de su interpretación mediante compuertas lógicas.

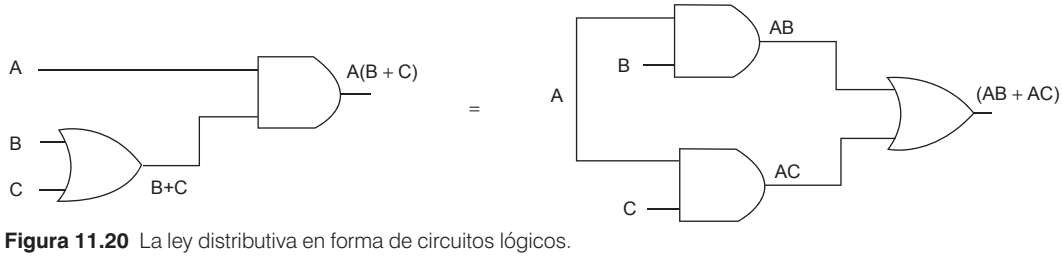


Figura 11.20 La ley distributiva en forma de circuitos lógicos.

Adicionalmente, se aplican tres reglas más que son derivadas de las leyes descritas y de las primeras reglas básicas, que incluyen más de una variable. Se han enumerado como las reglas 10, 11 y 12 son las siguientes:

10. $A + AB = A\ A$
11. $A + \overline{A}B = A + B$
12. $(A + B)\ (A + C) = A + BC$

Tabla 11.9 Nueve reglas básicas del álgebra booleana con una variable.

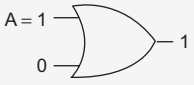
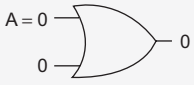
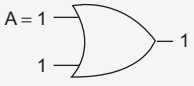
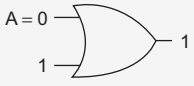
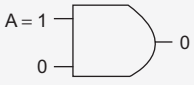
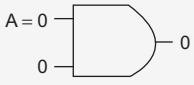
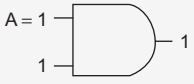
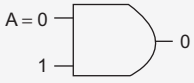
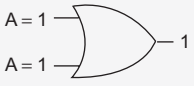
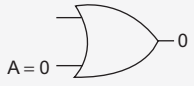
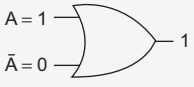
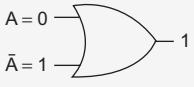
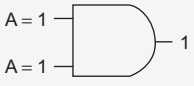
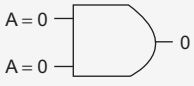
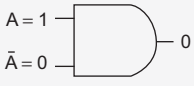
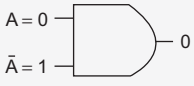
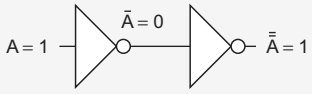
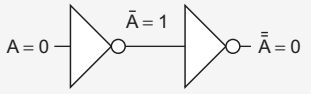
Reglas	A = 1	A = 0
1. $A + 0 = A$		
2. $A + 1 = 1$		
3. $A \cdot 0 = 0$		
4. $A \cdot 1 = A$		
5. $A + A = A$		
6. $A + \overline{A} = 1$		
7. $A \cdot A = A$		
8. $A \cdot \overline{A} = 0$		
9. $\overline{\overline{A}} = A$		



Figura 11.21 Augustus DeMorgan (1806–1871).

Matemático nacido en la India, con nacionalidad inglesa. Presidente fundador de la Sociedad Matemática de Londres y Profesor de matemáticas en el Colegio Universitario de Londres (1828 y 1866). Escribió diversas obras de lógica relacionadas con las matemáticas y es autor de los teoremas que llevan su nombre en álgebra de la lógica. Su principal obra académica se publicó en 1847 bajo el título de *La lógica formal o el cálculo de inferencias necesarias y probables*.

Las reglas 10, 11 y 12 se demuestran a partir de la aplicación de las leyes y de las reglas básicas del álgebra booleana como se describe a continuación.

Regla 10 →	$A + AB = A$	
	$A + AB = A(1 + B)$	Ley distributiva
	$= A\,(\,1\,)$	Regla 2: (1+B)=1
	$= A$	Regla 4: $A \cdot 1 = A$
Regla 11 →	$A + \overline{A}B = A + B$	
	$A + \overline{A}B = (A + AB) + \overline{A}B$	Regla 10
	$= (AA + AB) + \overline{A}B$	Regla 7
	$= AA + AB + A\overline{A} + \overline{A}B$	Regla 8
	$= (A + \overline{A})\,(A + B)$	Factorización
	$= 1\,(A + B)$	Regla 6
	$= A + B$	Regla 4
Regla 12 →	$(A + B)\,(A + C) = A + BC$	
	$(A + B)\,(A + C) = AA + AC + AB + BC$	Ley distributiva
	$= A + AC + AB + BC$	Regla 7
	$= A\,(1 + C) + AB + BC$	Ley distributiva
	$= A \cdot 1 + AB + BC$	Regla 2
	$= A\,(1 + B) + BC$	Ley distributiva
	$= A \cdot 1 + BC$	Regla 2
	$= A + BC$	Regla 4

11.3.3 Teoremas de DeMorgan

COMPETENCIA:
Comprender los teoremas de De Morgan del álgebra booleana. [1]

Además de las leyes y reglas expuestas, existen dos teoremas de gran importancia en la aplicación del álgebra booleana; el primero se refiere a que la *negación* de la *conjunción* es equivalente a la *disyunción* de las *negaciones*, y su expresión es

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

Este teorema también se interpretar diciendo que el complemento de un producto es igual a la suma de los complementos.

Y el segundo teorema establece que la *negación* de la *disyunción* es equivalente a la *conjunción* de las *negaciones*; o también que el complemento de una suma es igual al producto de los complementos. Su expresión es

$$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$$

Al desarrollar las tablas de verdad para cada uno de los teoremas de DeMorgan se puede comprobar su validez (tablas 11.10 y 11.11). Asimismo se pueden desarrollar los circuitos lógicos correspondientes para comprobar estas equivalencias.

Tabla 11.10 Tabla de verdad para el teorema $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

A	B	$\overline{AB}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Tabla 11.11 Tabla de verdad para el teorema $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$

A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\,\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

11.4 Simplificación de expresiones booleanas

COMPETENCIAS:
- Comprender la importancia de las expresiones booleanas en toma de producto de sumas y suma de productos. [1]
- Simplificar expresiones lógicas con base en las leyes, reglas y teoremas principales del álgebra booleana. [2]

Puesto que una expresión booleana generará un circuito lógico, y a partir de éste se construirá un circuito electrónico digital, esto significa que cuanto más larga y compleja sea una expresión booleana, mayor complejidad tendrá el circuito lógico correspondiente y mayor número de componentes se requerirá para ensamblar el circuito electrónico en el laboratorio. Por tanto, siempre es conveniente buscar la manera de reducir una expresión booleana dada.

Una expresión booleana larga o compleja puede simplificarse mediante la aplicación de las leyes, reglas y teoremas vistos. Para esto, una técnica para la reducción consiste en llevar primero la expresión original a una forma básica, bien sea en forma de *suma de productos* o en forma de *producto de sumas*, como se describen a continuación.

11.4.1 Expresión booleana en forma de suma de productos

Suma de productos es la forma que tiene una expresión booleana cuyos términos siempre son conjunciones lógicas o productos (AND) y éstos llevan el conectivo OR entre sí. Por ejemplo

$$AC + BCD + ACD,$$

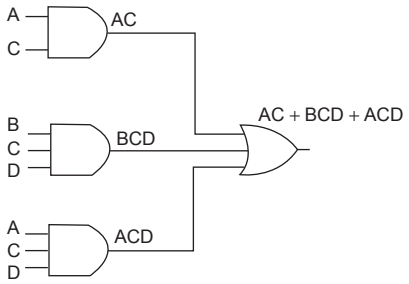


Figura 11.22 Circuito lógico resultante de una expresión dada en forma de suma de productos.

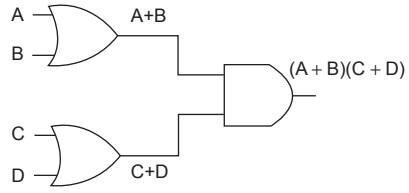


Figura 11.23 Circuito lógico resultante de una expresión dada en forma de producto de sumas.

Una expresión reducida a su forma de suma de productos resulta en que al trazar el circuito lógico se podrá utilizar al final una función o compuerta OR cuyas entradas serán el resultado de funciones o compuertas AND. Así, la expresión anterior da lugar al circuito lógico de la figura 11.22.

11.4.2 Expresión booleana en forma de producto de sumas

Como su nombre lo indica, el *producto de sumas* es la forma que tiene una expresión booleana dada como un producto o conjunción lógica (AND), cuyos factores son, cada uno de ellos, una suma de términos o disyunción (OR). Por ejemplo

$$(A + B)\,(C + D),$$

Una expresión reducida a su forma de producto de sumas resulta en que al trazar el circuito lógico se podrá utilizar al final una función o compuerta AND cuyas entradas serán el resultado de funciones o compuertas OR. Así, la expresión anterior da lugar al circuito lógico de la figura 11.23.

Ya que se tiene la expresión original en alguna de las dos formas descritas, se procede a aplicar las leyes y reglas vistas con anterioridad, y a partir de la forma reducida puede dibujarse el circuito lógico correspondiente. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 11.2

Dada la expresión C(D + E) + D(D + E), reducirla a su expresión mínima.

Solución

Paso 1. Al aplicar la ley distributiva se lleva la expresión a su forma suma de productos:

$$CD + CE + DD + DE$$

Paso 2. Al aplicar la regla 7 en el tercer término (DD = D):

$$CD + CE + D + DE$$

Paso 3. Al aplicar la ley distributiva en el primero y tercer términos:

$$D(C + 1) + CE + DE$$

Paso 4. Al aplicar la regla 2 (C + 1 = 1) en el primer término:

$$D \cdot 1 + CE + DE$$

Paso 5. Al aplicar la regla 4 ($D \cdot 1 = D$) nuevamente en el primer término:

$$D + CE + DE$$

Paso 6. Al aplicar la ley distributiva al primer y tercer términos

$$D(1+E) + CE$$

Paso 7. Se aplica la regla 2 en el primer término ($1 + E = 1$)

$$D \cdot 1 + CE$$

Paso 8. Finalmente se aplica la regla 4 en el primer término ($D \cdot 1 = D$) para llegar a la expresión simplificada

$$D + CE$$

Resultado:

$$C\,(D + E) + D\,(D + E) = D + CE$$

El resultado obtenido para el ejemplo 11.2 se puede verificar elaborando la tabla de valores de verdad para ambas expresiones, la original y la simplificada. Se debe llegar al mismo resultado para cada combinación de posibles valores de las variables de entrada. Esto se ilustra en la tabla 11.12.

Tabla 11.12 Tabla de verdad para la expresión del ejemplo 11.2.

C	D	E	D + E	C(D + E)	D(D + E)	CE	C(D + E) + D(D + E)	D + CE
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

EJEMPLO 11.3

Encuentra los circuitos lógicos para las expresiones original y simplificada del ejemplo 11.2.

Solución

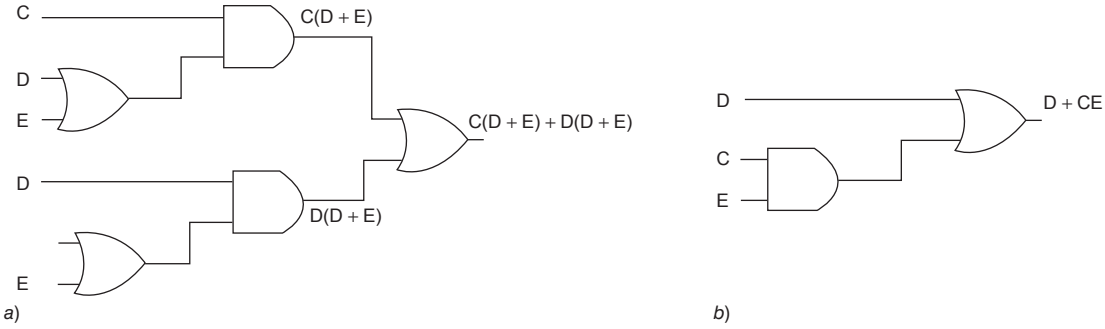


Figura 11.24 Circuitos lógicos para el ejemplo 11.2. *a*) Circuito para expresión original, *b*) Circuito simplificado.

EJEMPLO 11.4

Dada la expresión

$$X = ABC + \overline{(\overline{BC} + A)} + \overline{AC}$$

a) Dibuja su circuito lógico.
b) Simplifica la expresión y encuentra el circuito lógico correspondiente.

Solución

a) Una posible solución para el circuito de la expresión original es emplear compuertas NAND y NOR, evita el uso de compuertas NOT.

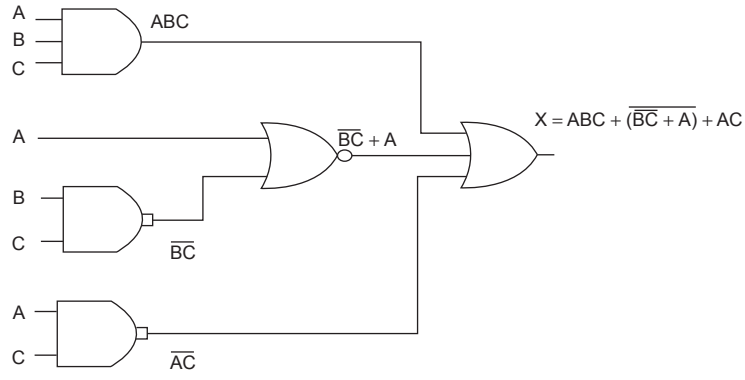


Figura 11.25 Circuito lógico para la expresión original del ejemplo 11.4.

b) Al aplicar las leyes, teoremas y reglas vistas se simplifica la expresión:

$$X = ABC + (\overline{\overline{BC} + A}) + \overline{AC}$$

$$X = ABC + (\overline{\overline{BC}} + \overline{A}) + \overline{AC} \qquad \text{DeMorgan}$$

$$= ABC + \overline{A}\,BC + \overline{AC} \qquad \text{Regla 9 y ley conmutativa}$$

$$= BC(A + \overline{A}) + \overline{AC} \qquad \text{Ley distributiva}$$

$$= BC(1) + \overline{AC} \qquad \text{Regla 6}$$

$$= BC + \overline{AC} \qquad \text{Regla 4}$$

A partir de la expresión simplificada se dibuja el circuito lógico equivalente simplificado.

Se puede comprobar la equivalencia entre ambas expresiones desarrollando la tabla de valores de verdad, tabla 11.13.

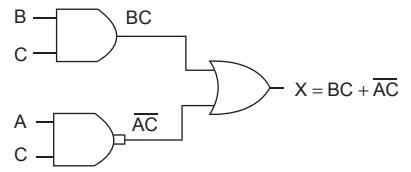


Figura 11.26 Circuito lógico simplificado para el ejemplo 11.4.

Tabla 11.13 Tabla de verdad para el ejemplo 11.4.

A	B	C	ABC	BC	$\overline{BC}$	$\overline{BC} + A$	$(\overline{\overline{BC} + A})$	$\overline{AC}$	X	X_{simp}
0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1



Figura 11.27 Maurice Karnaugh (1952).

Nació en Nueva York, Estados Unidos. Se graduó como ingeniero en Telecomunicaciones en la universidad de Yale. Fue gobernador emérito del ICCC (International Council for Computer Communication). Destacado investigador en los Laboratorios Bell y en el centro de investigación de IBM. Académico en el Politécnico de Nueva York. Miembro del IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers). Creador del método tabular o mapa de Karnaugh con aplicación en el álgebra Booleana y en áreas de la Informática.

11.5 Mapas de Karnaugh

Otra manera de reducir una expresión booleana a su forma más simple es el *método de mapas de Karnaugh*, método gráfico muy útil, sobre todo cuando se tienen expresiones complejas que no son fáciles de manejar algebraicamente o que a simple vista no resultan obvias para su simplificación, figura 11.27.

Los mapas de Karnaugh (o mapas *K*) son representaciones de tablas de verdad que se organizan en un formato de columnas y renglones, formando celdas. Cada celda contiene un valor lógico de 1 o 0 según corresponda a la combinación de valores dados por la columna y el renglón que en ella se cruzan, de acuerdo con la expresión booleana que se analiza. Esto significa que un mapa *K* debe contener 2^n celdas, donde *n* es el número de variables que se analizan; así, un mapa *K* para 2 variables deberá contener $2^2 = 4$ celdas, y uno para 4 variables tendrá $2^4 = 16$ celdas.

COMPETENCIAS:
- Comprender qué es un mapa de Karnaugh. [1]
- Elaborar mapas de Karnaugh a partir de expresiones booleanas. [2]
- Simplificar expresiones booleanas con la ayuda de mapas de Karnaugh. [2]

11.5.1 Mapa de Karnaugh para expresiones con dos variables

Éste es un mapa *K* que contiene $2^2 = 4$ celdas. Para ilustrarlo tomemos como ejemplo el caso de la expresión $\overline{A}B = X$, que contiene dos variables (A, B), y cuyos valores de verdad se muestran en la tabla 11.14.

Tabla 11.14 Valores de verdad para la expresión $\overline{A}\,B = X$.

A	B	$X = \overline{A}\,B$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	0	1
A	0	0

Figura 11.28 Mapa de Karnaugh para la expresión $\overline{A}B = X$.

El mapa *K* tendrá dos renglones, el primero para $\overline{A}$ y el segundo para A, y dos columnas, la primera para $\overline{B}$ y la segunda para B. Se construye el mapa transfiriendo a cada celda los ceros y unos correspondientes a cada posible caso generado en la tabla de verdad de la expresión dada. Esta expresión tiene salida 1 sólo para el caso de A = 0 y B = 1, o sea $\overline{A}B$, los tres casos restantes proporcionan salida 0.

La figura 11.28 es el mapa *K* de la función $\overline{A}B = X$ cuyos valores de verdad están dados en la tabla 11.14.

11.5.2 Mapa de Karnaugh para expresiones con tres variables

Ahora tomemos como ejemplo el caso de la expresión $\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + AB\overline{C} = X$, que contiene tres variables (A, B, C), y cuyos valores de verdad se muestran en la tabla 11.15. Es un mapa que contiene $2^3 = 8$ celdas formadas por cuatro renglones y dos columnas. El primer renglón es para el arreglo $\overline{A}\,\overline{B}$, el segundo para $\overline{A}B$, el tercero para AB y el cuarto para $A\overline{B}$. La primera columna es para $\overline{B}$ y la segunda para C.

El mapa se construye transfiriendo a cada celda los ceros y unos correspondientes a cada posible caso generado en la tabla de verdad de la expresión dada. Cada combinación de valores en las variables, que genera una salida 1 recibe el nombre de *minitérmino.* En la tabla 11.15 se tienen tres minitérminos: $\overline{A}B\overline{C}$, $\overline{A}BC$ y $AB\overline{C}$, los 5 casos restantes proporcionan salida 0. El mapa es el de la figura 11.29.

	C	C
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0
$\overline{A}\,B$	1	1
$A\,B$	1	0
$A\,\overline{B}$	0	0

Figura 11.29 Mapa *K* para la expresión $\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + AB\overline{C} = X$.

Tabla 11.15 Minitérminos para la expresión $B\,ABC + ABC + AB\overline{C} = X$.

A	B	C	X	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\overline{A}\,B\,\overline{C}$
0	1	1	1	$\overline{A}\,B\,C$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$A\,B\,\overline{C}$
1	1	1	0	

11.5.3 Mapa de Karnaugh para expresiones con cuatro variables

Veamos como ejemplo el caso de la expresión $\overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + AB\overline{C}\,\overline{D} = X$, que contiene cuatro variables (A, B, C, D), y cuyos valores de verdad se muestran en la tabla 11.16. Es un mapa *K* que contiene $2^4 = 16$ celdas, formadas por cuatro renglones y cuatro columnas.

Tabla 11.16 Valores de verdad para el caso de cuatro variables y el resultado para $\overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + AB\,\overline{C}\,\overline{D} = X$.

A	B	C	D	X	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	0	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	$\overline{A}\,B\,\overline{C}\,D$ ← Minitérminos
0	1	1	0	0	
0	1	1	1	1	$\overline{A}\,B\,C\,D$ ←
1	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	
1	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	1	$A\,B\,\overline{C}\,\overline{D}$ ←
1	1	0	1	0	
1	1	1	0	0	
1	1	1	1	0	

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}\,D$	$C\,D$	$C\,\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	0	0	0	0
$\overline{A}\,B$	0	1	1	0
$A\,B$	1	0	0	0
$A\,\overline{B}$	0	0	0	0

Figura 11.30 Mapa K para la expresión $\overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + AB\overline{C}\,\overline{D} = X$.

El primer renglón se reserva para el arreglo $\overline{A}\,\overline{B}$, el segundo para $\overline{A}B$, el tercero para AB y el cuarto para $A\overline{B}$. La primera columna es para el arreglo $\overline{C}\,\overline{D}$, la segunda para $\overline{C}D$, la tercera para CD y la cuarta para $C\overline{D}$. Si se transfieren los ceros y unos generados en la tabla de verdad a la celda correspondiente a cada caso, se construye el mapa *K* de la figura 11.30.

Es importante hacer notar que en un mapa *K* el arreglo de variables en el encabezado de columnas y renglones se hace con base en el criterio de que de una celda a su adyacente debe haber alternancia sólo en una de las variables (de *negada* a *no negada* o viceversa), permaneciendo igual el resto, tanto en renglones como en columnas. Por ejemplo, para el caso de un mapa *K* para cuatro variables, en el encabezado de la primera columna se asigna el arreglo $\overline{C}\,\overline{D}$, la segunda columna debe llevar el arreglo $\overline{C}\,\overline{D}$, en el que permanece la $\overline{C}$ y cambia $\overline{D}$ por D. En el encabezado de la columna adyacente hacia la derecha (la tercera) deberá cambiar la variable $\overline{C}$ por C permaneciendo la variable D, y el arreglo para el encabezado de la cuarta columna deberá ser entonces $C\overline{D}$, o sea que permanece la variable C y cambia D por $\overline{D}$.

De esta manera se logra que dos celdas adyacentes del mismo renglón tengan las mismas variables, pero una de ellas cambia de *no negada* a *negada* o viceversa. Con este criterio, si se hace un recorrido por el primer renglón, de izquierda a derecha, se tiene en la primera celda el arreglo $\overline{A}\,\overline{B}\overline{C}\,\overline{D}$, la segunda celda tendrá $\overline{A}\,\overline{B}\overline{C}D$ (permanecen las tres primeras y se cambia $\overline{D}$ por D), la tercera celda contiene el arreglo $\overline{A}\,\overline{B}CD$ (cambia $\overline{C}$ por C), y la cuarta celda tiene las variables $\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$ (cambia D por $\overline{D}$). Esto significa que la última celda será adyacente a la primera celda del mismo renglón ya que contienen los arreglos $\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$ y o $\overline{A}\,\overline{B}\overline{C}\,\overline{D}$ respectivamente (cambia C por $\overline{C}$).

El criterio explicado para el caso de los renglones aplica también en dirección vertical, haciendo recorrido sobre las columnas y se podrá observar la alternancia en una de las variables de cada arreglo, de su expresión *no negada* a *negada* o viceversa. La celda más alta de una columna será adyacente a la celda más baja de la misma columna, teniendo siempre las mismas variables, pero *negada* en una de ellas y *no negada* en la otra. Por ejemplo, en el mapa *K* para cuatro variables la celda más alta de la tercera columna contiene el arreglo $\overline{A}\,\overline{B}CD$ mientras que la celda más baja lleva $A\overline{B}CD$, cambia $\overline{A}$ por A y permanecen las tres restantes.

Un mapa *K* puede aplicarse en problemas que contengan cualquier número de variables, aunque en la práctica se usa para casos de no más de 5 variables, por la complejidad que esto representa. En situaciones de más de 5 variables es recomendable utilizar un programa de computadora.

11.5.4 Mapa de Karnaugh para expresiones con cinco variables

El procedimiento para construir un mapa *K* para el caso de cinco variables obedece al mismo criterio explicado en los casos de cuatro

y tres variables; sólo hay que recordar que entre celdas adyacentes se debe dar la alternancia en el valor lógico de una de las variables en cada minitérmino y las variables restantes permanecen igual. El mapa *K* debe contar con 32 celdas para el total de posibles combinaciones entre las cinco variables. Se dibuja en dos secciones con 16 celdas cada una. La primera sección está reservada para las primeras 16 combinaciones de cinco variables en las que siempre va en primer lugar la primera variable en su forma negada; y la segunda sección para 16 combinaciones donde la primera variable se presenta en su forma no negada, figura 11.31.

EJEMPLO 11.5

Dibuja el mapa K para la expresión

$$X = \overline{A}B\overline{C}\overline{D}E + \overline{A}BC\overline{D}E + AB\overline{C}D\overline{E} + ABC\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}E$$

Solución

1. El mapa *K* se dibuja en dos secciones de 16 celdas cada una: la primera para las combinaciones que contienen a la variable $\overline{A}$, y la segunda para A.
2. Se asigna el valor de 1 para la celda que corresponde a la combinación de cada minitérmino. Hay cinco minitérminos, por tanto se tendrán cinco unos.
3. Las celdas restantes llevan el valor 0.

11.5.5 Agrupamientos de unos en un mapa de Karnaugh

Se llama *agrupamiento* al proceso de asociar los unos de celdas adyacentes en dirección horizontal y/o vertical en un mapa *K* (no se permite en diagonal) y tiene como propósito detectar variables que puedan ser eliminadas de una expresión, sin alterar el valor lógico de ésta. Los agrupamientos

PARA $\overline{A}$						**PARA A**				
	$\overline{D}\,\overline{E}$	$\overline{D}E$	DE	$D\overline{E}$		$\overline{D}\,\overline{E}$	$\overline{D}E$	DE	$D\overline{E}$	
$\overline{B}\,\overline{C}$	0	0	0	0		0	0	0	0	$\overline{B}\,\overline{C}$
$\overline{B}C$	0	1	0	0		0	0	0	0	$\overline{B}C$
$B\,C$	0	1	0	0		1	0	0	0	$B\,C$
$B\,\overline{C}$	0	1	0	0		1	0	0	0	$B\,\overline{C}$

Figura 11.31 Mapa *K* para el ejemplo 11.5.

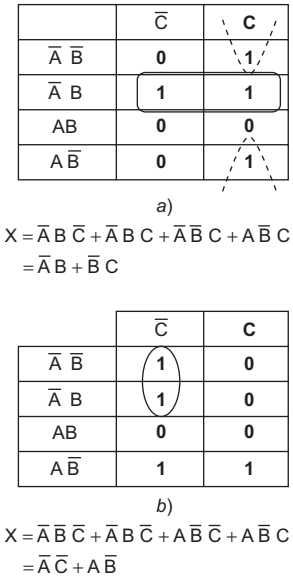


Figura 11.32 *a*) y *b*) Agrupamiento por pares.

pueden ser de dos unos adyacentes (pares), de cuatro unos adyacentes (cuarteto) o de ocho unos adyacentes (octeto). Veamos los ejemplos ilustrados a continuación.

Agrupamiento por pares

La figura 11.32*a* es el mapa *K* que se originó a partir de la expresión $X = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C$. Contiene un par de unos adyacentes en el segundo renglón y otro par en la segunda columna formado por el 1 de la celda más alta y el 1 de la celda inferior.

Al analizar el par formado por unos de las celdas $\bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC$ se observa que la variable C cambia de valor de un término a otro (de una celda a otra); es decir, aparece con un término en su forma *negada* ($\bar{C}$) y en el otro en forma *no negada* (C), en tanto que las dos variables restantes, $A\bar{B}$, aparecen en ambos términos de igual manera. ¿Qué significa esto? Haciendo el análisis algebraico se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC &= \bar{A}B(\bar{C} + C) \\ &= \bar{A}B(1) && \text{Regla 6} \\ &= \bar{A}B && \text{Regla 4} \end{aligned}$$

Si ahora se analiza el par de unos formado por las celdas adyacentes superior e inferior de la segunda columna ($\bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C$) se ve que la variable que aparece *negada* y *no negada* en este agrupamiento es $\bar{A}$ y A, mientras que las variables $\bar{B}C$ permanecen iguales. Al hacer de nuevo el análisis algebraico se tiene que

$$\bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C = \bar{B}C$$

Siguiendo este criterio, a partir del mapa *K* de la figura 11.32.b se elimina la variable C que aparece *negada* y no *negada* dentro del agrupamiento, dando por resultado una expresión simplificada con el mismo valor de verdad.

$$\begin{aligned} X &= \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C \\ &= \bar{A}B + A\bar{B} \end{aligned}$$

Conclusión

Un agrupamiento par permite eliminar a la variable que aparezca en sus formas *negada* y *no negada* en dicho agrupamiento, sin que se altere el valor de verdad de la expresión.

Agrupamiento por cuartetos

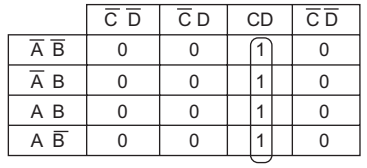
Consiste en formar grupos de cuatro unos adyacentes, en dirección vertical, horizontal o en ambas, como se ven en los dos ejemplos que siguen.

La figura 11.33*a* muestra el mapa *K* de la expresión booleana $X = \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}BCD + ABCD + A\bar{B}CD$. Aquí se ha formado un *cuarteto* en el que están incluidas la variable A y su forma negada $\bar{A}$, y la variable B y su forma negada $\bar{B}$. Al hacer el análisis algebraico se tiene:

$$
\begin{aligned}
X &= \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D + AB\overline{C}D + A\overline{B}\overline{C}D \\
&= \overline{A}CD\,(B + \overline{B}) + ACD(B + \overline{B}) \\
&= \overline{A}CD + ACD \\
&= CD(A + \overline{A}) \\
&= CD
\end{aligned}
$$

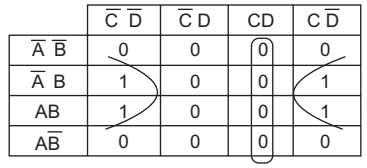
En el mapa *K* de la figura 11.33*b* se han agrupado unos de la primera columna con unos de la última columna para formar un cuarteto. Las variables que se incluyen en el grupo en sus formas *negada* y *no negada* son A y $\overline{A}$, C y $\overline{C}$; por tanto estas variables se pueden suprimir para simplificar la expresión original sin que se altere su valor lógico.

$$
\begin{aligned}
X &= \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D} + ABC\overline{D} \\
&= B\overline{D}
\end{aligned}
$$



a)

$X = \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \overline{A}B\,C\,D + AB\,C\,D + A\overline{B}\,C\,D$



b)

$X = \overline{A}B\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\,C\,\overline{D} + AB\,\overline{C}\,\overline{D} + AB\,C\,\overline{D}$

Figura 11.33 Ejemplos de mapas *K* con agrupamientos por cuartetos.

Conclusión

Un cuarteto es un agrupamiento que permite eliminar a dos variables, las que aparezcan en sus formas *negada* y *no negada* en dicho agrupamiento, permaneciendo aquellas variables que no cambian su valor lógico, sin que se altere el valor de la expresión.

Agrupamiento por octetos

Se llama octeto a un agrupamiento de ocho celdas adyacentes entre sí y que contienen unos. Veamos dos ejemplos:

La figura 11.34*a* es el mapa *K* que resulta de la expresión booleana

$$X = \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + ABCD + ABC\overline{D} + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D}$$

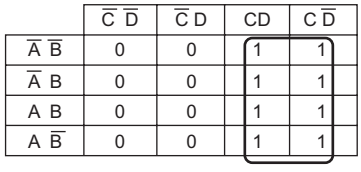
Al hacer el análisis algebraico se tiene el siguiente resultado:

$$
\begin{aligned}
X &= \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}BCD + \overline{A}BC\overline{D} + ABCD + AB\,C\overline{D} + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} \\
&= \overline{A}\,\overline{B}C(D + \overline{D}) + \overline{A}B\,C(D + \overline{D}) + ABC(D + \overline{D}) + A\overline{B}C(D + \overline{D}) \\
&= \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\,C + ABC + A\overline{B}C \\
&= \overline{A}C(B + \overline{B}) + AC(B + \overline{B}) \\
&= \overline{A}C + AC \\
&= C(A + \overline{A}) \\
&= C
\end{aligned}
$$

La figura 11.34*b* representa el mapa K de la expresión con ocho términos:

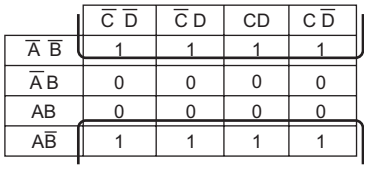
$$X = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D}$$

y puede reducirse al eliminar aquellas variables que aparecen en el octeto en forma *negada* y *no negada*. Éstas son A y $\overline{A}$, C y $\overline{C}$, D y $\overline{A}$,



a)

$X = \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + \overline{A}B\,C\,D + \overline{A}B\,C\,\overline{D} + AB\,C\,D + AB\,C\,\overline{D} + A\overline{B}\,C\,D + A\overline{B}\,C\,\overline{D}$



b)

$X = \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + \overline{A}B\,C\,D + \overline{A}B\,C\,\overline{D} + AB\,C\,D + AB\,C\,\overline{D} + A\overline{B}\,C\,D + A\overline{B}\,C\,\overline{D}$

Figura 11.34 Ejemplos de mapas *K* con agrupamientos por octetos.

quedando únicamente la variable B que no ha alternado su valor de verdad.

Por tanto:

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D}$$
$$= B$$

Conclusión

Un octeto es un agrupamiento que permite eliminar a tres variables, las que aparezcan en sus formas *negada* y *no negada* en dicho agrupamiento, permaneciendo aquella variable que no cambia su valor lógico, sin que se altere el valor de la expresión.

11.5.6 Elaboración de un mapa *K* a partir de una expresión dada

Ya conocemos el concepto de mapa *K*, su interpretación y la manera de hacer agrupamientos; ahora se verá un sencillo procedimiento para la elaboración de un mapa *K* a partir de una expresión booleana.

Paso 1. La expresión dada debe tener la forma de suma de productos. Si acaso no la tiene, tendrá que hacerse el trabajo algebraico que proceda.

Paso 2. Cada uno de los términos de la expresión en forma de suma de productos generará un 1 en la celda que contenga el mismo arreglo de variables que dicho término.

Paso 3. Las celdas que queden vacías en este proceso de colocar unos se llenará con un 0 cada una.

EJEMPLO 11.6

Elabora el mapa *K* para la expresión $X = \bar{A}\bar{B}(\bar{C}\bar{D} + \bar{C}D) + A\bar{B}(\bar{C}\bar{D} + \bar{C}D) + \bar{A}B(CD + C\bar{D})$.

Solución

1. La expresión dada para X no se encuentra en su forma de suma de productos, por lo que se le tiene tiene que dar esta forma aplicando las propiedades del álgebra booleana. Según la ley distributiva:

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BCD + \bar{A}BC\bar{D}$$

2. Una vez que la expresión se encuentra en su forma de suma de productos, se asigna un 1 a la celda que contiene la combinación de variables de cada término de la expresión. El resultado es el mapa de la figura 11.35.

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1	1	0	0
$\bar{A}B$	0	0	1	1
AB	0	0	0	0
$A\bar{B}$	1	1	0	0

Figura 11.35 Mapa *K* para la salida X del ejemplo 11.5.

11.5.7 Simplificación de expresiones booleanas con el apoyo de mapas *K*

La simplificación de una expresión booleana con apoyo de mapas *K* consiste en una secuencia ordenada de pasos de la siguiente manera:

1. Se desarrolla la tabla de verdad de la expresión.
2. A partir de la tabla de verdad se construye el mapa *K* correspondiente, identificando los encabezados de columnas y renglones de manera que haya alternancia en los valores de una de las variables de celda a celda, cada vez.
3. Por cada término con salida 1 de la tabla de verdad se transfiere cada 1 a la celda de la combinación de variables correspondiente.
4. Se agrupan los unos adyacentes en pares, octetos y cuádruples (en este orden, aunque se incluyan unos que ya hayan sido agrupados). Recuerda que se pueden agrupar unos en dirección horizontal o vertical, más no en dirección diagonal, en ningún caso.
5. Forma una función disyunción (OR) con cada combinación de variables obtenida de los agrupamientos.

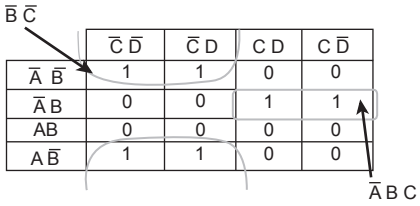


Figura 11.36 Agrupamientos. Ejemplo 11.6.

EJEMPLO 11.7

Halla la expresión simplificada para la expresión X de ejemplo 11.5, a partir del mapa *K* elaborado.

Solución

De acuerdo con el procedimiento sugerido para la simplificación, los pasos 1, 2 y 3 ya fueron dados en el ejemplo 11.5. Ahora se tiene el mapa *K* para la expresión original, que fue arreglada en forma de suma de productos.

$$X = \overline{A}\,\overline{B}(\overline{C}\,\overline{D} + \overline{C}D) + A\,\overline{B}(\overline{C}\,\overline{D} + \overline{C}D) + \overline{A}\,B(CD + C\overline{D}).$$

$$X = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,BCD + \overline{A}\,BC\,\overline{D}$$

El paso 4 nos sugiere hacer agrupamientos. El resultado se muestra en la figura 11.33, donde se tienen un cuarteto y un par, que al analizarlos dan el siguiente resultado:

En el cuarteto se eliminan las variables A y D, por aparecer en su forma negada y no negada en el agrupamiento, permanecen $\overline{B}\,\overline{C}$. En el agrupamiento par se cancela D y $\overline{D}$ y permanecen $\overline{A}BC$. Finalmente, la expresión simplificada es:

$$X = \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC$$

11.6 Circuitos lógicos con compuertas NAND

Como se puede ver, todo circuito lógico será el resultado de combinar apropiadamente las compuertas lógicas que realizan las funciones

básicas OR, AND y NOT; y será, a su vez, la representación de una expresión booleana, ya sea en forma compleja o simplificada equivalente.

En el capítulo 12 se verá lo relacionado con la lógica combinacional para el análisis y diseño de circuitos lógicos básicos, pero antes, veremos ahora que una expresión booleana puede transferirse a un circuito lógico que aplique sólo compuertas NAND, ya que estas compuertas, combinadas apropiadamente pueden sustituir a cualquiera de las compuertas básicas. Esto se ilustra en la figura 11.37.

COMPETENCIAS:
- Comprender la función de las compuertas NAND y NOR. [1]
- Desarrollar un circuito equivalente a los circuitos lógicos dados, usando sólo compuertas. [2]

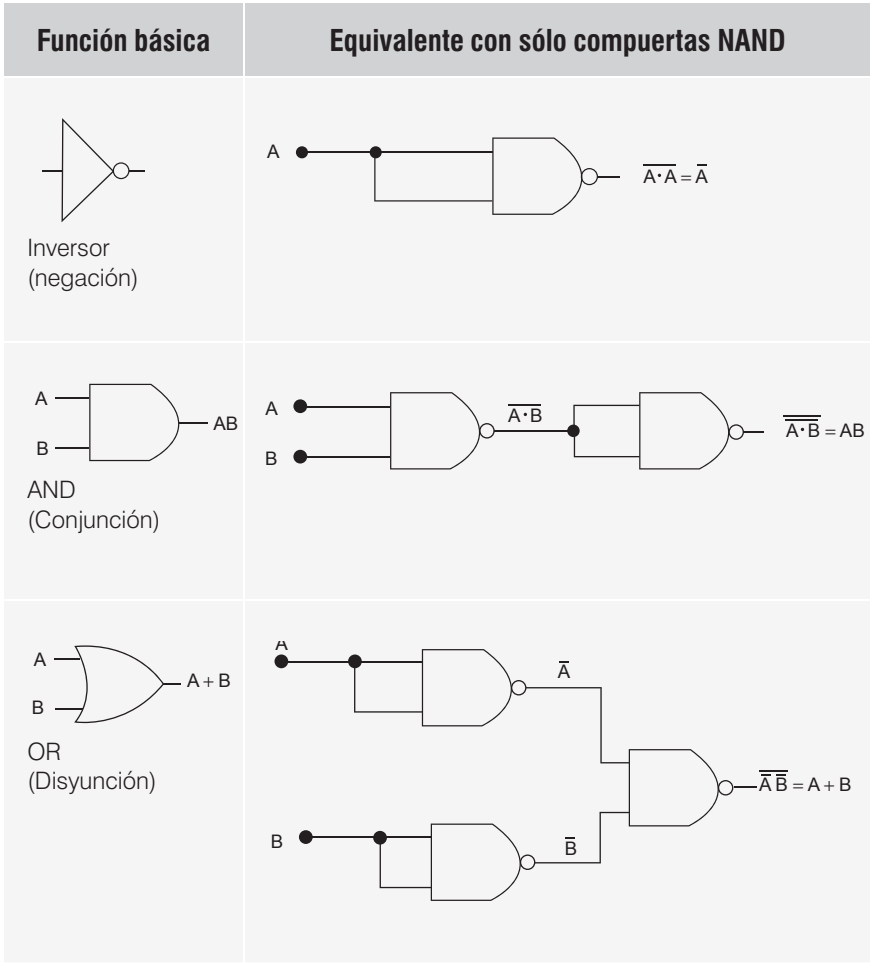


Figura 11.37 Funciones lógicas básicas y su equivalencia con sólo compuertas NAND.

11.7 Circuitos lógicos con compuertas NOR

De manera semejante, pueden sustituirse las compuertas lógicas básicas NOT, AND y OR utilizando apropiadamente sólo compuertas NOR, como se ilustra en la figura 11.38. Queda a criterio del diseñador su utilización.

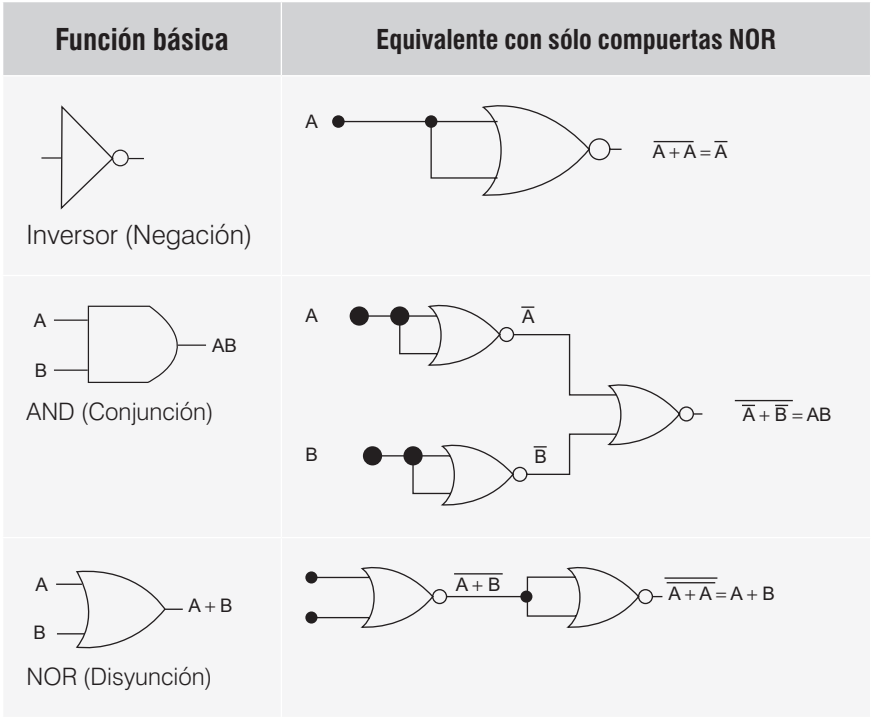


Figura 11.38 Funciones lógicas básicas y su equivalencia con solo compuertas NOR.

Actividades para la evaluación de competencias

Símbolos y funciones lógicas

11.1 A partir de las tablas de verdad 11.2, 11.3, y 11.4, elabora el circuito básico para cada función lógica. [2]

11.2 Comprueba las tablas de verdad 11.5, y 11.6 usando el simulador de circuitos. [3]

Operaciones con compuertas lógicas

11.3 Aplicando las reglas del álgebra de Boole simplifica las expresiones siguientes, y comprueba elaborando las tablas de verdad para cada expresión original y su equivalente simplificada: [2]

a) $X = P + \overline{P} + L$

b) $X = M(M + N)$

c) $X = (AB + C)(A + C)$

d) $X = \overline{ABC} + \overline{B}\,(\overline{A}\,C + A\,\overline{C})$

11.4 Elabora la tabla de verdad para la expresión $X = \overline{A + C} + \overline{ACD}$. [2]

11.5 Simplifica la expresión dada en el ejercicio 11.4 y elabora su tabla de verdad. Comprueba la equivalencia comparando las tablas de verdad obtenidas en ambos ejercicios. [3]

11.6 Elabora la tabla de verdad para la expresión $Z = (\overline{X} + Y)(X + \overline{Y})$ [2]

11.7 Simplifica la expresión dada para Z en el ejercicio 11.6 y obtén su tabla de verdad. Compara la tabla original con la simplificada para comprobar tu resultado. [3]

Álgebra booleana y los circuitos lógicos

11.8 Dibuja el circuito lógico para cada expresión dada en el ejercicio 11.3. [2]

11.9 Dibuja el circuito lógico para cada expresión simplificada del ejercicio 11.3. [2]

11.10 Dibuja los circuitos lógicos correspondientes a los ejercicios 11.4 y 11.5. [2]

11.11 Dibuja los circuitos lógicos correspondientes a los ejercicios 11.6 y 11.7. [2]

11.12 Comprueba los resultados obtenidos en los ejercicios del 11.8 al 11.11 por medio del simulador de circuitos electrónicos. [3]

Leyes del álgebra booleana y circuitos lógicos

11.13 Empleando el simulador de circuitos electrónicos comprueba la ley asociativa de la disyunción (OR) booleana. [3]

11.14 Comprueba la ley asociativa de la conjunción (AND) por medio del simulador de circuitos electrónicos. [3]

Reglas del álgebra booleana

11.15 Por medio del simulador de circuitos comprueba las reglas 10, 11 y 12 del álgebra de Boole. [3]

Teoremas de DeMorgan

11.16 Comprueba las tablas de verdad para los teoremas de DeMorgan $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ y $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$ aplicando el simulador de circuitos. [3]

Mapas de Karnaugh

11.17 Desarrolla la tabla de verdad y encuentra los minitérminos que componen a la expresión que ha generado el mapa *K* de la figura 11.39. [2]

11.18 Dibuja el circuito lógico que corresponde a la expresión obtenida en el ejercicio 11.17. [2]

11.19 ¿Cuáles agrupamientos se pueden formar en el mapa *K* de la figura 11.35 de manera que se tenga la forma más simple de la expresión correspondiente? [3]

11.20 Halla la expresión más simple que se puede obtener a partir del mapa *K* de la figura 11.39 y dibuja su circuito lógico. Comprueba su equivalencia desarrollando la tabla de verdad y compárala con la tabla obtenida en el ejercicio 11.17. [3]

11.21 Comprueba tus resultados de los ejercicios 11.18 y 11.20 verificando la equivalencia de circuitos original y simplificado utilizando un simulador de circuitos. [3]

11.22 Se tiene una caldera que genera vapor mediante el calentamiento de agua cuya salinidad no debe exceder un valor especificado S; el volumen de agua en el interior de la caldera no debe ser superior a un valor V. El sistema de seguridad está programado para que se

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}\,D$	CD	$C\,\overline{D}$
$\overline{A}\,\overline{B}$	1	1	1	1
$\overline{A}\,B$	0	1	1	0
AB	1	0	0	1
$A\,\overline{B}$	1	1	1	1

Figura 11.39 Mapa *K* para el ejercicio 11.17.

active una alarma de luz y sonido cuando se presente cualquiera de las siguientes condiciones no deseadas.

a) Cuando el volumen del agua en el interior de la caldera sea menor que el especificado y la presión de vapor rebase el valor indicado.
b) Cuando el agua de la caldera tenga una salinidad superior a S.
c) Cuando tenga volumen de agua en exceso con temperatura mayor que T.
d) Cuando la temperatura rebase el nivel especificado, con volumen insuficiente de agua y la presión del vapor por abajo del valor especificado.

Desarrolla la tabla de verdad para las condiciones lógicas dadas en la caldera y compara tus resultados con el de tus compañeros, para obtener conclusiones. [3]

11.23 Desarrolla la expresión algebraica que describe al caso de la caldera de vapor del ejercicio 11.22. [2]

11.24 A partir de la expresión booleana del ejercicio 11.23 dibuja el circuito lógico para el caso de la caldera de vapor. [2]

11.25 Aplicando el método de mapas de Karnaugh simplifica la expresión booleana del ejercicio 11.23. [2]

11.26 Dibuja el circuito lógico simplificado que se genera a partir de la expresión simplificada del ejercicio 11.25. [2]

11.27 Comprueba la operación del circuito lógico simplificado obtenido para el caso de la caldera de vapor haciendo la simulación de este circuito. [3]

Circuitos lógicos con compuertas NAND

11.28 Usando sólo compuertas NAND elabora el circuito lógico para las reglas booleanas

$A + AB = A$

$A + \overline{A}B = A + B$

$(A + B)(A + C) = A + BC$

Comprueba tu resultado utilizando el simulador de circuitos. Explica el procedimiento a tus compañeros del grupo. [3]

11.29 Usando sólo compuertas NAND comprueba en el simulador de circuitos los teoremas de DeMorgan. [2]

Circuitos lógicos con compuertas NOR

11.30 Realiza los ejercicios 11.28 y 11.29 empleando sólo compuertas NOR. Verifica tus resultados y comprueba la equivalencia entre circuitos (sólo compuertas NAND y sólo compuertas NOR) con el simulador de circuitos. [3]

Notas:

[1] Competencias de la dimensión Instrumental.
[2] Competencias de la dimensión Sistémica.
[3] Competencias de la dimensión Interpersonal.

Capítulo 12

Circuitos lógicos combinacionales y secuenciales

	Estructura	
Temas		
	Conceptuales	
12.1 Circuitos lógicos combinacionales 12.1.1 Simplificación de un circuito lógico.	• Qué es lógica combinacional y lógica secuencial. • Qué es un circuito lógico combinacional. • Concepto de *nivel de operación lógica*. • Valor indistinto en una tabla de verdad.	
12.2 Circuitos lógicos secuenciales	• Qué es un circuito lógico secuencial. • Qué es un circuito Flip-Flop.	
12.3 Flip-Flop de compuertas NAND 12.3.1 Señal SET para un Flip-Flop NAND. 12.3.2 Señal RESET para un Flip-Flop NAND.	• Configuración básica de un Flip-Flop de compuertas NAND. • Entradas libres SET y RESET en el FF-NAND. • Estado de reposo para un FF-NAND. • Tabla de valores de verdad de un FF-NAND.	
12.4 Flip-Flop de compuertas NOR 12.4.1 Señales SET y RESET para un Flip-Flop NOR.	• Configuración básica de un Flip-Flop de compuertas NOR. • Entradas libres SET y RESET en el FF-NOR. • Estado de reposo para un FF-NOR. • Tabla de valores de verdad de un FF-NOR.	
12.5 Pulsos digitales y los Flip-Flop	• Qué es el estado inicial de un Flip-Flop. • Qué se entiende por pulso en circuitos digitales. • Características de un pulso.	
12.6 Flip-Flop controlado por reloj 12.6.1 Flip-Flop SR.	• Qué es un Flip-Flop controlado por reloj. • Entradas S y R en un FF controlado por reloj. • Simbología aplicada en un FF controlado por reloj. • Tabla de valores de verdad para un FF controlado por reloj.	

	temática
	CONTENIDOS

	Procedimentales	**Actitudinales**
	• Proceso para la elaboración de un circuito lógico combinacional. • Simplificación de un circuito combinacional.	• Valorar la importancia de los circuitos secuenciales en el desarrollo de los sistemas electrónicos digitales. • Fundamentos estructurados para tomar decisiones.
	• Operación de los circuitos Flip-Flop.	
	• Proceso de funcionamiento en un Flip-Flop de compuertas NAND. • Elaboración de la tabla de valores de verdad para un FF-NAND.	
	• Proceso de funcionamiento en un Flip-Flop de compuertas NOR. • Elaboración de la tabla de valores de verdad para un FF-NOR.	
	• Interpretación de pulsos como señal en terminales de entrada SET y RESET de un Flip-Flop.	
	• Interpretación del funcionamiento de un FF controlado por reloj en función del tiempo.	

Estructura

Temas	CONTENIDOS	
	Conceptuales	
12.7 Flip-Flop T	• Qué es un Flip-Flop T. • Tabla de valores de verdad de un FF-T.	
12.8 Flip-Flop JK	• Qué es un Flip-Flop JK. • Tabla de valores de verdad de un FF-JK.	
12.9 Flip-Flop D	• Qué es un Flip-Flop D. • Tabla de valores de verdad de un FF-D.	
Actividades para la evaluación de competencias		

	temática

	CONTENIDOS	
	Procedimentales	**Actitudinales**
	• Interpretación del funcionamiento de un FF-T en función del tiempo.	
	• Interpretación del funcionamiento de un FF-JK. • Elaboración de la tabla de valores de verdad para un FF-JK.	
	• Interpretación del funcionamiento de un FF-D. • Elaboración de la tabla de valores de verdad para un FF-D.	

Orientación general		
Analizar los principios y características principales de los circuitos digitales que operan en el esquema de la lógica combinacional y la lógica secuencial.		
Competencias		
Dimensión Instrumental [1]	**Dimensión Sistémica [2]**	**Dimensión Interpersonal [3]**
Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:	Propiciar en el estudiante la formación de COMPETENCIAS que estimulen el desarrollo de su capacidad para:
1.1 Comprender la estructura de un circuito lógico combinacional en atención a sus niveles de operación lógica. 1.2 Comprender la estructura de un circuito lógico secuencial. 1.3 Comprender el funcionamiento de un circuito Flip-Flop básico. 1.4 Comprender el funcionamiento de un circuito Flip-Flop de compuertas NAND. 1.5 Comprender el funcionamiento de un circuito Flip-Flop de compuertas NOR. 1.6 Comprender las características de un pulso. 1.7 Comprender el efecto de los pulsos digitales en sistemas Flip-Flop. 1.8 Comprender los conceptos de sincronización y control por reloj en un Flip-Flop. 1.9 Comprender los principios de funcionamiento de un contador con base en un circuito FF-T. 1.10 Comprender el funcionamiento de un circuito Flip-Flop JK. 1.11 Comprender el principio de operación para almacenamiento de datos con base en un circuito FF-D.	2.1 Estructurar un circuito lógico combinacional atendiendo a sus niveles de operación lógica. 2.2 Desarrollar la tabla de valores de verdad para un circuito lógico combinacional. 2.3 Simplificar un circuito combinacional en atención a los niveles de operación lógica. 2.4 Desarrollar la tabla de valores de verdad para un circuito Flip-Flop de compuertas NAND. 2.5 Desarrollar la tabla de valores de verdad para un circuito Flip-Flop de compuertas NOR. 2.6 Analizar la respuesta de un Flip-Flop al aplicarle una señal pulsante a la entrada. 2.7 Analizar la respuesta de un Flip-Flop tipo SR, T, JK, o D al aplicarle una señal pulsante a la entrada.	3.1 Valorar la importancia de los circuitos secuenciales en el desarrollo de los sistemas electrónicos digitales.

Introducción

COMPETENCIA:
Valorar la importancia de los circuitos secuenciales en el desarrollo de los sistemas electrónicos digitales. [3]

En los dos capítulos anteriores se revisaron los conceptos y teorías fundamentales que sirven de base para la operación de los sistemas digitales que, como se ha visto, operan con base en la lógica matemática y los sistemas numéricos digitales. Asimismo, se ha presentado una introducción a los dispositivos digitales básicos para todo sistema lógico como son las compuertas lógicas. Estos conocimientos son el antecedente para comprender, en el presente capítulo, el análisis y diseño de circuitos lógicos que resultan finalmente en sistemas electrónicos capaces de realizar operaciones en forma digital a altas velocidades. El estudio de estos sistemas a mayor profundidad se puede hacer en textos de especialidad en el tema.

Los circuitos lógicos que ahora veremos son redes con elementos o compuertas conectados entre sí, que realizan funciones lógicas para proporcionar una salida o resultado expresado en dos posibles valores representados por 1 o por 0; y en unos casos tienen, además, la capacidad para almacenar datos o bien eliminarlos. Estas redes se configuran esencialmente con circuitos cuya operación puede ser de dos tipos:

- **Lógica combinacional**: es el esquema bajo el que opera una red formada por compuertas lógicas conectadas entre sí para generar un resultado o salida específica como respuesta a datos proporcionados a la entrada, sin capacidad para almacenar datos en el tiempo.
- **Lógica secuencial**: es el esquema con el que opera una red formada por compuertas lógicas conectadas en una secuencia definida, con capacidad para almacenar o eliminar datos en forma de señales.

12.1 Circuitos lógicos combinacionales

COMPETENCIAS:
- Comprender la estructura de un circuito lógico combinacional considerando sus niveles de operación lógica. [1]
- Estructurar un circuito lógico combinacional atendiendo a sus niveles de operación lógica. [2]
- Desarrollar la tabla de valores de verdad para un circuito lógico combinacional. [2]

Se da el nombre de *circuito lógico combinacional* a una red formada por compuertas lógicas conectadas entre sí, cuyo propósito es obtener un dato de salida a partir de datos de entrada. Un circuito de este tipo se construye a partir de una expresión booleana dada en forma de ecuación, la cual representa un procesamiento de datos.

Considera el caso de la siguiente ecuación que contiene cinco variables:

$$X = ABC + DE$$

La salida X corresponde a una función que debe realizarse operando con los valores que se proporcionen al inicio para cada una de las variables, que pueden ser unos o ceros. Consta de dos términos: el primero se forma con las variables A, B y C unidas mediante el conectivo AND (función lógica de conjunción), y el segundo, formado por las variables D y E con el conectivo AND. Ambos términos se enlazan finalmente con el conectivo OR (signo +), función lógica de disyunción.

Observa que el formato de esta expresión indica que primero deben realizarse las operaciones AND en cada uno de sus términos y luego unirlas mediante la operación OR, que generará la salida X de interés. De ahí entonces que esta operación final es la *operación de primer nivel*, en tanto que las operaciones AND contenidas en cada término pasan a ser cada una *operación de segundo nivel*, figura 12.1.

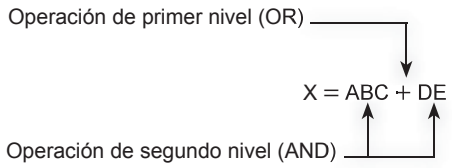


Figura 12.1 Expresión de circuito lógico combinacional.

Es importante identificar el nivel de cada operación porque es la base para construir el circuito lógico que corresponde a la expresión. El *primer nivel* es el más alto, e indica que la operación incluye más elementos, por lo que debe efectuarse después de operaciones de menor nivel. En otras palabras, la operación de nivel más bajo es la que se realizará primero.

No todas las expresiones son tan sencillas y en ocasiones requieren de realizar operaciones en tercer o cuarto nivel o más. Veamos otro ejemplo para construir un circuito lógico.

EJEMPLO 12.1

Construye el circuito lógico para la expresión $X = ACD + AB(\overline{C}\,\overline{D} + CE)$.

Solución

Primero se identifica el nivel de operación en cada término, figura 12.2.

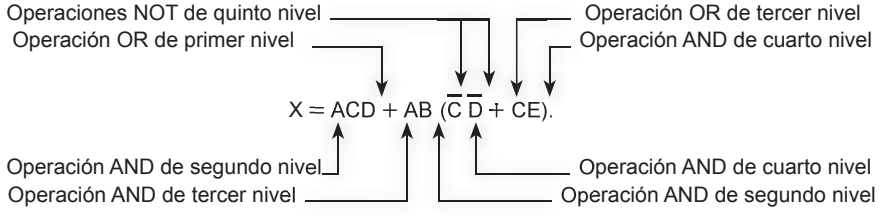


Figura 12.2 Niveles de operación de cada término.

En la expresión para X se distinguen cinco niveles de operación, esto indica que las de quinto nivel serán las primeras en realizarse y son las que se dibujarán en primer término, a la izquierda, al trazar el circuito lógico. Desglosemos la expresión:

Nivel 5. Se tienen sólo dos inversores (NOT) con entradas C para uno y D para el segundo. Sus salidas serán $\overline{C}$ y $\overline{D}$, respectivamente.

Nivel 4. Hay dos compuertas AND: La primera con entradas $\overline{C}$ y $\overline{D}$ cuya salida será $\overline{C}\,\overline{D}$, y la segunda, con entradas C y E, con salida CE.

Nivel 3. Hay una compuerta AND con entradas A y B (salida AB), y una compuerta OR con entradas $\overline{C}\,\overline{D}$ y CE (salida $\overline{C}\,\overline{D}$ + CE).

Nivel 2. Hay dos compuertas AND, una con entradas A, C y D (salida ACD), y otra con entradas AB y ($\overline{C}\,\overline{D}$ + CE), con salida AB ($\overline{C}\,\overline{D}$ + CE).

Nivel 1. Se tiene sólo una compuerta OR con entradas ACD y AB($\overline{C}\,\overline{D}$ + CE), cuya salida será ACD + AB($\overline{C}\,\overline{D}$ + CE), que es la expresión final para *X*.

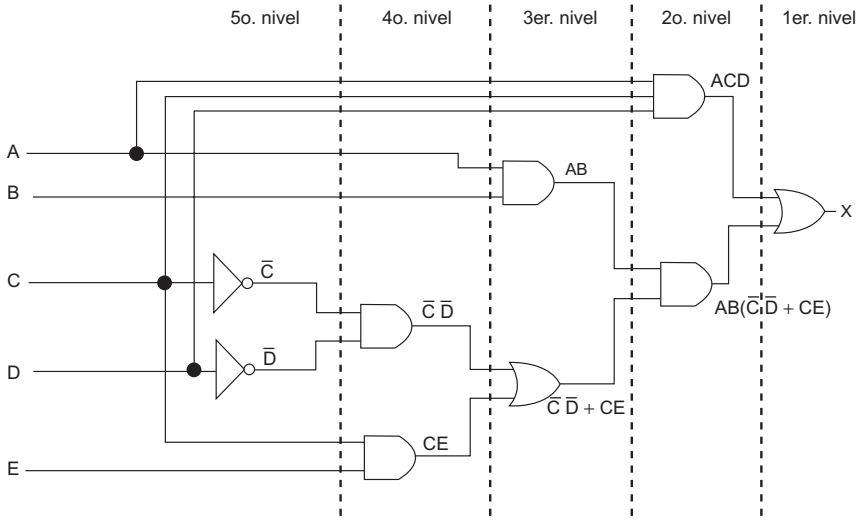


Figura 12.3 Circuito lógico para la expresión X = ACD + AB($\overline{C}\,\overline{D}$ + CE).

El circuito lógico quedará como aparece en la figura 12.3.

12.1.1 Simplificación de un circuito lógico

El circuito lógico que resultó en el ejemplo 12.1 parece complicado; de ahí que se deba buscar la manera de simplificarlo. El objetivo de llevar un circuito lógico a su forma más simple y que entregue el mismo resultado que su original, es reducir el número de compuertas lógicas que se trazarán en el diagrama y, por tanto, reducir el número de componentes al momento de ensamblar el circuito electrónico.

Esto se traduce en facilidad de manejo, de instalación, de comprobación y también en reducción de costos, de alimentación de energía y de espacio para su montaje.

La simplificación es un proceso que aplica las leyes y propiedades del álgebra booleana, o bien los mapas de Karnaugh. Tomemos el circuito resultante del ejemplo anterior para buscar su simplificación.

EJEMPLO 12.2

Dibuja el circuito simplificado para la expresión

$$X = A\overline{B}(\overline{C}\,\overline{D}\,E + C\,\overline{D}\,\overline{E} + C\,\overline{D}\,E + CD\,\overline{E}) + AB\overline{C}\,(DE + \overline{D}E + D\overline{E}) + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,E + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,(DE + D\overline{E}) + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}(\overline{D}\,E + DE + D\overline{E})$$

Solución

Se trata de una expresión que contiene cinco variables, y por su complejidad resultará más práctico utilizar el método de mapa *K* para simplificar.

1. Como primer paso se debe dar a la expresión su forma de suma de productos. Al aplicar la ley distributiva se obtiene

$$X = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,E + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,DE + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D\,\overline{E} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,\overline{E} + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,DE + \overline{A}\,B\,\overline{C}\,D\,\overline{E} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,E + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}\,\overline{E} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D\,E + A\,\overline{B}\,C\,D\,\overline{E}) + AB\,\overline{C}\,DE + AB\,\overline{C}\,\overline{D}\,E + AB\,\overline{C}\,E + AB\,\overline{C}\,D\,\overline{E}$$

La expresión desarrollada ha generado una suma de 14 productos o términos, y cada uno de ellos genera una salida con valor 1. Estos unos se transfieren al mapa *K*, el cual aparece en la figura 12.4.

Para $\overline{A}$

	$\overline{D}\,\overline{E}$	$\overline{D}\,E$	DE	$D\,\overline{E}$
$\overline{B}\,\overline{C}$	0	1	1	1
$\overline{B}\,C$	0	1	0	0
$B\overline{C}$	0	0	0	0
$B\,\overline{C}$	0	0	1	1

Para A

$\overline{D}\,\overline{E}$	$\overline{D}\,E$	DE	$D\,\overline{E}$	
0	1	0	0	$\overline{B}\,\overline{C}$
1	1	1	1	$\overline{B}\,C$
0	0	0	0	$B\overline{C}$
0	1	1	1	$B\,\overline{C}$

Figura 12.4 Mapa *K* para el ejemplo 12.2, con agrupamientos.

2. Como siguiente paso se localizan agrupamientos, encontrándose tres pares y dos cuartetos (figura 12.4). Cada uno de estos agrupamientos genera una operación AND y es un nuevo término simplificado.
3. A partir de los agrupamientos se identifican los términos simplificados y se enlazan con el conectivo OR. Expresión simplificada, figura 12.5:

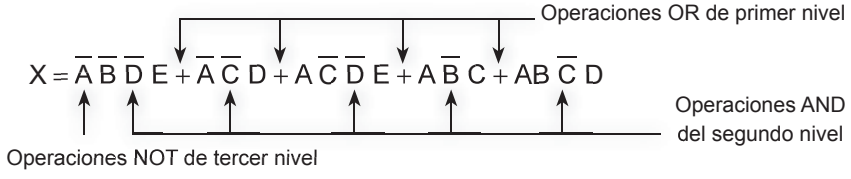


Figura 12.5 Expresión simplificada del mapa K con agrupamientos.

4. Se dibuja el circuito para la expresión simplificada, figura 12.6:

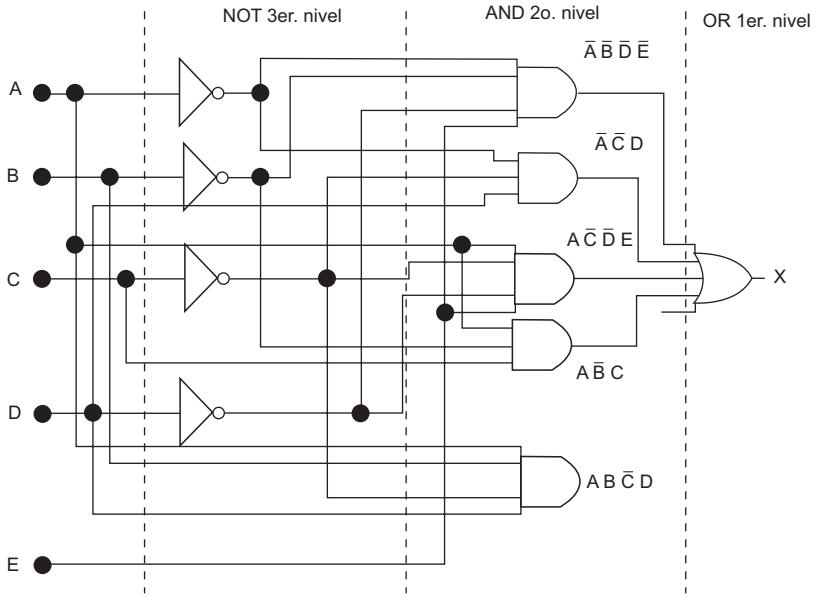


Figura 12.6 Circuito simplificado para el ejemplo 12.2.

EJEMPLO 12.3

A partir de la tabla 12.1 dibuja el circuito lógico más simple.

Solución

La tabla 12.1 tiene 12 combinaciones que generan valor de 1; cada uno de ellos representa un término para la expresión buscada para *X*. Esto significa que se trata de una suma de 12 productos.

Si se dibuja el mapa *K* para esta tabla, el resultado será el de la figura 12.7.

	$\bar{D}\,\bar{E}$	$\bar{D}\,E$	DE	$D\,\bar{E}$
$\bar{B}\,\bar{C}$	1	0	0	1
$\bar{B}\,C$	1	1	1	1
BC	1	0	0	1
$B\,\bar{C}$	1	0	1	1

Figura 12.7 Mapa *K* para el ejemplo 12.3.

Sobre el mapa *K* obtenido en la figura 12.7 se forman dos agrupamientos:

Se tiene un octeto y un cuarteto que elimina tres variables quedando solamente la variable $\bar{E}$.

Tabla 12.1 Valores de verdad para la salida *X* del ejemplo 12.3.

B	C	D	E	X
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Hay un cuarteo en el que se eliminan dos variables, quedando sólo $\overline{B}\,C$.

La expresión simplificada para X es:

$$X = \overline{B}\,C + \overline{E}$$

Finalmente, el circuito simplificado es figura 12.8:

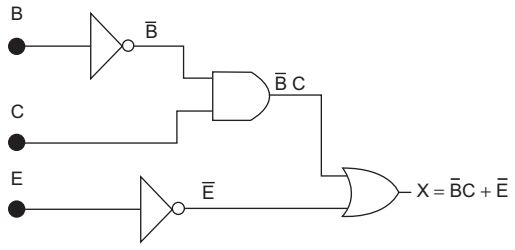


Figura 12.8 Circuito simplificado para el ejemplo 12.3.

Cuando un valor es indistinto

Una tabla de verdad puede generar una expresión booleana que se ha llevado a su forma de suma de productos, estará en condiciones de ser representada en un mapa *K*; sin embargo, en muchos casos, alguno o algunos de los términos de la expresión no contienen al total de las variables de la situación que se representa.

La interpretación es que en el circuito relacionado a esta expresión hay ciertas condiciones de entrada que nunca se presentarán, y para las cuales no se tienen valores de salida especificados. Una expresión en este caso es:

$$X = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + CD$$

En esta expresión se detecta que existen cuatro variables (A, B, C, D). Al hacer un análisis particular en cada término se tiene que estas variables están presentes, las cuatro, solamente en el segundo y tercer términos, ya sea en forma negada o no negada; sin embargo, en el primer término $\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ no está presente la variable A, lo que quiere decir que esta variable no tiene un nivel de salida especificado y, por tanto, *su valor es indistinto* para este término. La interpretación es que se podrá escribir el valor de 1 en la celda donde se encuentre esta combinación de variables, sin importar el valor que pueda tener la variable A (negada o 0, no negada o 1).

Asimismo, el cuarto término de la expresión contiene a la combinación CD, que representa una condición de salida indistintamente de los valores que puedan tener las variables A y B.

Una manera de representar en un mapa *K* a estos términos, cuyo valor es indistinto del valor de otras variables, es utilizar un símbolo diferente de los valores 0 o 1, puede ser la letra *i* (de indistinto).

EJEMPLO 12.4

Dibuja el mapa *K* para la expresión $X = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + CD$

Solución

Se tiene la expresión original en la forma de suma de productos. El mapa *K* queda como se muestra en la figura 12.7.

A partir de esta situación, al dibujar el mapa K correspondiente a la expresión, se puede decidir si la letra *i* de una celda se toma como 0 o 1 con el objetivo de generar la expresión más simple, figura 12.9.

	$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}\,D$	CD	$C\,D$
$\overline{A}\,\overline{B}$	*i*	0	*i*	1
$\overline{A}\,B$	0	0	*i*	0
AB	0	0	*i*	0
$A\,\overline{B}$	*i*	0	*i*	1

Figura 12.9 Mapa *K* con agrupamientos para el ejemplo 12.4.

Al hacer agrupamientos se tienen dos cuartetos, cada uno de los cuales permite eliminar dos variables. La expresión final simplificada es la siguiente:

$$X = \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + CD$$

$$X = \overline{B}\,\overline{C} + CD$$

12.2 Circuitos lógicos secuenciales

COMPETENCIAS:
- Comprender la estructura de un circuito lógico secuencial. [1]
- Comprender el funcionamiento de un Flip-Flop básico. [2]

La lógica secuencial es con la que operan los circuitos lógicos que siguen un orden específico. La combinación de compuertas forma un sistema con la capacidad para almacenar dígitos binarios y eliminarlos en un momento requerido. La operación que realiza cada etapa de un circuito lógico secuencial depende de los resultados que tengan etapas previas.

Dentro de esta clase de lógica operan los sistemas *flip-flop* o multivibradores biestables llamados así porque pueden estar en uno de dos posibles estados por tiempo indefinido, con la capacidad de cambiar su estado al aplicarles una señal de excitación externa. Entre las aplicaciones más importantes de estos circuitos está la de almacenar datos binarios, ya que su salida estará en 0 o en 1, dependiendo de la señal que se aplique a su entrada. Los circuitos básicos de flip-flop se construyen con compuertas NAND o con compuertas NOR, con realimentación de la salida a una de sus entradas.

12.3 Flip-Flop de compuertas NAND

Una configuración básica de circuito flip-flop se forma con dos compuertas NAND, como se muestra en la figura 12.10 (FF-NAND).

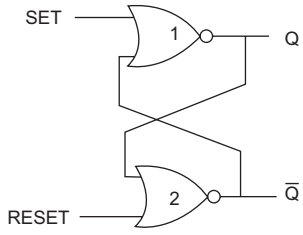


Figura 12.10 Circuito flip-flop de compuertas NAND (FF-NAND).

Consta de dos compuertas NAND, identificadas como NAND-1 y NAND-2, con dos entradas cada una y realimentadas entre sí, de manera que la salida Q de la compuerta 1 se conecta a una de las entradas de la compuerta 2, y la salida $\overline{Q}$ de la compuerta 2 se conecta a una de las entradas de la compuerta 1. Las salidas Q y $\overline{Q}$ pueden tener estado 1 (alto) o 0 (bajo).

Las entradas libres se identifican como SET (establecer) para la compuerta 1, y RESET (restablecer) para la 2. Estas entradas por lo general están en 1 (alto), y pueden cambiar su estado a 0 (bajo), mediante la aplicación de un pulso.

12.3.1 Señal SET para un Flip-Flop NAND

La señal de entrada SET establece la condición de operación para la NAND-1, y por consecuencia, la operación del flip–flop en su conjunto. Analicemos el sistema cuando se aplica un pulso de duración $t_1 - t_0$ para SET = 1, mientras que la entrada RESET permanece con valor 1 (alto).

Para $t = t_1 - t_0$: SET = 1 (RESET= 1).

Supongamos que inicialmente las salidas son Q = 0 y $\overline{Q}$ = 1, la entrada RESET = 1 y se aplica un pulso de duración $t_1 - t_0$ en la entrada SET para establecer un valor 1. En estas condiciones, las dos entradas de NAND-1 tienen valor 1, por lo que su salida es Q = 0. Este valor se manda a una entrada de NAND-2, haciendo que ésta tenga entradas 0 y 1, y su salida sea 1, que corresponde a $\overline{Q}$. Estas condiciones permanecerán durante el tiempo $t_1 - t_0$, figura 12.11*a*.

Ahora supondremos que inicialmente Q = 1, $\overline{Q}$ = 0, RESET = 1, y se aplica un pulso a la entrada SET. En estas condiciones la compuerta NAND-1 tiene entradas 1 y 0, lo que dará por resultado que su salida sea es Q = 1. Este valor se manda a una de las entradas de NAND-2, lo que hace que ésta tenga entradas 1 y 1 para dar una salida 0, que corresponde a $\overline{Q}$, figura 12.11*b*.

Se observa en este análisis, ilustrado en las figuras 12.11*a* y 12.11*b*, que cuando se aplican señales SET = RESET = 1 en las entradas del

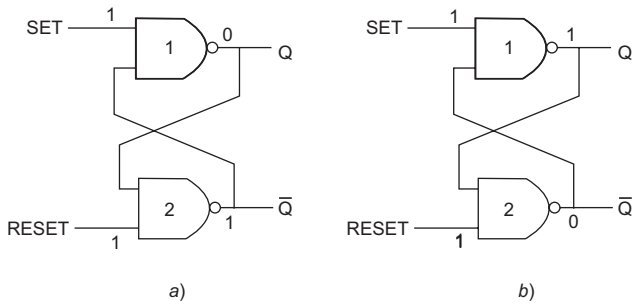


Figura 12.11 *a*) Inicialmente Q = 0, *b*) Inicialmente Q = 1.
No hay cambios al aplicar SET = RESET = 1 en el FF-NAND. Estado de reposo.

FF-NAND, se establecen condiciones que no alterarán el estado de operación que el sistema tiene antes de aplicar la señal en SET. Estas condiciones dan por resultado lo que se conoce como *estado de reposo* para el sistema, ya que no se generan cambios en los estados de Q.

Para $t = t_2 - t_1$: SET = 0 (RESET = 1)

Ahora, supongamos que Q = 0, $\overline{Q} = 1$ y en el tiempo t_1 el pulso de la entrada SET cambia por un valor 0 para el período $t_2 - t_1$. Esta entrada es suficiente para que la NAND-1 tenga su salida Q = 1, cuyo valor se envía a una entrada de la NAND-2. La segunda compuerta tendrá ahora salida 0, valor que corresponde a $\overline{Q}$, que a su vez realimenta a la entrada de la NAND-1. Las condiciones de entrada SET = 0 y RESET = 1 provocan un cambio en el estado inicial de la salida. El resultado se muestra en la figura 12.12.

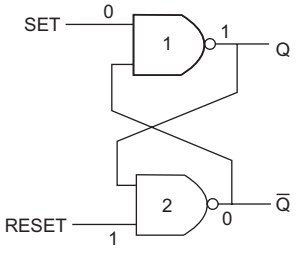


Figura 12.12 FF-NAND con SET = 0 y RESET = 1. Cambia el valor inicial de la salida.

Las condiciones descritas en las figuras 12.11 y 12.12 nos explican cómo se *establece* el FF-NAND, que se puede resumir en que cada vez que se aplique un pulso en la entrada SET (valor alto o 1) se mantendrá la salida como se encontraba inicialmente, y un valor 0 en la entrada SET = 0 dará por resultado cambio de valor en Q.

Tabla 12.2 Valores de verdad para el FF-NAND.

SET	RESET	Q
0	0	No permitido
0	1	1
1	0	0
1	1	Sin cambio

12.3.2 Señal RESET para un Flop-Flop NAND

Consideremos ahora que se mantiene la entrada SET = 1 (valor alto) y se cambian los valores para la entrada RESET (restablecer).

Para $t = t_3 - t_2$: RESET = 0 (SET = 1)

Pensemos que el sistema tiene las condiciones Q = 1, $\overline{Q}$ = 0, SET = 1 como en la figura 12.11*b*, y en el tiempo t_2 se cambia el valor de RESET de 1 a 0, como se ve en la figura 12.13*a*. La compuerta NAND-2 tiene ahora entradas 1 y 0, por lo que su salida es $\overline{Q}$ = 1, y este valor se manda a una de las entradas de NAND-1 lo que dará por resultado que Q = 0. Luego, esta salida se manda a una de las entradas de NAND-2, volviendo a tener su salida en $\overline{Q}$ = 1. El cambio de valor en la entrada RESET provoca un cambio de condiciones de salida del sistema. Esta operación se llama *restablecer* el flip-flop.

Para $t = t_3 - t_2$: RESET= 1 (SET = 0)

Para SET = RESET = 0

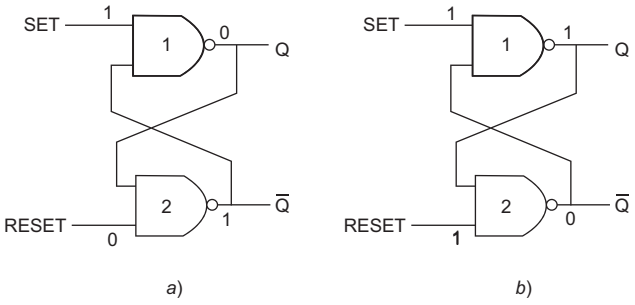


Figura 12.13 Con SET = 1, un cambio de valor en RESET provoca un cambio en los valores de Q.

Debe notarse que si se tiene a la entrada SET = 0 y RESET = 0 se dan las condiciones en el FF-NAND para que el sistema tenga salidas Q = $\overline{Q}$ = 1, lo que significa que tiende a establecerse y restablecerse o borrarse al mismo tiempo. La conclusión es que esta condición no está permitida.

Las condiciones de operación de un FF-NAND se pueden resumir en la tabla de verdad 12.2.

12.4 Flip-Flop de compuertas NOR

COMPETENCIAS:
- Comprender el funcionamiento de un FF de compuertas NOR. [1]
- Desarrollar la tabla de valores de verdad para un circuito FF de compuertas NOR. [2]

Una configuración básica de circuito flip-flop puede formarse también con dos compuertas NOR (FF-NOR) como se muestra en la figura 12.14.

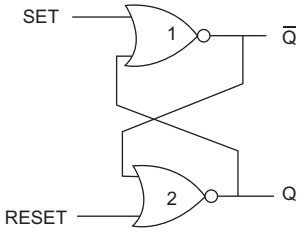


Figura 12.14 Circuito flip-flop de compuertas NOR (FF-NOR).

Se forma con dos compuertas NOR, identificadas como NOR-1 y NOR-2, con dos entradas cada una y realimentadas entre sí, de manera que la salida $\overline{Q}$ de la NOR-1 se conecta a una de las entradas de la NOR-2, y la salida Q de la NOR-2 se conecta a una de las entradas de la NOR-1. Las salidas Q y $\overline{Q}$ pueden tener estado 1 (alto) o 0 (bajo).

Las formas de entradas y de salidas para el FF-NOR son similares a las vistas para el FF-NAND

12.4.1 Señales SET y RESET para un Flip-Flop NOR

De manera similar a como se analizó el caso del circuito FF-NAND, la señal SET en el FF-NOR establece la condición de operación para la NOR-1, y por consecuencia, la operación del sistema en su conjunto, como se explica a continuación.

Para $t = t_1 - t_0$: SET = 0 (RESET= 0)

Supón que en el flip-flop de la figura 12.15*a* se tiene inicialmente la salida que $\overline{Q} = 0$, Q = 1, y la entrada RESET = 0. Si se aplica una señal 0 en la entrada SET, las entradas para la compuerta NOR-1 son 0 y 1, lo que genera una salida $\overline{Q} = 0$; este valor se manda a una de las entradas de la compuerta NOR-2 para que ésta tenga una salida Q = 1. A su vez, este valor se manda a una de las entradas de la NOR-1, manteniendo su salida en $\overline{Q} = 0$. El valor SET = 0 no provoca cambios en el sistema.

Para $t = t_2 - t_1$: SET = 1 (RESET= 0)

Si al flip-flop descrito en el párrafo anterior se aplica un pulso en la entrada para tener SET = 1 y RESET = 0, esto hará que la compuerta NOR-1 tenga una salida $\overline{Q} = 0$. Este valor se manda a una de las entradas de la NOR-2, por lo que su salida será Q = 1. A su vez, esta salida se manda a una de las entradas de la NOR-1, lo que vuelve a generar una salida de $\overline{Q} = 0$ (figura 12.15*b*).

Ahora, si en el FF-NOR de la figura 12.15*a* con salidas $\overline{Q} = 0$ y Q = 1, y SET = 0, se aplica un pulso (valor alto) a la entrada RESET. En estas condiciones de operación la compuerta NOR-2 tendrá una salida = 0Q = 0, cuyo valor será enviado a una de las entradas de la NOR-1, lo que ocasionará en ésta una salida de $\overline{Q} = 1$. Se restablece el sistema ocasionando un cambio en las condiciones iniciales de operación, quedando así, aunque RESET tome el valor 0 nuevamente, figura 12.16.

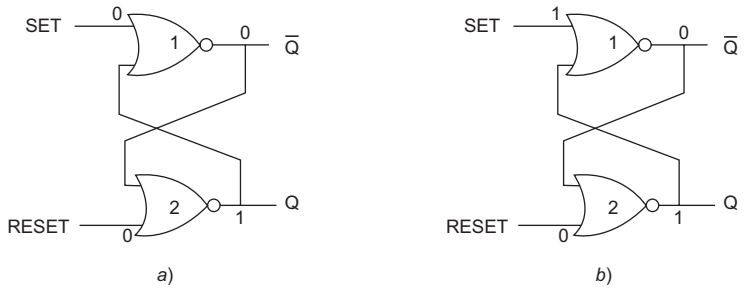


Figura 12.15 Circuito FF-NOR.

Tabla 12.3 Valores de verdad para el FF-NOR.

SET	RESET	Q
0	0	Sin cambio
0	1	0
1	0	1
1	1	No permitido

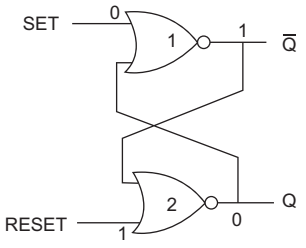


Figura 12.16 Restableciendo el FF-NOR con RESET = 1.

Observa que si se asignan los valores SET = RESET = 1 se dan condiciones que tienden a establecer y restablecer simultáneamente al sistema, lo que da por resultado que $Q = \overline{Q} = 0$, condición que no puede darse. De ahí que esta condición no esté permitida para este circuito.

En la tabla 12.3 se resume la operación de un flip-flop de compuertas NOR.

12.5 Pulsos digitales y los Flip-Flop

COMPETENCIAS:
- Comprender las características de un pulso. [1]
- Comprender el efecto de los pulsos digitales en sistemas Flip-Flop. [1]
- Analizar la respuesta de un Flip-Flop al aplicar una señal pulsane en su entrada. [2]

Cuando se pone en operación un flip-flop no se conoce el estado inicial en el que se pueda encontrar el sistema, por tanto, se desconocen tanto el valor de la salida Q, el cual puede ser de 0 o de 1, como el estado en que se encuentren las entradas SET Y RESET. Así que será necesario aplicar un pulso en la entrada apropiada.

En el contexto de los circuitos digitales se le llama *pulso* a una señal eléctrica cuya magnitud está dada por un voltaje determinado (1 volt, 3 volts, 5 volts, etcétera) y de una duración también definida (80 nanosegundos, 20 microsegundos, 1 milisegundo, etcétera). Un pulso se aplica a la entrada de un flip-flop para provocarle un cambio de estado, por ejemplo de normal inactivo a activo.

En teoría un pulso es de forma cuadrada; pero un generador de pulsos es un circuito físico real con tiempos de transición de estado bajo a alto o viceversa, diferentes de cero. Al tiempo que tarda en cambiar de un estado bajo a uno alto se le llama *tiempo de subida* (t_s), y al tiempo que tarda en volver de un estado alto a un estado bajo se le denomina *tiempo de caída* (t_c). Al perfil que describe al pulso cuando está pasando de un estado bajo a uno alto se le conoce como *flanco positivo,* mientras que el perfil opuesto será el *flanco negativo,* figura 12.17.

El tiempo que dura un pulso se le conoce también como *ancho del pulso* (t_a), y éste puede definirse como el tiempo que existe entre los puntos medios de ambos flancos, cuando cada uno se encuentra en el 50% del voltaje máximo.

Si se considera que un pulso corresponde a un estado alto o valor 1, y la suspensión del pulso a un valor bajo o 0, se puede obtener la gráfica correspondiente a los valores de la tabla de verdad de un flip-flop, como se ve en la figura 12.18*a* para un Flip-Flop NAND y en 12.18*b* para un Flip-Flop NOR.

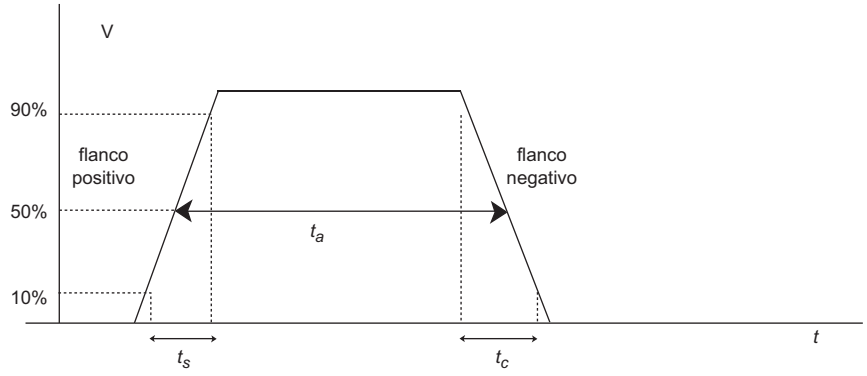


Figura 12.17 Características principales de un pulso.

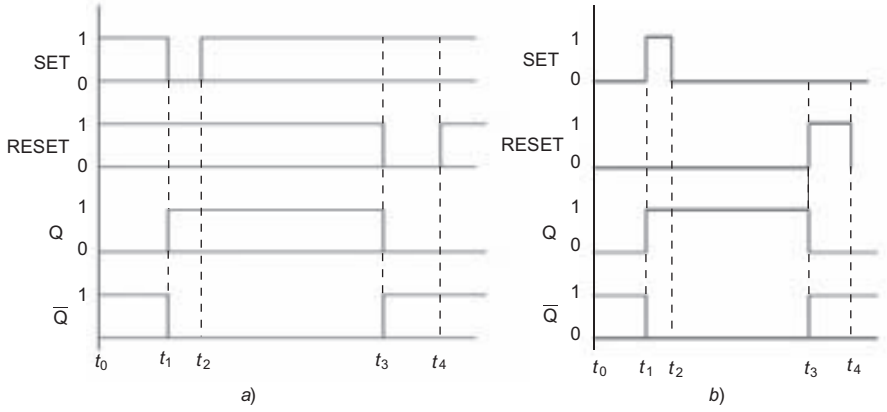


Figura 12.18 Gráfica de comportamiento en un flip-flop: *a*) FF-NAND. *b*) FF-NOR

12.6 Flip-Flop controlado por reloj

Los sistemas digitales pueden operar básicamente en dos formas: síncrona o asíncrona. Un sistema es síncrono cuando se controla mediante un circuito oscilador maestro, llamado *reloj*, que produce pulsos rectangulares con una frecuencia determinada; es decir, los pulsos ocurren en intervalos fijos (por ejemplo, cada 8 microsegundos), dando por resultado que los estados lógicos del sistema controlado ocurran en tiempos determinados por los pulsos del reloj.

COMPETENCIAS:
- Comprender los conceptos de sincronización y control por reloj en un FF. [1]
- Analizar la respuesta de un FF tipo SR, T, JK o D al aplicarle una señal pulsante en la entrada. [2]

12.6.1 Flip-Flop SR

Un flip-flop controlado por reloj opera de la misma manera que se explicó en secciones anteriores, con la condición adicional de que los pulsos del reloj controlan el efecto de las señales SET (S) y RESET (R) dadas. Esto quiere decir que la salida Q no responde directamente a las señales S y R sino que hay un tiempo de espera hasta que llega el siguiente pulso del reloj para que estas señales surtan efecto en la salida. En resumen, S y R son señales de control y CLK es la señal de disparo. La señal del reloj se aplica al FF a través de una entrada que éste tiene identificada por CLK (abreviatura de *clock*).

Tabla 12.4 Tabla de verdad para un FF controlado por reloj. *a*) Disparo con flanco positivo. *b*) Disparo con flanco negativo.

S	R	CLK	Q
0	0	↑	Sin cambio
0	1	↑	0
1	0	↑	1
1	1	↑	No permitido

a)

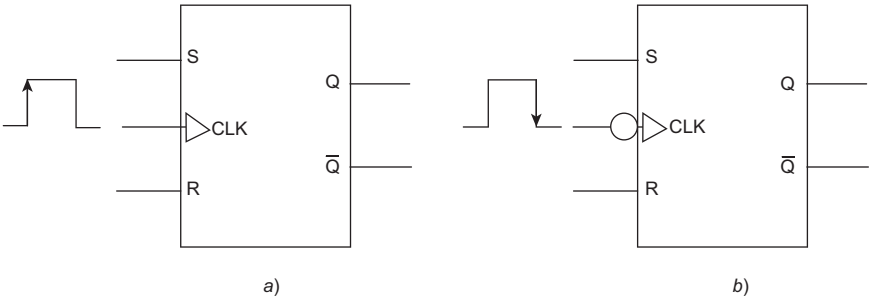
Tabla 12.4 *Continuación*

S	R	CLK	Q
0	0	↓	Sin cambio
0	1	↓	0
1	0	↓	1
1	1	↓	No permitido

b)

La figura 12.19*a* muestra el símbolo lógico de un flip-flop controlado por reloj con disparo en flanco positivo (↑) y la figura 12.19*b* es el de un flip-flop controlado por reloj con disparo en flanco negativo (↓). Este último se diferencia del primero por la burbuja dibujada en la entrada CLK. Los valores de verdad para cada tipo se ven en la tabla 12.4.

La figura 12.20 es la gráfica del comportamiento del FF sincronizado por pulsos de reloj con disparo en flanco positivo.



a) *b*)

Figura 12.19 Símbolo lógico para un FF-SR controlado por reloj. *a*) Disparo con flanco positivo. *b*) Disparo con flanco negativo.

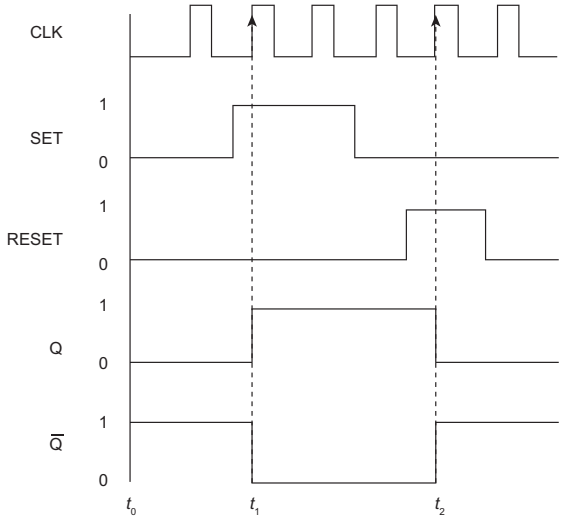


Figura 12.20 Gráfica en el tiempo para un FF controlado por reloj y disparo con flanco positivo.

12.7 Flip-Flop T

COMPETENCIA:
Comprender los principios de operación de un contador basado en un circuito FF-T. [1]

Este tipo de flip-flop es un circuito empleado como contador de pulsos. Su símbolo lógico se muestra en la figura 12.21. Cuenta con sólo dos entradas: una de ellas identificada por T (*toggle*) y otra para la señal de reloj (CLK). Mientras la señal T se encuentre en estado ALTO (1), la salida Q estará cambiando de valor, de 0 a 1 y de 1 a 0 cada vez que se detecte la presencia de un pulso. Esto dará por resultado que el FF-T opere

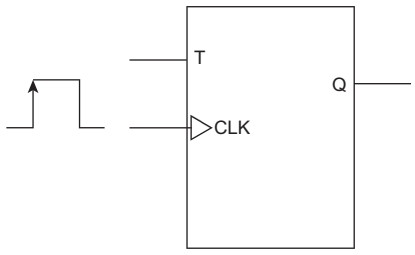


Figura 12.21 Símbolo lógico para un FF-T controlado por reloj.

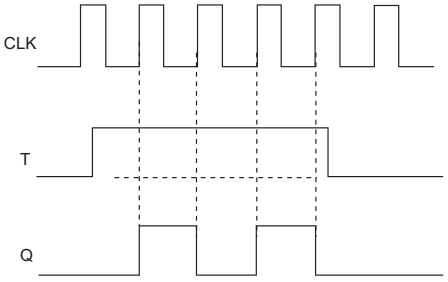


Figura 12.22 Gráfica para un FF-T disparado por flanco positivo.

Tabla 12.5 Tabla de verdad para un FF-T controlado por reloj.

T	CLK	Q
0	↑	Sin cambio
1	↑	Cambia

como un *contador*. El comportamiento en el tiempo da por resultado una gráfica como la mostrada en la figura 12.22, en la que se tiene un FF-T disparado por flancos positivos.

La tabla de verdad del FF-T es muy simple pues cuenta sólo con los valores para la señal T y los valores para la salida Q, tabla 12.5.

12.8 Flip-Flop-JK

COMPETENCIA:
Comprender el funcionamiento de un circuito controlado por reloj FF-JK. [1]

Una manera de eliminar la condición no permitida S = 1, R = 1 en un FF-SR es mediante la aplicación de un flip-flop-JK, donde J es la entrada que realiza la misma función que la entrada S, y K la entrada para realizar la función que hace R. En este flip-flop, cuando se presenta la condición J = K = 1, en lugar de generar una salida no permitida el FF-JK cambiará siempre al estado contrario cuando ocurra un pulso. Los hay con disparo en flanco positivo y con disparo en flanco negativo. El cambio continuo de un estado al opuesto y viceversa hace del FF-JK un *conmutador*, como se puede ver en la figura 12.23.

El símbolo lógico es el de la figura 12.24*a* para disparo en flanco positivo y *b* para disparo en flanco negativo. Este último se diferencia

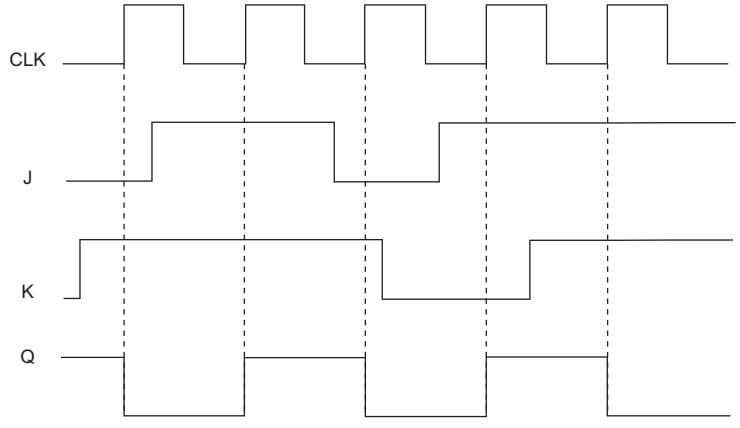


Figura 12.23 Gráfica FF-KJ.

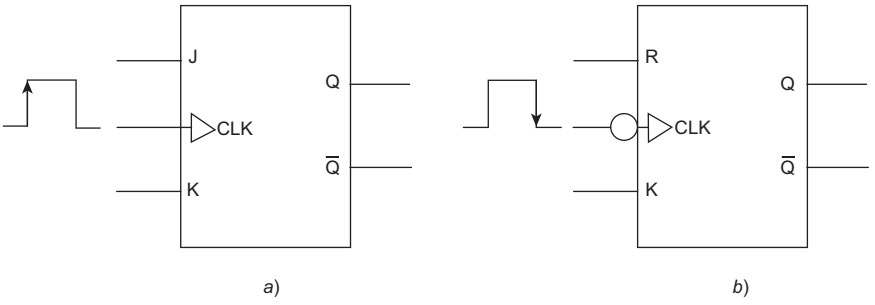


Figura 12.24 Símbolo lógico para un FF-JK controlado por reloj disparado por dos flancos. *a*) Disparo con flanco positivo. *b*) Disparo con flanco negativo.

del primero por la burbuja que lleva en la entrada CLK. Las tablas de verdad se muestran en las tablas 12.6 y 12.7.

Tabla 12.6 Tabla de verdad para un FF-KJ controlado por reloj, con disparo en flanco positivo.

J	K	CLK	Q
0	0	↑	Sin cambio
0	1	↑	0
1	0	↑	1
1	1	↑	conmuta

Tabla 12.7 Tabla de verdad para un FF-KJ controlado por reloj, con disparo en flanco negativo.

J	K	CLK	Q
0	0	↓	Sin cambio
0	1	↓	0
1	0	↓	1
1	1	↓	conmuta

12.9 Flip-Flop D

COMPETENCIA:
Comprender el principio de operación para el almacenamiento de datos con un FF-D. [1]

La figura 12.25 muestra el símbolo lógico del FF-D sincronizado por reloj. Éste cuenta con una sola entrada identificada por D (Datos) y su operación da por resultado que la salida Q adquiere el mismo estado que tenga la señal D cuando se presenta un flanco positivo en la señal CLK. El FF-D tiene entonces la capacidad de almacenar el dato proporcionado por la entrada D.

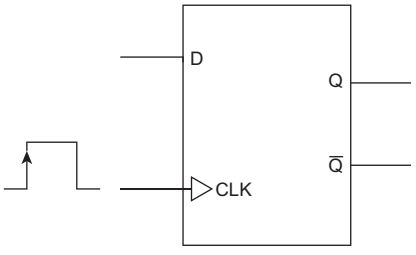


Figura 12.25 Símbolo lógico para el FF-D. Disparo en flanco positivo.

La gráfica que describe el comportamiento del FF-D en el tiempo es la de la figura 12.26, y su tabla de verdad es la 12.8.

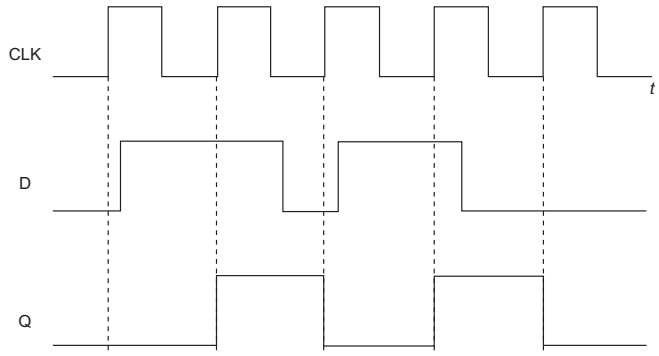


Figura 12.26 Gráfica en el tiempo para el FF-D.

Tabla 12.8 Tabla de verdad del FF-D.

T	CLK	Q
0	↑	0
1	↑	1

Actividades para la evaluación de competencias

Circuitos lógicos combinacionales

12.1 Describe los conceptos de lógica combinacional y lógica secuencial. [1]

12.2 Para la expresión booleana $Y = KL + K(\overline{MN} + L\,\overline{M})$ identifica los niveles de operación. [1]

12.3 Elabora la tabla de verdad para la función $f(x, y, z) = xy + \bar{y}\,(y + \bar{z})$ y dibuja el circuito lógico correspondiente. [2]

12.4 Dibuja el circuito lógico para la función $f(B, C, D, E) = \overline{D}\,E + \overline{C}\,(DE + BDE) + C(\overline{D}\,E + B\,\overline{E})$. [2]

12.5 Simplifica la expresión del ejercicio 12.4 y dibuja el circuito lógico simplificado correspondiente. Comprueba la equivalencia de los circuitos de ambos ejercicios mediante tabla de verdad. [3]

12.6 Comprueba la equivalencia de los circuitos de los ejercicios 12.4 y 12.5 utilizando un simulador de circuitos electrónicos. [3]

12.7 En una línea de empaque se tiene una banda A que transporta cajas hacia una plataforma B como muestra la figura 12.27. Ambas, banda y plataforma, cuentan con un sensor de peso cada una, para que el motor de la banda arranque cuando hay alguna caja en la banda, siempre que la plataforma esté libre de cajas.
El motor para en ausencia de cajas sobre la banda. Diseña la tabla de verdad para este sistema de arranque y dibuja el circuito lógico correspondiente. [3]

12.8 El quemador que calienta a una caldera enciende automáticamente sólo cuando:
a) El nivel del agua por calentar alcanza por lo menos un nivel N.
b) La temperatura del agua desciende por debajo de un valor T siempre y cuando su nivel mínimo sea N.
c) La presión del vapor desciende por debajo de un valor P y el agua tiene un nivel mínimo N, independientemente de la temperatura del agua.

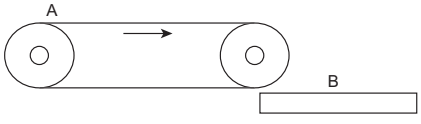


Figura 12.27 Banda y plataforma, Ejercicio 12.7.

d) La presión del vapor desciende por debajo de un valor P y el nivel del agua tiene un nivel mínimo N y su temperatura desciende por debajo del valor T.
Elabora una tabla de verdad para este sistema y dibuja el circuito lógico que proporcione la salida *X* para encendido automático del quemador. [3]

12.9 Simplifica la siguiente función F (*W*, *X*, *Y*, *Z*) a través del método de mapa *K*. Dibuja el circuito lógico correspondiente a la función simplificada.

$$F = \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{W}\,X\,\overline{Y}\,\overline{Z} + WX\,\overline{Y}\,\overline{Z} + W\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{W}\,X\,\overline{Y}\,Z + WX\,\overline{Y}\,Z + W\,\overline{X}\,\overline{Y}\,Z + WXYZ + W\,\overline{X}\,YZ + \overline{W}\,\overline{X}\,Y\,\overline{Z} + \overline{W}\,XY\,\overline{Z} + WXY\,\overline{Z} + W\,\overline{X}\,Y\,\overline{Z}$$

Circuitos lógicos secuenciales

12.10 ¿Cuál será la principal característica de los circuitos lógicos secuenciales que los diferencia de los combinacionales? Explica. [2]

12.11 ¿Qué función realizan en un circuito flip-flop las entradas SET y RESET respectivamente? Explica. [2]

12.12 Haz la simulación de un FF-NAND y elabora la tabla de verdad correspondiente a partir de los resultados de la simulación. Utiliza interruptores en serie con cada entrada SET y RESET. Alimenta el circuito con una fuente de 5 V cd. [3]

12.13 Elabora la gráfica para obtener las señales Q y $\overline{Q}$ en el tiempo para el FF-NAND del ejercicio 12.12, si los interruptores de las entradas se posicionan cada 1 segundo de acuerdo con la siguiente secuencia: [2]
$t = 0$: SET = 1, RESET = 1
$t = 1$ seg: SET = 0, RESET = 1
$t = 2$ seg: SET = 1, RESET = 0
$t = 3$ seg: SET= 1, RESET = 1

12.14 Para el ejercicio 12.13 encuentra por medio del simulador de circuitos las condiciones no permitidas para las entradas SET y RESET y explica la razón de ello. [3]

Flip-Flop de compuertas NAND

12.15 Comprueba la tabla de verdad 12.3 dada para un FF-NOR mediante la simulación del circuito. [2]

12.16 Elabora la gráfica para las señales Q y $\overline{Q}$ en el tiempo para el FF-NOR del ejercicio 12.15 tomando la siguiente secuencia: [2]
$t = 0$: SET = 0, RESET = 0
$t = 1$ s SET = 1, RESET = 0
$t = 2$ s SET = 0, RESET = 1
$t = 3$ s SET = 0, RESET = 0

12.17 En el caso del ejercicio 12.15 encuentra por medio del simulador de circuitos las condiciones no permitidas para las entradas SET y RESET, y explica por qué son no permitidas estas condiciones. [3]

Flip-Flop controlado por reloj

12.18 En la figura 12.28 se presentan las señales SET, RESET Y CLK Para un flip-flop SR. A partir de estos datos gráficos obtén la gráfica de comportamiento para Q y $\overline{Q}$. [2]

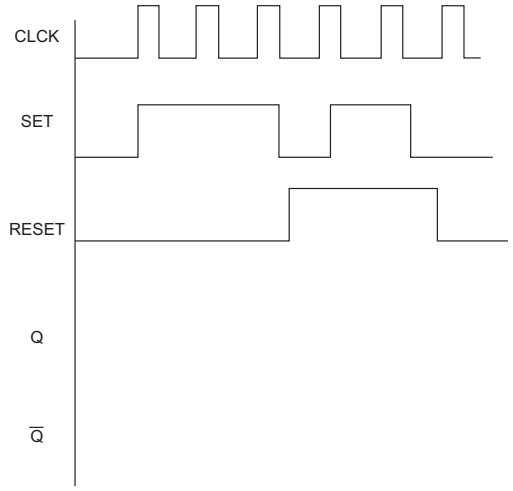


Figura 12.28 Gráfica para el ejercicio 12.18.

12.19 Se tiene un FF-SR controlado por reloj cuyo periodo es T = 1 m/s y su ancho de pulso t_w = 0.5 m/s, con disparo en flanco positivo. Las señales S y R adquieren los valores indicados en la tabla 12.9. Elabora las gráficas para las señales S y R, y la salida Q en el lapso de 0 a 15 m/s. [2]

12.20 Desarrolla el ejercicio 12.19 tomando los mismos datos, pero cambiando a un FF-SR disparado en flanco negativo. [2]

Tabla 12.9 Datos para ejercicio 12.19.

t(ms)	S	R	Q
0	0	0	
0.6	1	0	
1.4	0	0	
2.7	0	1	
4.2	0	0	
4.8	1	0	
6.2	0	1	
8.7	0	0	
9.3	0	1	
10.8	1	0	
12.8	0	0	
14.2	0	1	

Flip-Flop T

12.21 Supón un FF-T controlado por reloj con periodo T = 1 m/s y ancho de pulso t_w = 0.5 m/s. La señal de la entrada T toma los valores indicados en la tabla 12.10. Sin elaborar la gráfica calcula hasta qué número llegará el conteo del circuito en el tiempo comprendido de 0 a 20 m/s. [3]

12.22 Elabora la gráfica de comportamiento en el tiempo para el contador del ejercicio 12.21. Compara los resultados de ambos ejercicios y comprueba. [3]

Tabla 12.10 Datos para ejercicio 12.21.

t(ms)	T	Q
0	0	
0.6	1	
1.4	1	
2.7	1	
4.2	1	
4.8	1	
6.2	0	
8.7	0	
9.3	1	
10.8	1	
12.8	1	
14.2	0	

Flip-Flop-JK

12.23 Supón un FF-JK controlado por reloj con periodo T = 1.5 m/s y ancho de pulso t_w = 0.5 m/s con disparo en flanco positivo. Las señales de control J y K toman los valores indicados en la tabla 12.11. Sin elaborar la gráfica calcula hasta qué número llegará el conteo del circuito en el tiempo comprendido de 0 a 20 m/s. [3]

12.24 Construye la gráfica de comportamiento en el tiempo para el FF-JK del ejercicio 12.23. Compara los resultados de ambos ejercicios y comprueba. [3]

Flip-Flop D

12.25 Calcula la cantidad de datos de valor 1 almacenados en un FF-D sincronizado por un reloj con período T = 1 m/s y ancho de pulso de t_w = 0.5 ms, durante el lapso comprendido de 0 a 20 ms de acuerdo con los registros de la tabla 12.12. [2]

12.26 Construye la gráfica del comportamiento del FF-D del ejercicio 12.25. Compara los resultados de ambos ejercicios y comprueba. [3]

Tabla 12.11 Datos para ejercicio 12.23.

t(ms)	J	K	Q
0	0	0	
0.6	1	0	
1.4	0	0	
2.7	0	1	
4.2	1	1	
4.8	1	0	
6.2	0	1	
8.7	0	0	
9.3	1	1	
10.8	1	0	
12.8	0	0	
14.2	0	1	

Tabla 12.12 Datos para ejercicio 12.25.

t(ms)	D	Q
0	0	
0.4	1	
1.8	0	
2.8	0	
5.2	1	
6.8	1	
7.2	0	
8.7	0	
9.3	1	
10.6	1	
12.8	0	
13.9	0	

Notas:

[1] Competencias de la dimensión Instrumental.
[2] Competencias de la dimensión Sistémica.
[3] Competencias de la dimensión Interpersonal.

.....